Теорема Пифагора

VI век до н. э.

© Фофанова Лариса Георгиевна, 2003

Упоминания о теореме Пифагора

Прокл
(математик V в.)

Витрувий
(Римский архитектор и инженер)

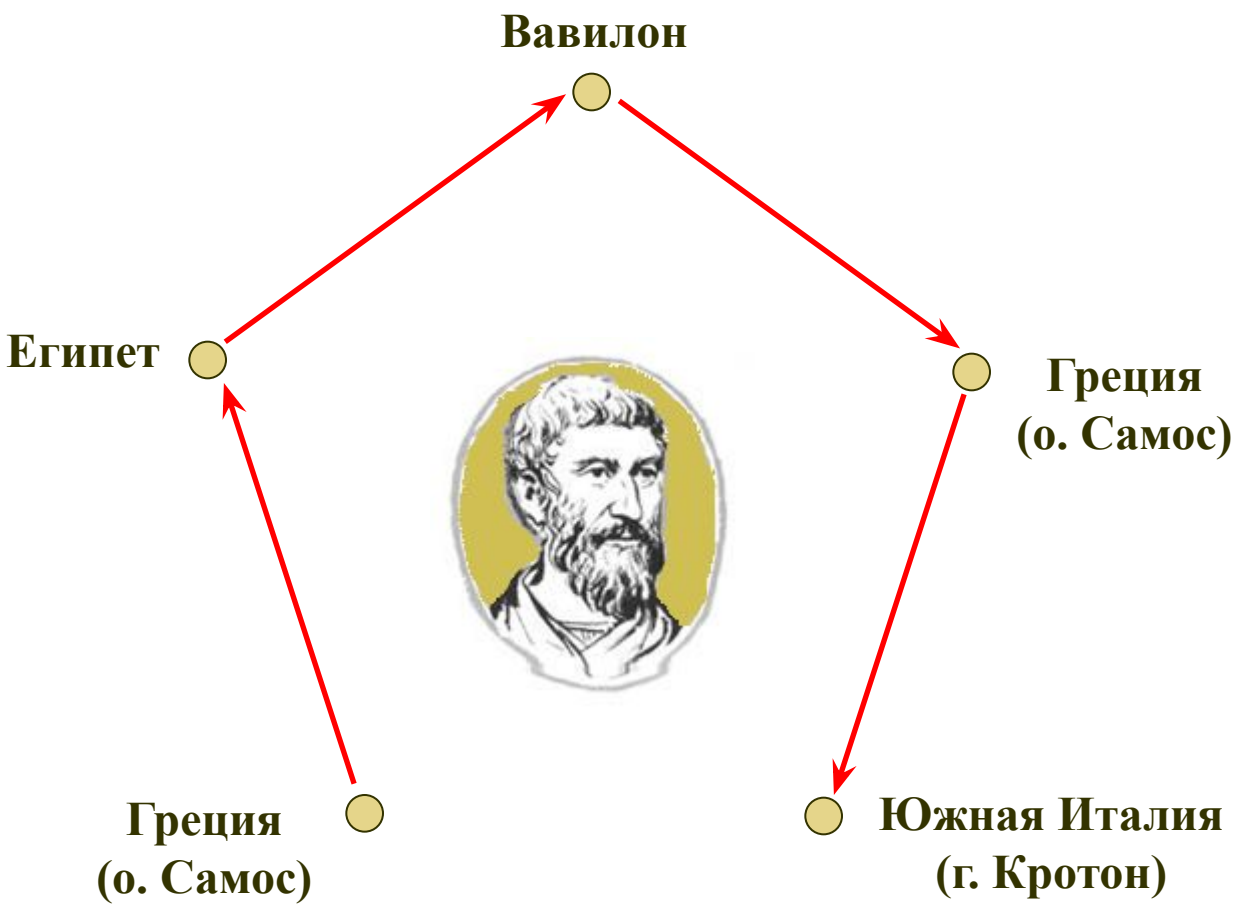
Диоген
(Греческий ученый III в.)

Плутарх
(Греческий пистель и моралист I в.)

