

Учебный проект

Тригонометрические формулы

Тригонометрические формулы

1. Тригонометрические тождества.
2. Формулы сложения.
3. Формулы двойного аргумента.
4. Формулы половинного аргумента.
5. Формулы приведения.
6. Формулы преобразования суммы и разности в произведение.
7. Формулы преобразования произведения в сумму.

Проверь
себя!

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$



Примеры!

$$1) \cos 105^\circ + \cos 75^\circ = 2 \cos \frac{105^\circ + 75^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 75^\circ}{2} = 2 \cos 90^\circ \cos 15^\circ = 0;$$

$$2) \cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} = -2 \sin \frac{\frac{11\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}}{2} = -2 \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} =$$
$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$3) \sin 105^\circ + \sin 165^\circ = 2 \sin \frac{105^\circ + 165^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 165^\circ}{2} = 2 \sin 135^\circ \cos(-30)^\circ =$$
$$= 2 \cdot \sin(180^\circ - 45^\circ) \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$4) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{12} = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}\right)}{\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}} = \frac{\sin \pi}{\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}} = 0.$$



1) Вычислите без таблиц: $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; В) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; Г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Вычислите без таблиц: $\sin 15^\circ - \sin 75^\circ$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; В) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; Г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Вычислите без таблиц: $\cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5}$.

A) 0; Б) $-2 \cos \frac{\pi}{5}$; В) $-2 \sin \frac{\pi}{5}$; Г) $2 \sin \frac{\pi}{5}$.

4) Вычислите без таблиц: $\cos \frac{3\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$.

A) 0; Б) $-2 \cos \frac{\pi}{5}$; В) $-2 \sin \frac{\pi}{10}$; Г) $2 \sin \frac{\pi}{10}$.



Проверь
себя!



$$\sin(a + \beta) = \sin a \cdot \cos \beta + \cos a \cdot \sin \beta$$

$$\sin(a - \beta) = \sin a \cdot \cos \beta - \cos a \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha + \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$$

$$ctg(\alpha - \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha}$$

П
р
и
м
е
р
ы
П
р
и
м

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin 210^\circ &= \sin(180^\circ + 30^\circ) = \sin 180^\circ \cos 30^\circ + \cos 180^\circ \sin 30^\circ = \\ &= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$3) \quad \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 180^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 180^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{0 + 1}{1 - 0 \cdot 1} = 1$$

$$4) \quad \operatorname{ctg} 135^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 90^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 90^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ} = \frac{0 \cdot 1 - 1}{0 + 1} = -1$$



1) Вычислите без таблиц: $\sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) 0; B) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; Г) -1.

2) Вычислите без таблиц: $\cos 15^\circ$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; B) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; Г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Вычислите без таблиц: $\operatorname{tg} 150^\circ$.

A) $\sqrt{3}$; B) 1; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) Вычислите без таблиц: $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}$.

A) $-4 - \sqrt{3}$; B) 0; B) $2 + \sqrt{3}$; Г) $2 - \sqrt{3}$.



Провер
ь
себя!



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

П
р
и
м
е
р
ы
П
р
и
м
е

$$1) \sin 120^{\circ} = \sin(2 \cdot 60^{\circ}) = 2 \cdot \sin 60^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) \cos 240^{\circ} = \cos^2 120^{\circ} - \sin^2 120^{\circ} = (\cos^2 60^{\circ} - \sin^2 60^{\circ})^2 - (2 \sin 60^{\circ} \cos 60^{\circ})^2 =$$
$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$3) \operatorname{tg} 120^{\circ} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} 60^{\circ}}{1 - \operatorname{tg}^2 60^{\circ}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

$$4) \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ то } \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$$



1) Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0.6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

А) 1,92; Б) 0,96; В) -0,96; Г) -1.

2) Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,3$.

А) -0,82; Б) 1; В) 0,82; Г) 1,64.

3) Вычислить $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

А) $-\frac{1}{8\sqrt{3}}$; Б) $\frac{3}{16}$; В) $\frac{3\sqrt{3}}{25}$; Г) $-\frac{\sqrt{3}}{12}$.

4) Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

А) $\frac{3}{4}$; Б) $-\frac{3}{8}$; В) $\frac{4}{3}$; Г) $\frac{2}{3}$.



Проверь
себя!

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$



П
р
и
м
е
р
ы
П
р
и
м
е

$$1) \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$2) 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = 2 \cdot \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} - 1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \text{если } \cos \alpha = 0,6 \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{0,4}{1,6}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$4) \text{если } \cos \alpha = -0,02 \text{ и } 0 < \alpha < \pi, \text{ то } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,02}{2}} = 0,7$$



1) Вычислить $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

А) $\sqrt{0,1}$; Б) $2\sqrt{0,1}$; В) $3\sqrt{0,1}$; Г) $-\sqrt{0,1}$.

2) Вычислить $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

А) $\sqrt{0,1}$; Б) $\frac{\sqrt{0,1}}{2}$; В) $\frac{\sqrt{0,1}}{3}$; Г) $-\sqrt{0,1}$.

3) Вычислить $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

А) $\frac{1}{3}$; Б) $\frac{3}{16}$; В) $\frac{3\sqrt{3}}{25}$; Г) 3.

