



П а р а б о л а

Т е о р е м а

К о о р д и н а т ы

А л г е б р а

П р я м а я

И н т е р в а л

А к с и о м а

с у м м а

О р д и н а т а

В и е т

Арифметическая прогрессия

Из истории Арифметической прогрессии

Древний Египет, страна великих достижений человеческой мысли, великих астрономов и математиков.

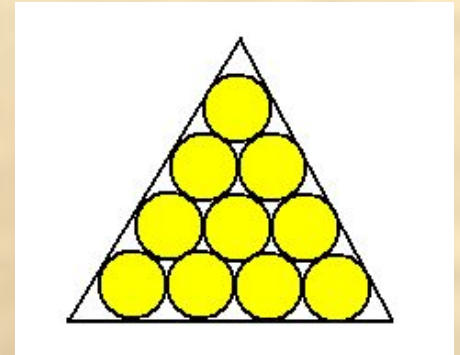
Самый большой, сохранившийся до наших дней, древнеегипетский математический текст – это папирус писца XVIII–XVII веков до нашей эры Ахмеса. Он имеет размер 5,25 м на 33 см, содержит 84 задачи.



Задачи из папируса Ахмеса или Райнда

- «Тебе сказано: раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между каждым человеком и следующим за ним составляет $1/8$ меры»
- Если камушки (или другие предметы) разложить рядами в форме треугольника так, что в первом ряду положить 1 камень, во втором – 2 и т.д., то их количество называли «треугольным числом». Таким образом, треугольные числа образуют такую последовательность: 1, 2, 3, 4, ..., а сумма этих камушков образует треугольное число.

Треугольное число - это и есть сумма n -первых членов арифметической прогрессии.



Фигурные числа

Фигурные числа были известны еще в Древнем Вавилоне. В V - IV веках до нашей эры ученые, комбинируя натуральные числа, составляли из них затейливые ряды, придавая элементам этих рядов то или иное геометрическое истолкование. С их помощью можно выложить правильные геометрические фигуры: треугольники, квадраты, пирамиды и т.д.

Увлеклись, причем независимо друг от друга, нахождением таких чисел Б. Паскаль и П. Ферма.



Блез Паскаль



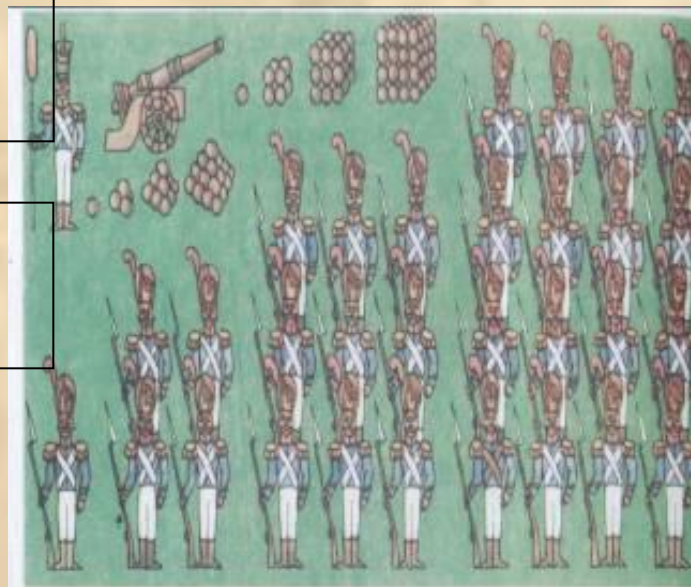
Пьер Ферма

	Фигура	Числа					Общий член S_n	
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5		...
1	Треугольник	1	3	6	10	15	...	$n(n+1)/2$
2	Квадрат	1	4	9	16	25	...	n^2
3	Пятиугольник	1	5	12	22	35	...	$n(3n-1)/2$
4	шестиугольник	1	6	15	28	45	...	$n(2n-1)$



d=1
1;2;3;4;...

d=3
1;4;7;10;...