Родина ученого

о. Самос (Греция)

Жизненный путь Пифагора



Заповеди Пифагора, как учителя философии

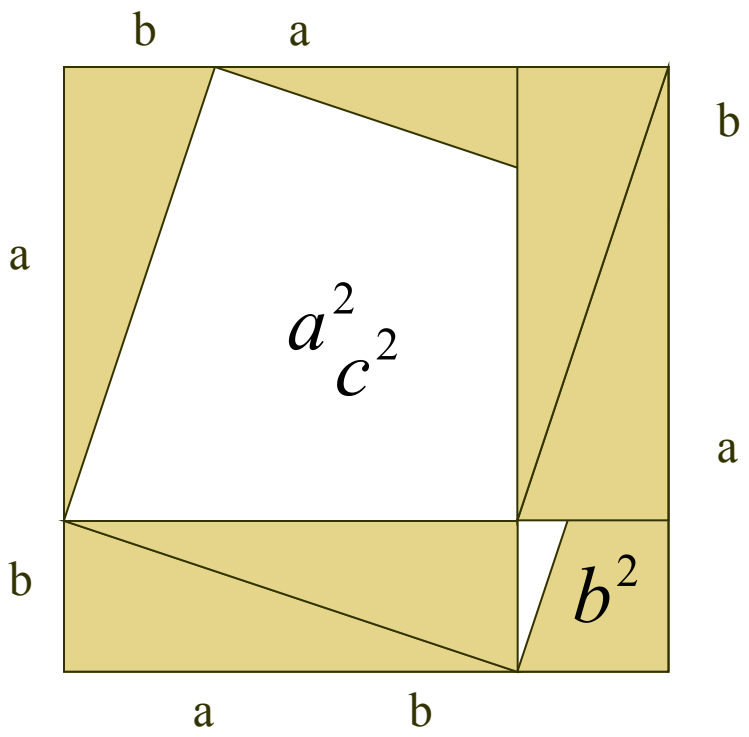
- Мысль – превыше всего между людьми на земле.
- Не садись на хлебную меру (не живи праздно).
- Уходя, не оглядывайся (перед смертью не цепляйся за жизнь).
- По торной дороге не ходи (следуй не мнениям толпы, а мнениям немногих понимающих).
- Будь с тем, кто ношу взваливает, не будь с тем, кто ношу сваливает (поощряй людей не к праздности, а к добродетели и труду).

Формулировки теоремы

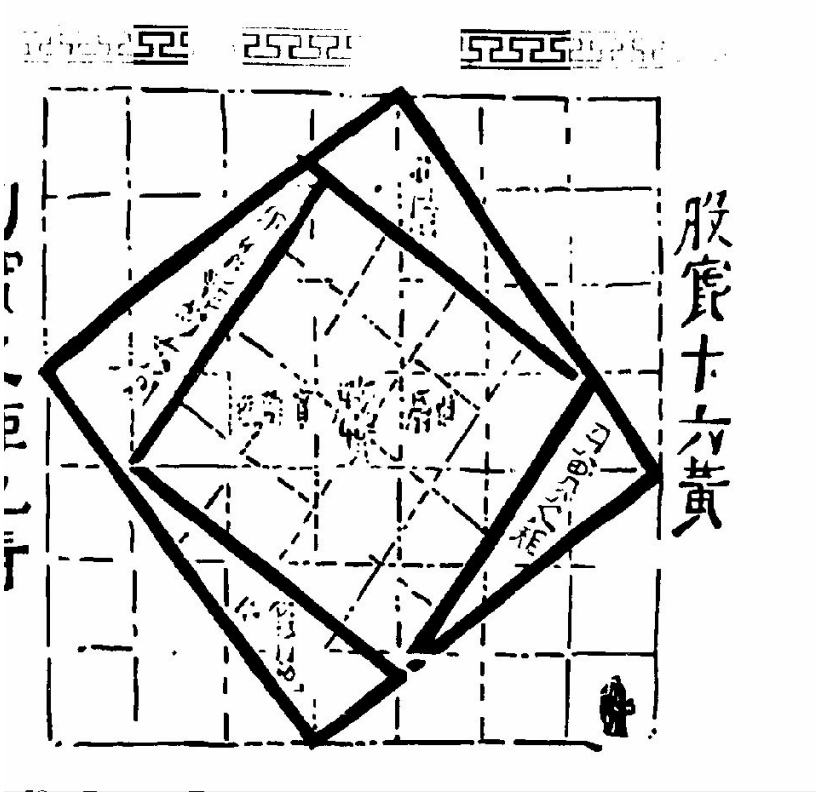
- **Формулировка Евклида:**
  В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутый над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол.

