

Приближенное вычисление корня уравнения методом деления отрезка пополам

Вербицкая Ольга Владимировна, Заозерная школа №16

Вычисления корня уравнения $f(x)=0$

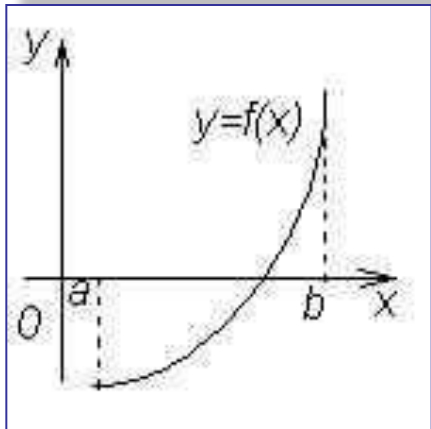
Вычисления на компьютере обладают большей гибкостью, чем привычные всем вычисления в математике. Рассмотрим для примера задачу вычисления корня уравнения $f(x) = 0$. В курсе школьной математики вам известен метод дискриминанта для уравнений

вида:
 $ax^2 + bx + c = 0$, выражаемой по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Однако, во многих случаях, ответ не выражается формулой (например, для корня уравнения $\cos(x) = x$ формулы просто нет). Но можно, не выводя точных формул, вычислить корень приближенно, с заданной точностью, например, до 0,0001. Мы рассмотрим один из приближенных методов вычисления корня уравнения – метод деления отрезка пополам.

Постановка задачи

□ Дано уравнение $f(x) = 0$ и числа a и b : $a < b$,



□ $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки на отрезке $[a, b]$, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$,

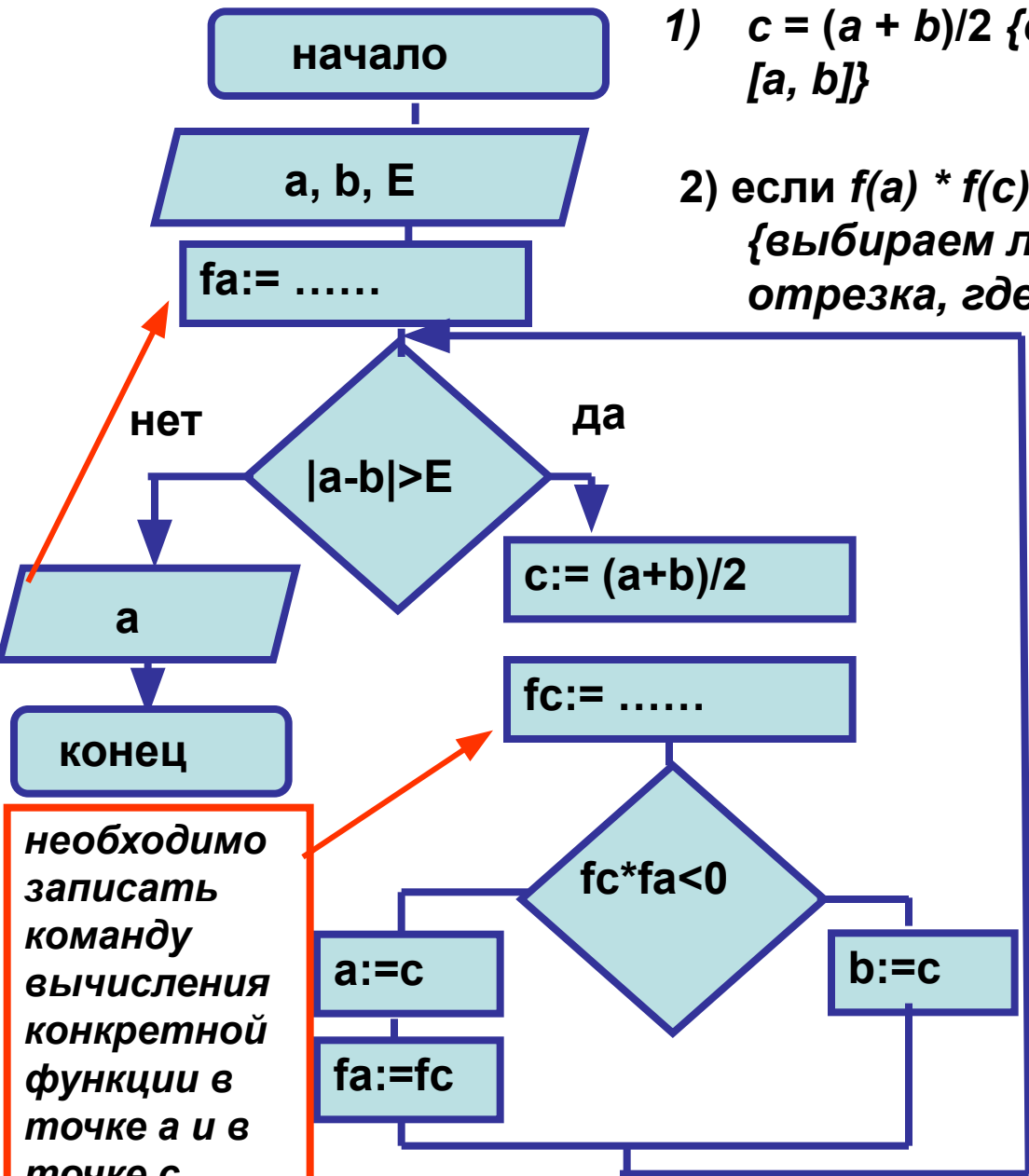
□ а график функции $y = f(x)$ есть непрерывная линия на отрезке $[a, b]$.