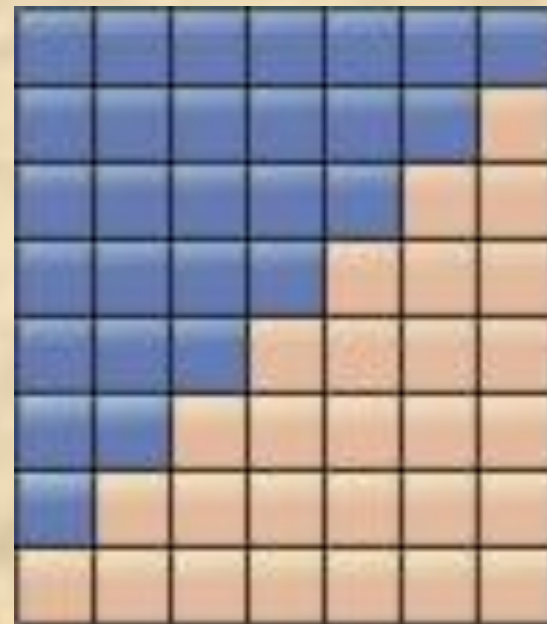


d=2
1;3;5;7;...

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии S_n в истории выводилась неоднократно и разными способами.

Способ пифагорейцев

Треугольник, образованный первыми n натуральными числами, является половиной прямоугольника со сторонами n и $(n + 1)$, следовательно, сумма первых n натуральных чисел равна $((n + 1)n)/2$.



$$n = 7, S_n = 28$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

С формулой связан один из эпизодов биографии **К.Ф.Гаусса**.
В дальнейшем Гаусс сделал много замечательных открытий. Его даже называли «царем математики»



К.Ф.Гаусс

Древнейшая задача о делении хлеба

Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвёртый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трёх остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение:

Пусть y - разность арифметической прогрессии, тогда

доля первого $- x$; доля второго $- (x + y)$;

доля третьего $- (x + 2y)$; доля четвертого $- (x + 3y)$; доля пятого $- (x + 4y)$.

По условию задачи составим систему уравнений:

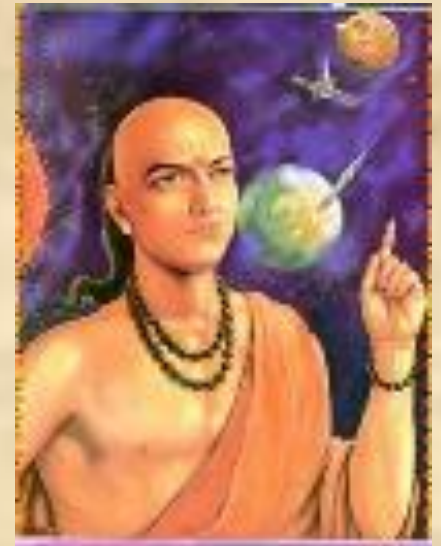
$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100, \\ 7((x + (x + y))) = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 10y = 100, \\ 14x + 7y = 3x + 9y; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y = 20, \\ 11x = 2y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x = 20; \\ 11x = 2y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1\frac{2}{3}, \\ y = 9\frac{1}{6}. \end{cases}$$

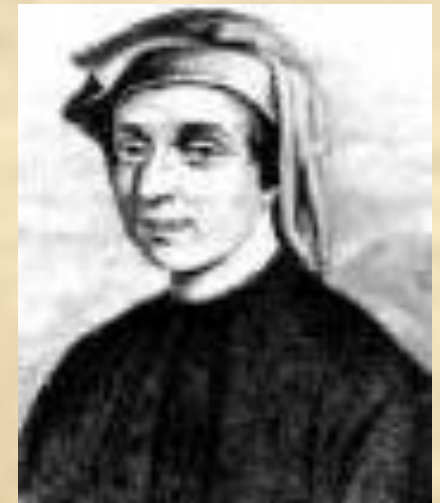
Следовательно, хлеб должен быть разделен на следующие части:

$$1\frac{2}{3}, \quad 10\frac{5}{6}, \quad 20, \quad 29\frac{1}{6}, \quad 38\frac{1}{3}.$$

Индийский астроном и математик
Ариабхата (V в.) применял формулы
общего числа, суммы n членов
арифметической прогрессии.



Правило для нахождения суммы членов
произвольной арифметической
прогрессии впервые встречается в
сочинении итальянского математика
Леонардо Пизанского «Книга абака»
1202г.