- **В Geometria Culmonensis**
  теорема читается так:
  Итак, площадь квадрата, измеренного по длинной стороне, столь же велика, как и у двух квадратов, которые измерены по двум сторонам его, примыкающим к прямому углу.

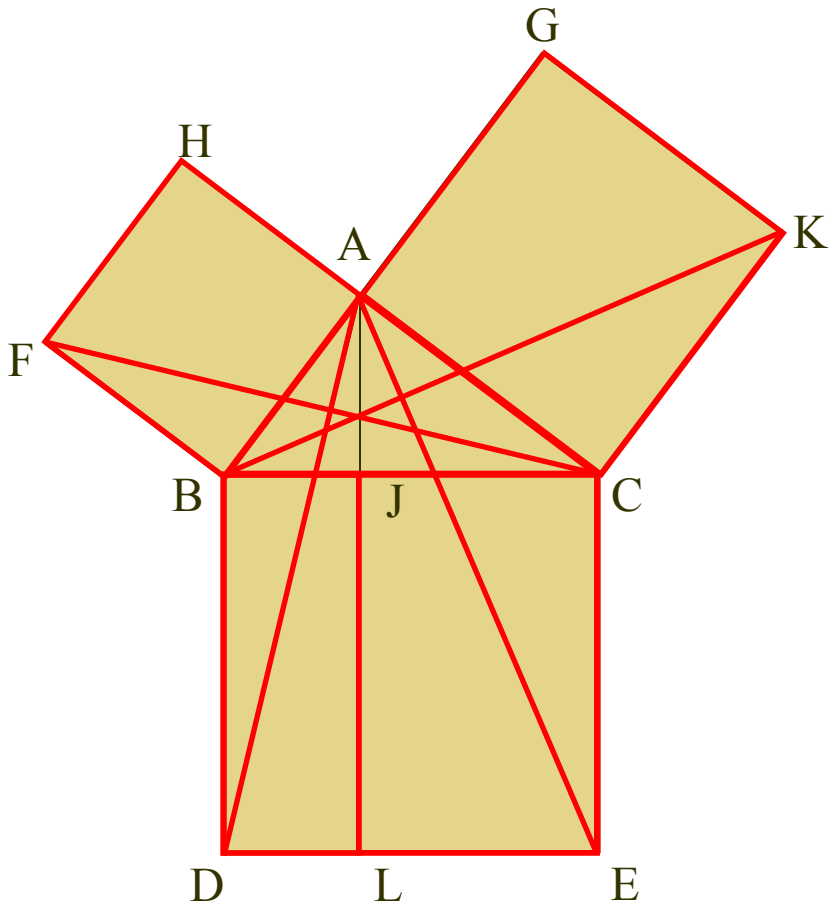
Древнекитайское доказательство



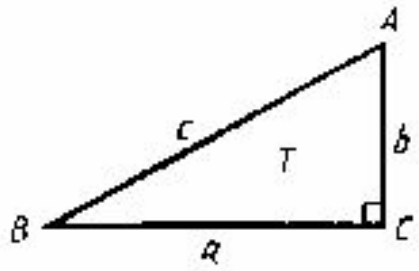
Чертеж из трактата «Чжоу-би»



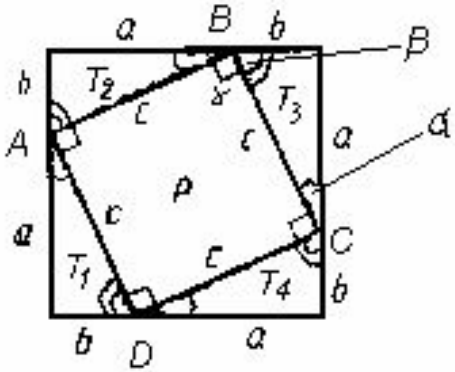
Доказательство Евклида



Алгебраическое доказательство



а)



б)

$\alpha+\beta=90°$

$\alpha+\beta+\gamma=180°$

$\gamma=90°$

$S(Q)=S(P)+4S(T)$.

