Связь непрерывности и дифференцируемости функций.

Теоремы о производных суммы, произведения и частного, их следствия и обобщения.

Теорема. ***Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.***

- Доказательство. Пусть $\exists$ $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$
- Тогда ,
- $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$
- следовательно, f(x) непрерывна в точке x_0, ч. т. д.
- Таким образом, ***дифференцируемость функции в точке является достаточным условием непрерывности функции в этой точке***, то есть, ***если функция разрывна в точке x_0, то она в ней не дифференцируема***!

- Примеры. 1) Функция f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$ не дифференцируема в точке $x_0 = 1$, так как она не определена в этой точке, следовательно, разрывна.
- 2) Функция f(x) = $\sqrt{x}$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$, так как она в ней разрывна (хоть и определена!).
- Почему дифференцируемость функции в точке не является необходимым условием непрерывности в этой точке?
- [**Функции f(x) = |x| и h(x) =** $\sqrt[3]{x}$
- **непрерывны в нуле, но не дифференцируемы]**

- Теорема. ***Пусть существуют f’(x) и g’(x). Тогда существуют производные их суммы, произведения и частного, причем: 1) (f(x) + g(x))’ = f’(x) + g’(x);***
- ***2) (f(x)·g(x))’ = f’(x)g(x) + g’(x)f(x);***
- ***3)*** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ ***,если g(x) ≠ 0.***

Доказательство по определению:

- Пусть $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ тогда

$$\Delta h(x)=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}=\frac{g(x)\Delta f(x)-f(x)\Delta g(x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

h’(x) = $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h(x)}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(g(x+\Delta x)\cdot g(x)\right)}=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

3) h(x) =

- 1)Найдите: f’(x); f’(±1); значения x | функция не дифференцируема $f(x)=\frac{5x^2+2}{4x}$
- 2) g(x) = (3 + x)(2 – $\sqrt{x}+x^2$). Найдите: g’(x)

3) h(x) = $\frac{ax+b}{cx+d}$. Докажите, что h’(x) = $\frac{C}{P_2(x)}$

- 4) $f(x)=\frac{2x^2\sqrt{x}}{x+1}$. Найдите f’(x). При каких значениях x f’(x) > 0?

- **Домашнее задание**: теорема о связи непрерывности и дифференцируемости; теоремы о вычислении производных (с доказательством); **В.**:1) №409 (1, 2); №414 (2, 4); №416; №431 (1).
- 2) $f(x)=\dfrac{5x-\sqrt{x}}{2x+2}$
- Найдите: f’(x); f’(4); значения х, при которых функция не дифференцируема .