

Теорема Пифагора



VI век до н. э.

Упоминания о теореме Пифагора

Прокл
(математик V в.)



Витрувий
(Римский архитектор
и инженер)

Диоген
(Греческий ученый
III в.)

Плутарх
(Греческий писатель
и моралист I в.)

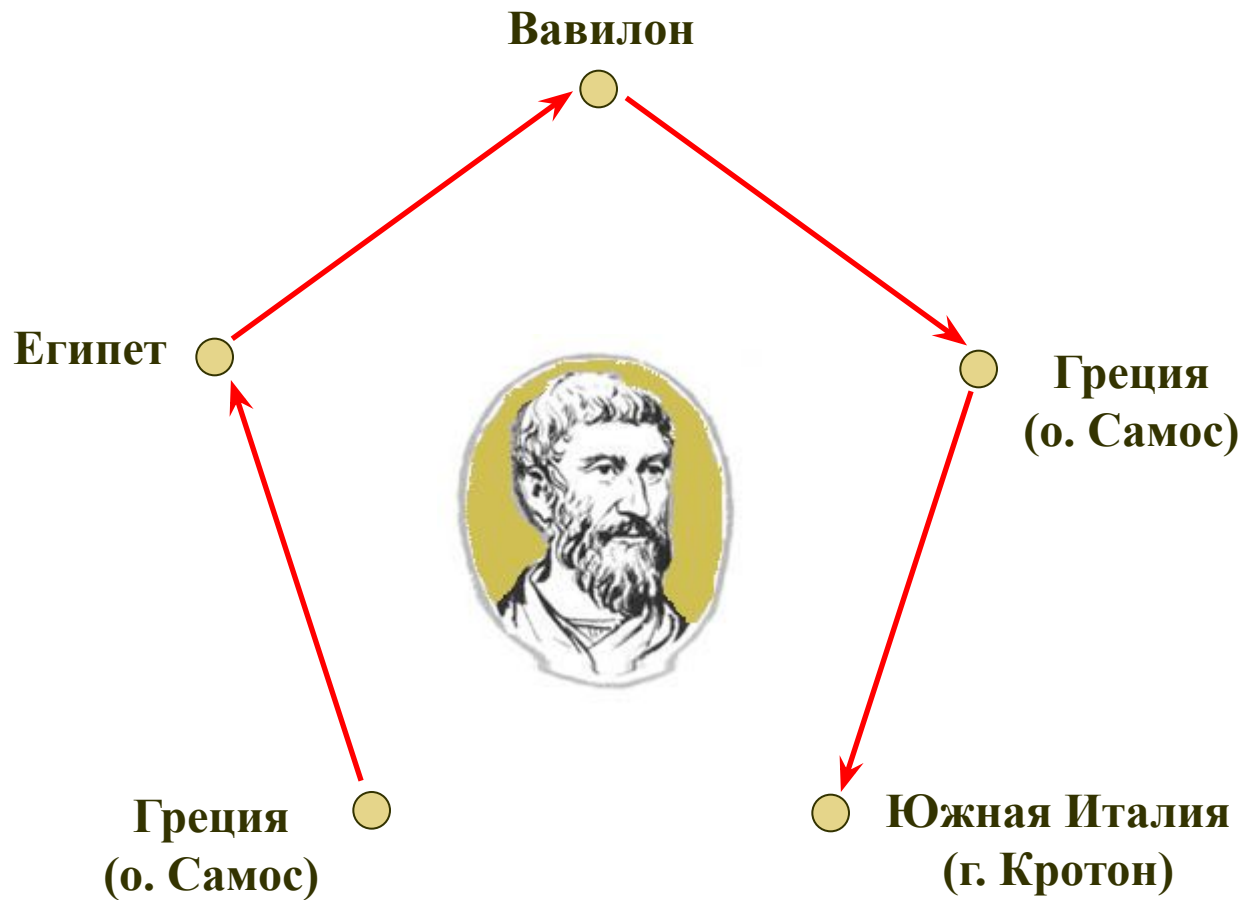


Родина ученого

о. Самос (Греция)



Жизненный путь Пифагора



Заповеди Пифагора, как учителя философии

- Мысль – превыше всего между людьми на земле.
- Не садись на хлебную меру (не живи праздно).
- Уходя, не оглядывайся (перед смертью не цепляйся за жизнь).
- По торной дороге не ходи (следуй не мнениям толпы, а мнениям немногих понимающих).
- Будь с тем, кто ношу взваливает, не будь с тем, кто ношу сваливает (поощряй людей не к праздности, а к добродетели и труду).