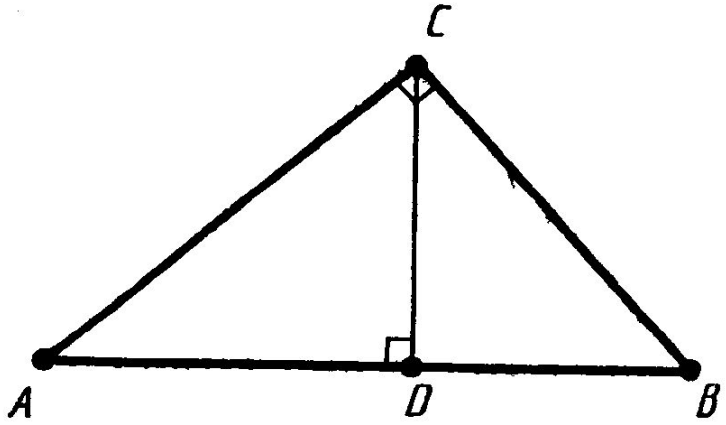
$S(Q)=(a+b)^2$; $S(P)=c^2$ и $S(T)=1/2(ab)$

$(a+b)^2=c^2+4\cdot(1/2)ab$

$a^2+b^2+2ab=c^2+2ab$

$c^2=a^2+b^2$

Тригонометрическое доказательство



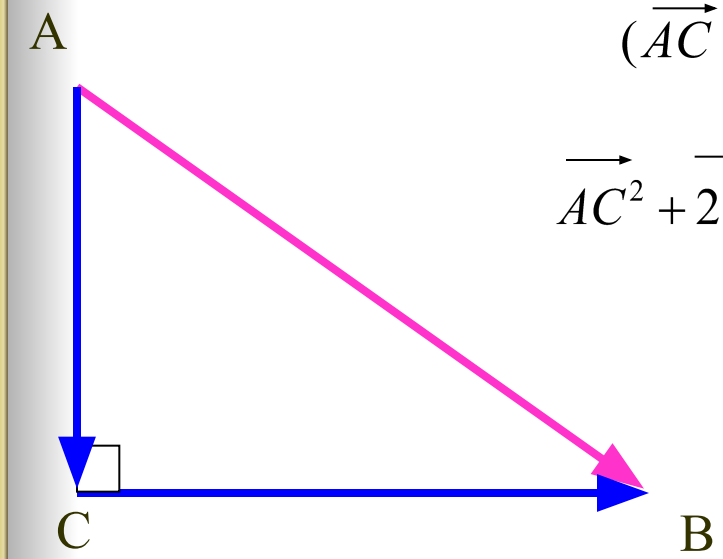
$CD \perp AB$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\, ABC:\ \mathrm{Cos}A = \dfrac{AC}{AB} \\ \Delta\, ACD:\ \mathrm{Cos}A = \dfrac{AD}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD.$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\, ABC:\ \mathrm{Cos}B = \dfrac{BC}{AB} \\ \Delta\, CDB:\ \mathrm{Cos}B = \dfrac{BD}{CB} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}. \Rightarrow BC^2 = AB \cdot BD$$

$AC^2 + BC^2 = AB(AD+BD) \Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2.$

Векторное доказательство



$$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})^2=\overrightarrow{AB}^2$$

$$\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}\cdot\cos(a)+\overrightarrow{CB}^2=\overrightarrow{AB}^2$$

$$\overrightarrow{AC}^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=AC^2$$

$$\overrightarrow{CB}^2=\left|\overrightarrow{CB}\right|^2=CB^2$$

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=2\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\cos(a)=0$$

a = 90°, cos90° = 0

$AB^2=AC^2+BC^2$

Пифагоровы числа

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = \frac{a^2 - 1}{2} \qquad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

a	3	5	6	7	9	11	13	15	17	19
b	4	12	8	24	40	60	84	112	144	180
c	5	13	10	25	41	61	85	113	145	181