Арифметическая прогрессия

Последовательность, в которой каждый член, начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

Число d - разность прогрессии

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$$

- 1) 2; 5; 8; 11; 14; 17; ... арифметическая прогрессия $d = 3$
- 2) 3; 9; 27; 81; 243; ... геометрическая прогрессия $q = 3$
- 3) 1; 6; 11; 20; 25; ... последовательность чисел
- 4) -4; -8; -16; -32; ... геометрическая прогрессия $q = 2$
- 5) 5; 25; 35; 45; 55; ... последовательность чисел
- 6) -2; -4; -6; -8; ... арифметическая прогрессия $d = -2$

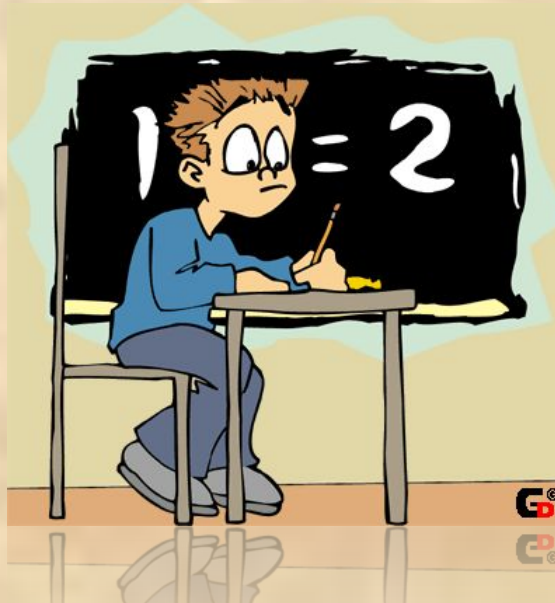
Формула n-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Дано: $a_1 = 7$, $d = 5$

Найти: a_4

$$a_4 = 22$$



Характеристическое свойство



Каждый член последовательности начиная со второго есть среднее арифметическое между предыдущим и последующим членами прогрессии

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$x_1, x_2, 4, x_4, 14, \dots$
найти: x_4

$$x_4 = 9$$

Формулы суммы n первых членов прогрессий

арифметическая

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Дано: $a_1 = 5$, $d = 4$

Найти: S_5

$$S_5 = 65$$

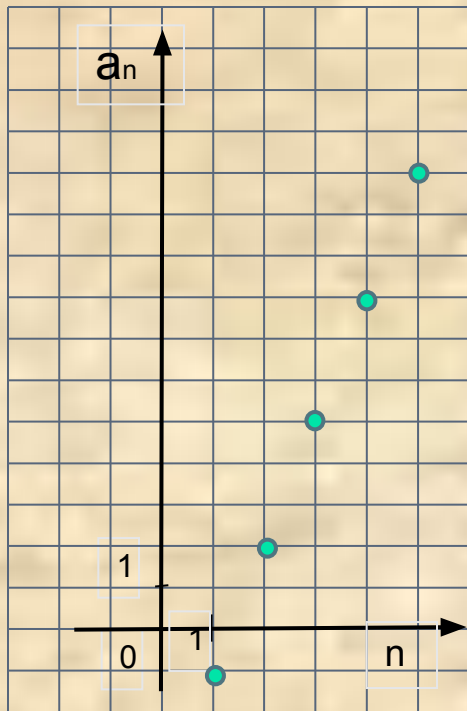


Рис. 1

1. Про арифметическую прогрессию (a_n) известно, что $a_7 = 8$, $a_8 = 12$. найдите разность арифметической прогрессии.

- А) -4 Б) 4 В) 20 Г) 3

2. Члены арифметической прогрессии изображены (рис.1) точками на координатной плоскости. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

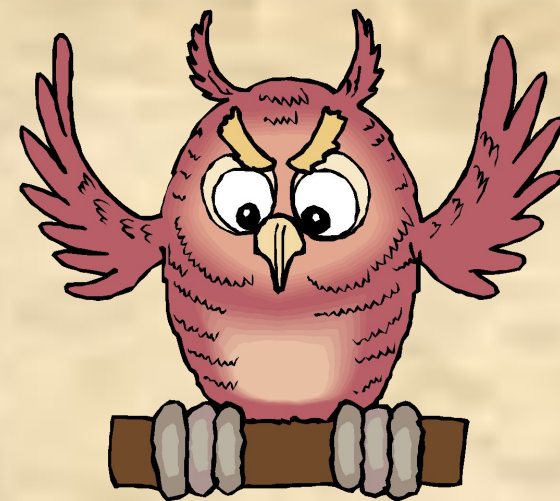
- А) -7 Б) 6 В) 12 Г) 17

3. Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 11. Третий её член на 6 больше первого. Найдите второй и четвёртый члены.

Ответ:

$$a_2 = 1; a_4 = 7,$$

Прогрессии в жизни, в быту и не только...