Формулировки теоремы

- **Формулировка Евклида:**

В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутый над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол.

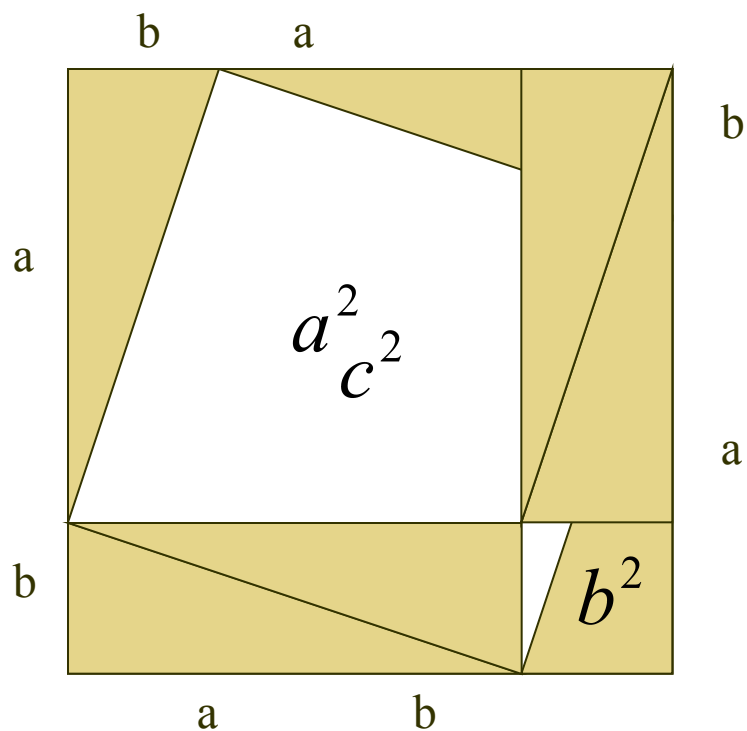
- **В Geometria Culmonensis**

теорема читается так:

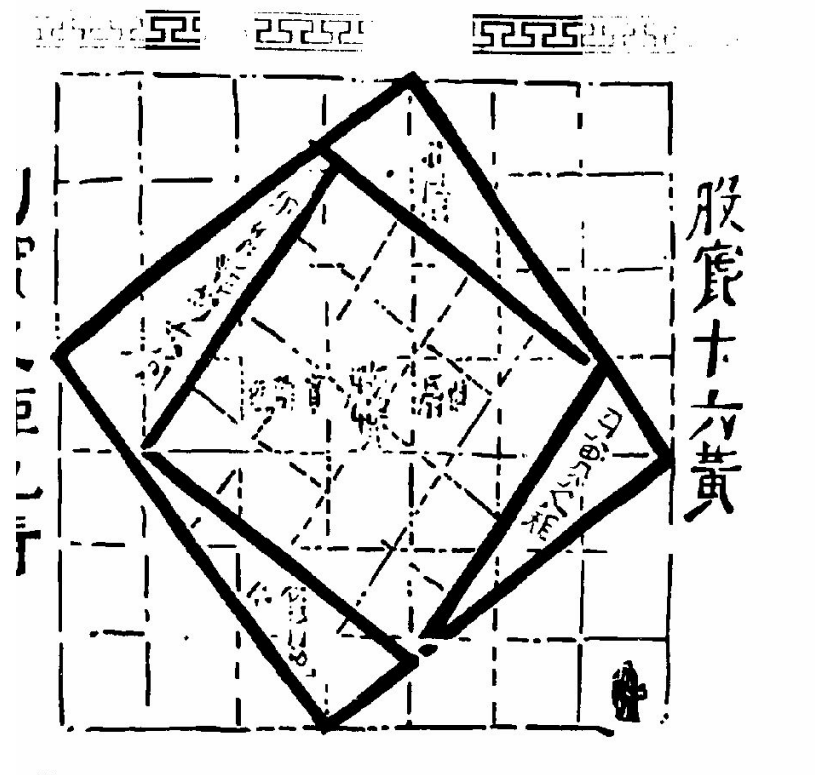
Итак, площадь квадрата, измеренного по длинной стороне, столь же велика, как и у двух квадратов, которые измерены по двум сторонам его, примыкающим к прямому углу.