Задача

$\angle A = \angle D = 45°$

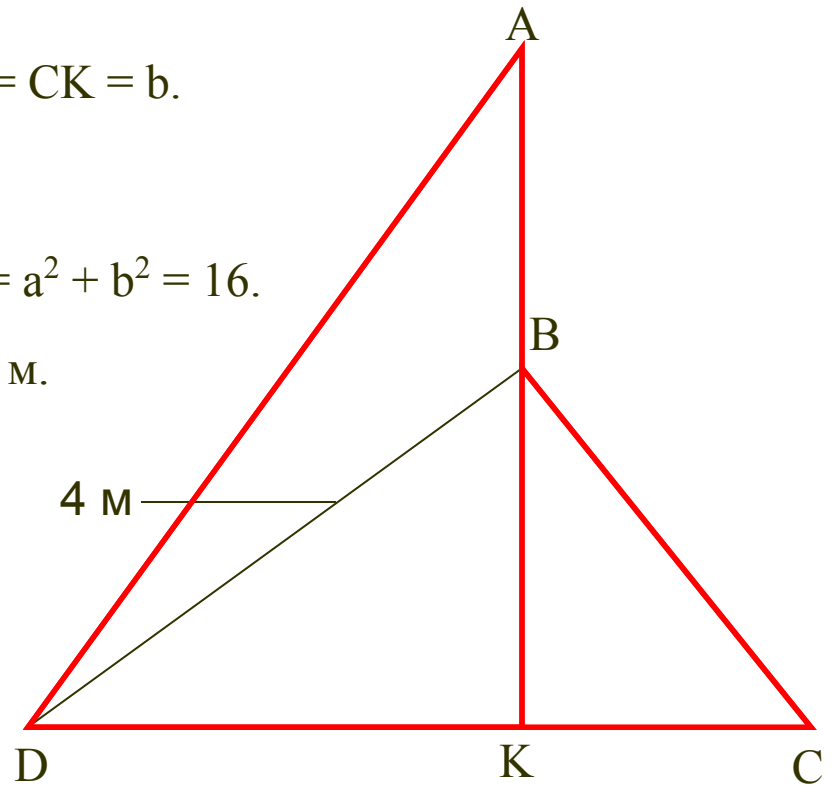
$CD \perp AB$

$AK = DK = a$, $BK = CK = b$.