За 16 дней Карл украл у Клары 472 коралла. Каждый день он крал на 3 коралла больше, чем в предыдущий день. Сколько кораллов украл Карл в последний день?

1.Решение:

$$S_{16} = \frac{1}{2} (2 \cdot a_1 + 3 \cdot 15) \cdot 16;$$

$$472 = 16 a_1 + 360;$$

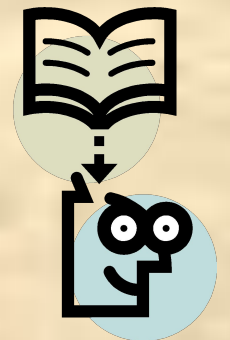
$$a_1 = (472 - 360) : 16 = 7.$$

$$a_{16} = 7 + 3 \cdot (16 - 1) = 52.$$

Ответ: 52 коралла украл Карл в последний день.

Прогрессии в жизни, в быту и не только...

В сборнике по подготовке к экзамену 240 задач. Ученик планирует начать их решение 2 мая, а закончить 16 мая, решая каждый день на две задачи больше, чем в предыдущий день. Сколько задач ученик запланировал решить 12 мая?



2.Решение:

$$240 = \frac{1}{2}(2 a_1 + 2 \cdot 14) \cdot 15;$$

$$240 : 15 = a_1 + 14;$$

$$a_1 = 2;$$

$$a_{11} = 2 + 2 \cdot 10 = 22.$$

Ответ: 22 задачи надо решить 12 мая.

Прогрессии в жизни, в быту и не только...

В амфитеатре расположены 10 рядов, причем в каждом следующем ряду на 20 мест больше чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько человек вмещает амфитеатр?

3.Решение:

$$280 = a_1 + 20 \cdot (10 - 1);$$

$$a_1 = 280 - 20 \cdot 9 = 100;$$

$$S_{10} = \frac{1}{2}(100 + 280) \cdot 10 = 1900.$$

Ответ: 1900 человек
вмещает амфитеатр.

Тест по теме «Арифметическая прогрессия»

*Пройдите за компьютеры. У вас 15
минут.*

Успешного решения!

Домашнее задание

На «4»

Сборник ГИА Кузнецова Л.В.
№7.19-7.21 (2)

На «5»

Сборник ГИА Кузнецова Л.В.
№7.22,7.29, 7.30, 7.38 (2)

Творческое задание:

сделать подборку старинных или практических задач по теме «Прогрессии»

**умения на
конец урока. Был ли полезен
урок
для каждого из вас? Чем?**

Сегодня на уроке я

- узнал...**
- лучше научился...**
- смог, потому что...**
- у меня не получилось, потому что...**
- дома надо потренироваться...**

*Урок сегодня завершён,
Дружней вас не сыскать.
Но каждый должен знать:
Познание, упорство, труд
К прогрессу в жизни приведут!*

Спасибо за урок!

I (слайд 2) Тему сегодняшнего урока мы узнаем, разгадав кроссворд:

1. Как называется график квадратичной функции?
2. Математическое предложение, справедливость которого доказывается.
3. Упорядоченная пара чисел, задающая положение точки на плоскости.
4. Наука, возникшая в глубокой древности в Вавилоне и Египте, а учащиеся России начинают её изучать с 7 класса.
5. Линия на плоскости, задаваемая уравнением $y=kx+b$.
6. Числовой промежуток.
7. Предложение, принимаемое без доказательства.
8. Результат сложения
9. Название второй координаты на плоскости.
10. Французский математик 19 века, «отец» алгебры, юрист, разгадал шифр, применяемый испанцами в войне с французами, а нам помог в быстром решении квадратных уравнений.

II (слайд 3)

Итак, тема урока «Прогрессии». Прогрессия – латинское слово, означающее "движение вперед", было введено римским автором Боэцием.

- А почему во множественном числе? Какие знаете прогрессии?
Давайте сформулируем цели нашего урока.

Установи соответствие
ответы:

III (слайд 4)

историческая справка (Д/З)

IV (слайды 5-10)

обобщение теоретического материала

- | | |
|--------|---------|
| 1.- 3 | 7.- 4 |
| 2.- 18 | 8.- 15 |
| 3. - 2 | 9.- 8 |
| 4.- 14 | 10.- 1 |
| 5.- 7 | 11.- 10 |
| 6.- 12 | 12.-14 |