□ В этом случае график функции обязательно пересечет ось Ox .

Требуется определить корень уравнения W с точностью $E > 0$.

Если V – точный корень уравнения $f(V) = 0$, $a \leq V \leq b$, то требуется найти W : $|W - V| < E$, $a \leq W \leq b$.

Алгоритм метода деления отрезка пополам



1) $c = (a + b)/2$ {вычисляем середину отрезка $[a, b]$ }

2) если $f(a) * f(c) < 0$, то $b = c$ иначе $a = c$.
{выбираем левую или правую часть отрезка, где находится корень уравнения}

3) если $|a - b| > E$, то перейти к пункту 1).
{если величина длины отрезка не достигла требуемой точности, то процесс деления отрезка продолжаем}

Любая точка отрезка $[a, b]$ при таком алгоритме даст приближенное решение с заданной точностью.

необходимо записать команду вычисления конкретной функции в точке a и в точке c.

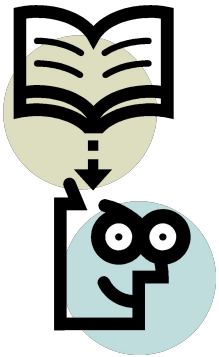
Когда можно применять метод деления отрезка пополам

Что необходимо предварительно сделать, прежде чем применять этот алгоритм для нахождения корня уравнения?

Необходимо, в первую очередь, проверить, удовлетворяет ли функция постановке задачи: является ли график функции непрерывной линией на отрезке $[a, b]$, разные ли знаки имеет функция на концах отрезка $[a, b]$.

Можно ли применять метод деления отрезка пополам для нахождения корней уравнений, на заданных отрезках

- a. $x^2 - 5 = 0$, $[0, 3]$ (**ПО**: функция непрерывна на отрезке и $f(0) * f(3) < 0$, применять метод можно)
- b. $\sin(x) - 0,2 = 0$ $[0, \pi/2]$ (**ПО**: функция непрерывна на отрезке и $f(0) * f(\pi/2) < 0$, применять метод можно)
- c. $1/(x - 1)$ $[-2, 2]$ (**ПО**: функция не существует в точке $x=1$, применять метод нельзя)
- d. $x^4 + \cos(x) - 2 = 0$ $[0, 2]$ (**ПО**: функция непрерывна на отрезке и $f(0) * f(2) < 0$, применять метод можно)
- e. $x^5 - 1 = 0$ $[-5, 2]$ (**ПО**: функция непрерывна на отрезке и $f(-5) * f(2) < 0$, применять метод можно)



Программа

Используя программу, вычислить на компьютере приближенные корни уравнения с точностью до 0.001 следующих уравнений:

```
Program XXX;  
Uses Crt;  
Var a, b, e, fa, fc, c: Real;  
Begin
```

```
  ClrScr; a:=...; b:=...;
```

```
  e := 0.001;
```

```
  fa := ... ;
```

```
  While Abs (a - b) > e do
```

```
    Begin c := (a + b)/2;
```

```
      fc := ... ;
```

```
      If fc * fa < 0 Then b := c
```

```
      Else Begin a := c; fa := fc; end;
```

```
    end;
```

```
    Writeln ('Корень уравнения равен ', a : 6 : 3);
```

```
    Readkey;
```

```
End.
```

a. $x^2 \cos(2x) + 1 = 0$ [0, pi/2]

b. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ [-2,1]

c. $x^5 - 0,3 | x - 1 | = 0$ [0,1]

d. $2x - \cos(x) = 0$ [0, pi/4]

e. $tg(x) - (x + 1)/2 = 0$ [0, pi/4]