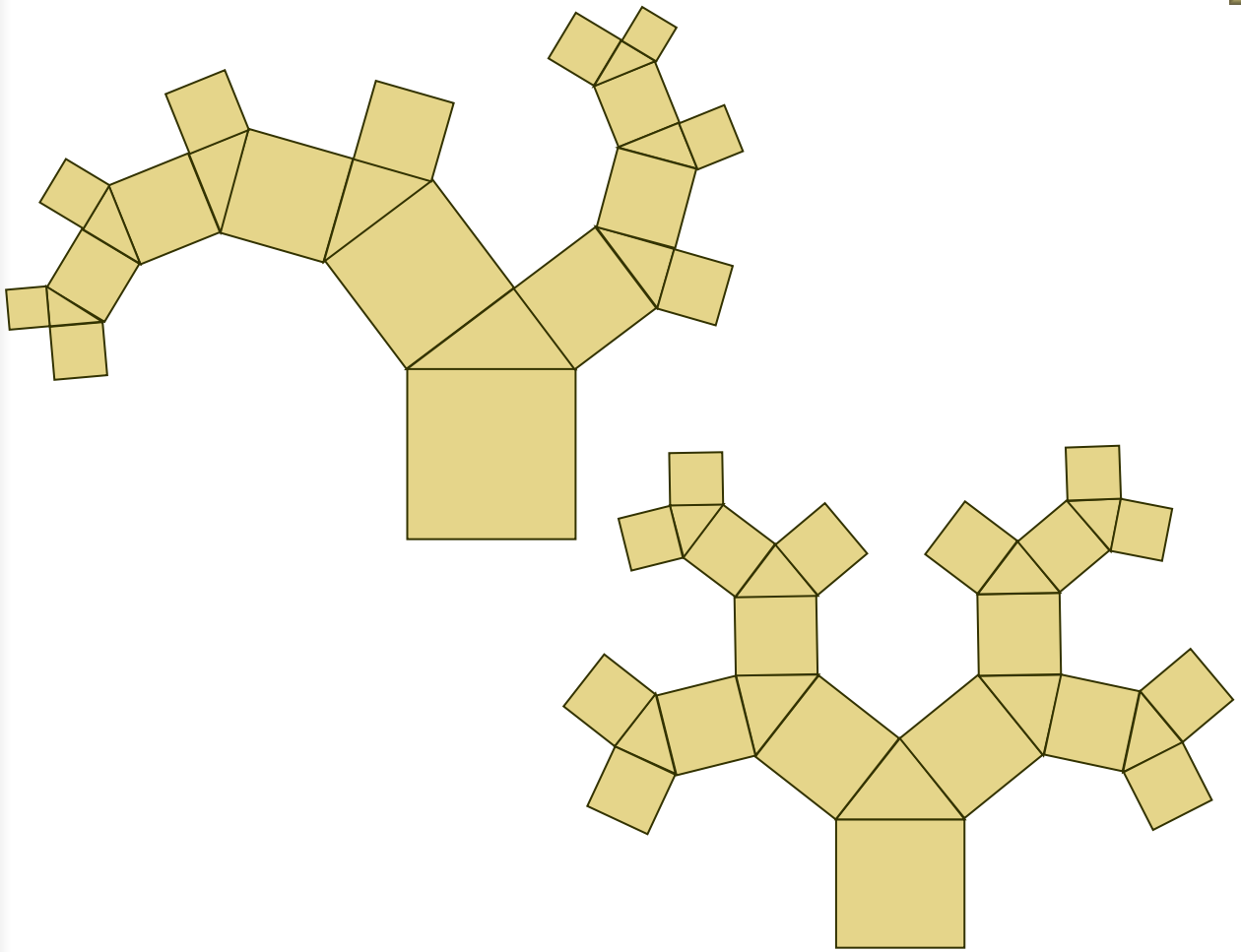
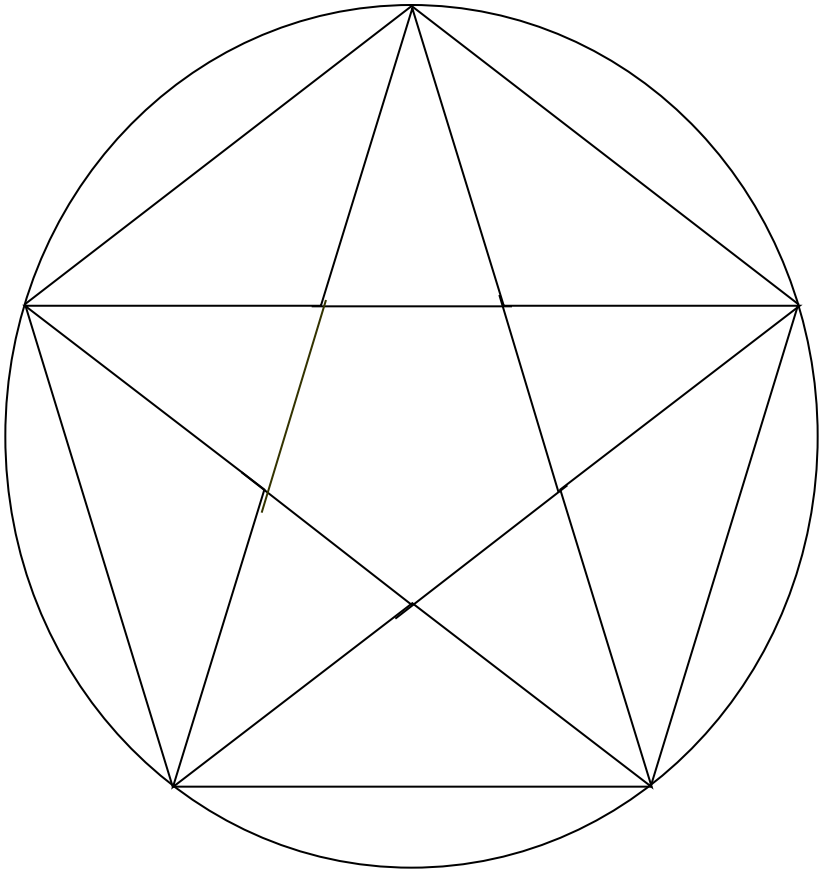
$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

$DB^2 = DK^2 + KB^2 = a^2 + b^2 = 16.$

$$S_{ABCD} = \frac{DB^2}{2} = 8 \text{ м.}$$



Пифагоровы деревья



Пифагорейская звезда