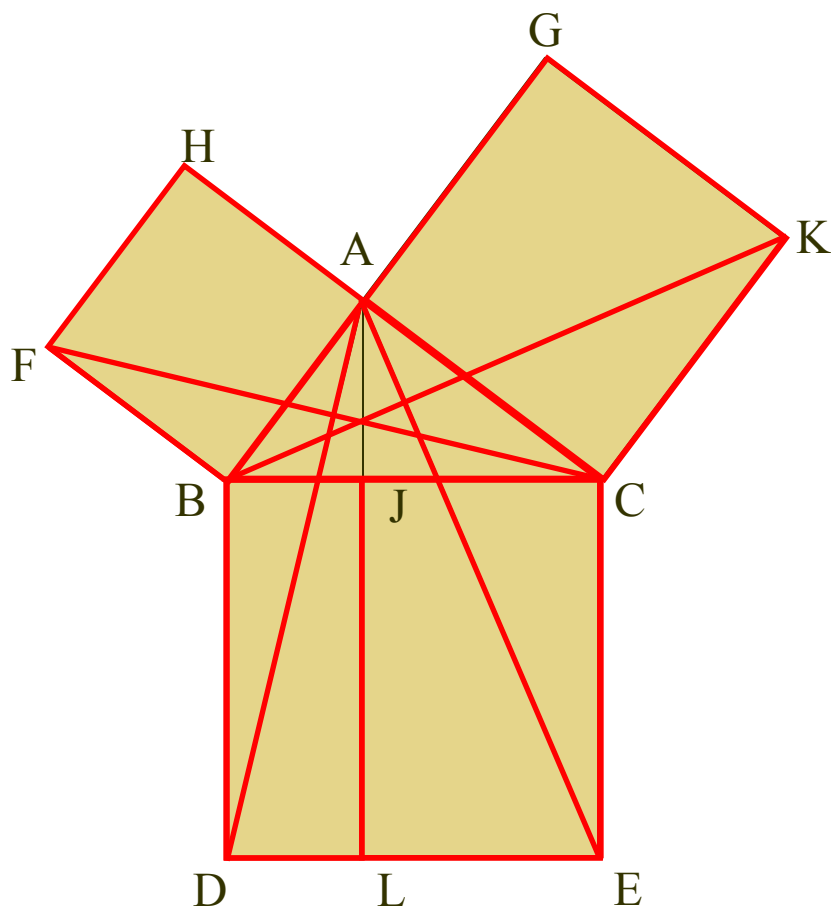
Древнекитайское доказательство



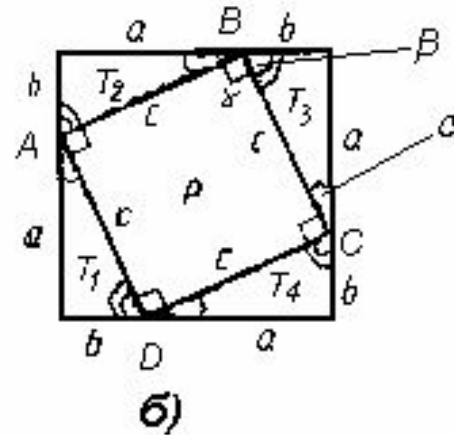
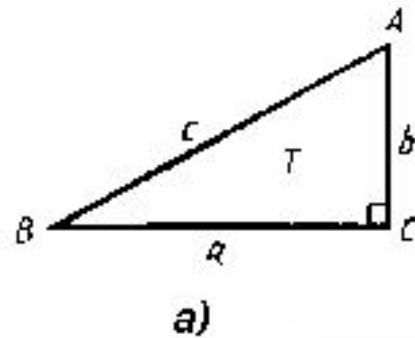
Чертеж из трактата «Чжоу-би»



Доказательство Евклида



Алгебраическое доказательство



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ$$

$$S(Q) = S(P) + 4S(T)$$

$$S(Q) = (a+b)^2; S(P) = c^2 \text{ и } S(T) = 1/2(ab)$$

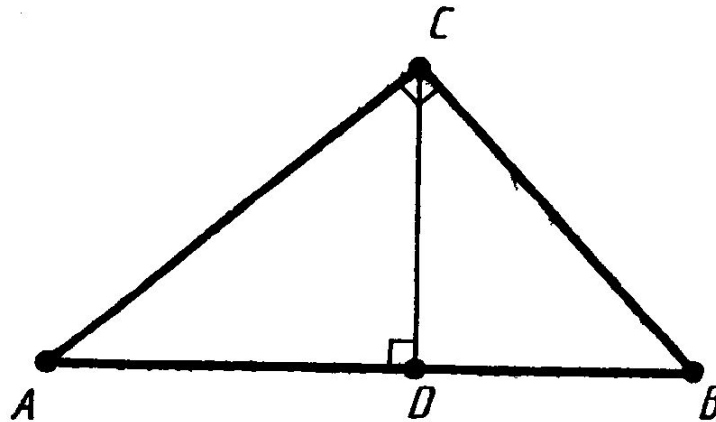
$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot (1/2)ab$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Тригонометрическое доказательство



$CD \perp AB$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC: \cos A = \frac{AC}{AB} \\ \Delta ACD: \cos A = \frac{AD}{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD.$$

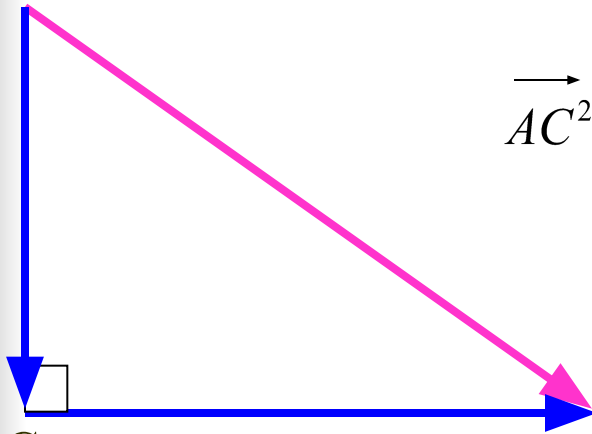
$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC: \cos B = \frac{BC}{AB} \\ \Delta CDB: \cos B = \frac{BD}{CB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BC^2 = AB \cdot BD.$$

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD) \Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2.$$



Векторное доказательство

A



C

$$(\vec{AC} + \vec{CB})^2 = \vec{AB}^2$$

$$\vec{AC}^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{CB} \cdot \cos(a) + \vec{CB}^2 = \vec{AB}^2$$

$$\vec{AC}^2 = |\vec{AC}|^2 = AC^2$$

$$\vec{CB}^2 = |\vec{CB}|^2 = CB^2$$

B

$$2\vec{AC} \cdot \vec{CB} = 2|\vec{AC}| \cdot |\vec{CB}| \cdot \cos(a) = 0$$

$$a = 90^\circ, \cos 90^\circ = 0$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$



Пифагоровы числа

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = \frac{a^2 - 1}{2} \quad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

a	3	5	6	7	9	11	13	15	17	19
b	4	12	8	24	40	60	84	112	144	180
c	5	13	10	25	41	61	85	113	145	181



Задача

$$\angle A = \angle D = 45^\circ$$

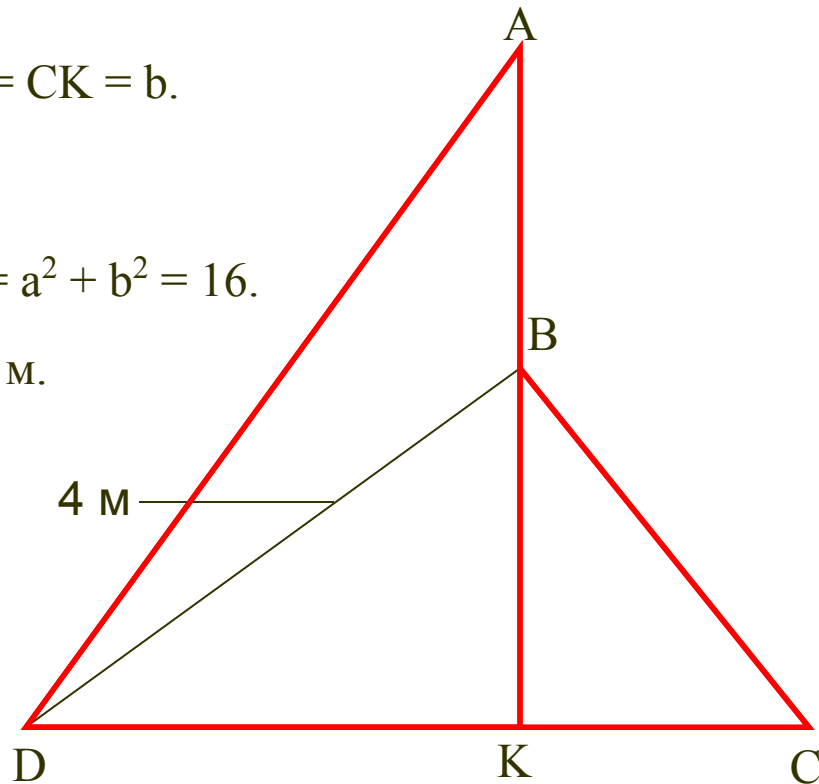
$$CD \perp AB$$

$$AK = DK = a, BK = CK = b.$$

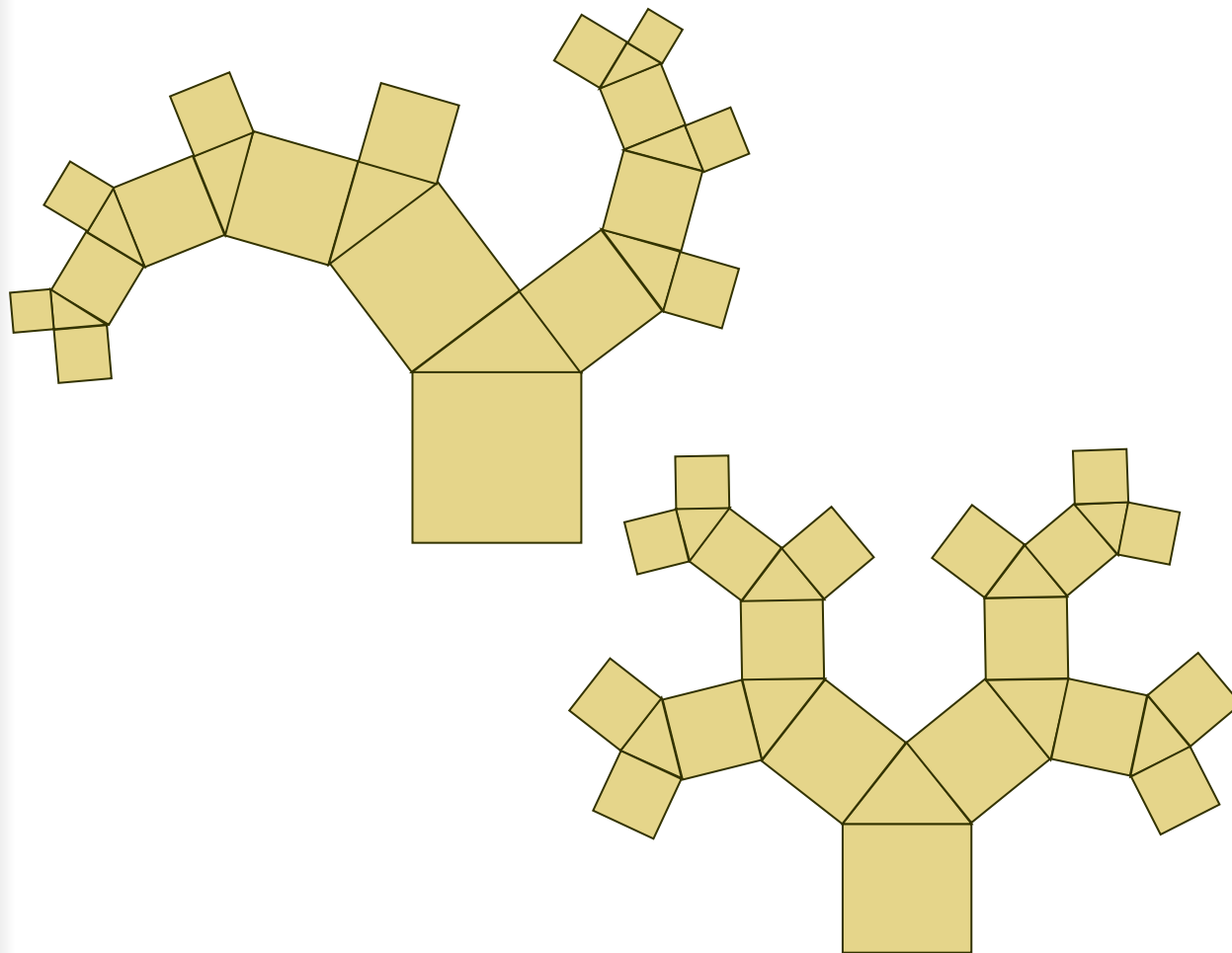
$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

$$DB^2 = DK^2 + KB^2 = a^2 + b^2 = 16.$$

$$S_{ABCD} = \frac{DB^2}{2} = 8 \text{ м.}$$



Пифагоровы деревья



Пифагорейская звезда