4) Вычислить $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

А) $\frac{3}{4}$; Б) -3 ; В) $\frac{1}{3}$; Г) $\frac{2}{3}$.





Проверь
себя!

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin a = \pm \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

$$\cos a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

$$tga \cdot ctga = 1$$

$$tga = \frac{1}{ctga}$$

$$1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$ctga = \frac{1}{tga}$$

$$1 + ctg^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

П
р
и
м
е
р
ы
П
л
и
м
е
н

1) Вычислите $\cos a$, если $\sin a = -\frac{2}{5}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

A) $\frac{5}{\sqrt{21}}$; B) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$; B) $-\frac{\sqrt{5}}{21}$; Г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Вычислите tga , если $\sin a = -\frac{2}{5}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Б) $-\frac{2}{\sqrt{21}}$; B) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$; Г) $\frac{2}{\sqrt{21}}$.

3) Вычислите ctga , если $\sin a = -\frac{2}{5}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

A) $\frac{\sqrt{21}}{2}$; Б) $-\frac{2}{\sqrt{21}}$; B) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; Г) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$.

4) Вычислите tga , если $\cos a = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

A) $\frac{4}{3}$; Б) $\frac{3}{4}$; B) $-\frac{4}{3}$; Г) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



1) Доказать, что при $a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $1 + \operatorname{ctg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 a = 1 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a}$$

2) Вычислить $\sin a$, если $\cos a = -\frac{3}{5}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

Воспользуемся формулой $\sin a = \pm \sqrt{1 - \cos^2 a}$

Т.к. $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ – III квадрант, то $\sin a < 0$

$$\sin a = -\sqrt{1 - \cos^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

3) Вычислить ctga , если $\operatorname{tga} = 13$

По формуле $\operatorname{ctga} = \frac{1}{\operatorname{tga}}$ находим:

$$\operatorname{ctga} = \frac{1}{\operatorname{tga}} = \frac{1}{13}$$



$$\sin(a + 2\pi k) = \sin a \quad \cos(a + 2\pi k) = \cos a \quad k \in \mathbb{Z}$$

Проверь
себя!



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \cos a & \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= \cos a \\ \sin(\pi - a) &= \sin a & \sin(\pi + a) &= -\sin a \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) &= -\cos a & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) &= -\cos a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin a & \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= -\sin a \\ \cos(\pi - a) &= -\cos a & \cos(\pi + a) &= -\cos a \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) &= -\sin a & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) &= \sin a \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(a + \pi k) = \operatorname{tga} \quad \operatorname{ctg}(a + \pi k) = \operatorname{ctga} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \operatorname{ctga} & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= -\operatorname{ctga} \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \operatorname{tga} & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= -\operatorname{tga} \end{aligned}$$

П
р
и
м
е
р
ы
П
л
н
н
е
н

1) Вычислите без таблиц $\sin 135^\circ$

A) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; В) $\sqrt{3}$; Г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Вычислите без таблиц $\cos 120^\circ$

A) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; В) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; Г) $-\frac{1}{2}$.

3) Вычислите без таблиц $\sin \frac{7\pi}{6}$

A) $-\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{2}{\sqrt{21}}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$.

4) Вычислите без таблиц $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

A) $\frac{4}{3}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



1) Вычислить $\sin 930^\circ$

$$\sin 930^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 150^\circ) = -\sin 150^\circ = -\sin(180^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

2) Вычислить $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3}$

$$\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg} \left(4\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

3) Вычислить $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$

$$\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

4) Вычислить $\cos \frac{15\pi}{4}$

$$\cos \frac{15\pi}{4} = \cos \left(4\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Провер
ь
себя!



$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

П
р
и
м
е
р
ы
П
л
и
м
е
н

$$1) 4 \cos \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = 2 \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{4\pi}{12} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$2) \text{ Доказать тождество: } 4 \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \sin 3\alpha.$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \cos 2\alpha - \cos \frac{2\pi}{3} = \cos 2\alpha + \frac{1}{2}$$

$$2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin 3\alpha - \sin \alpha$$

$$\sin 3\alpha - \sin \alpha + \sin \alpha = \sin 3\alpha$$

Правая часть равна левой части



1) Представить произведение в виде суммы $\sin 11^\circ \sin 13^\circ$

A) $\frac{\cos 24^\circ + \cos 2^\circ}{2}$; B) $\frac{\cos 2^\circ - \cos 24^\circ}{2}$; B) 0; Г) $\frac{2}{\cos 24^\circ + 1}$.

2) Представить произведение в виде суммы $\cos 15^\circ \cos 3^\circ$

A) 0; B) $\frac{\cos 12^\circ - \cos 18^\circ}{2}$; B) $\frac{\sin 12^\circ + 1}{2}$; Г) $\frac{\cos 18^\circ + \cos 12^\circ}{2}$.

3) Представить произведение в виде суммы

$$\cos(a - \beta) \cos(a + \beta)$$

A) $\frac{\cos 2a + \cos 2\beta}{2}$; B) $\frac{\cos 2a - \cos 2\beta}{2}$; B) 0; Г) $\frac{\cos 2a - \sin \beta}{2}$.

4) Представить произведение в виде суммы

$$\cos(a + \beta) \sin(a - \beta)$$

A) $\frac{\sin 2a + \sin 2\beta}{2}$; B) 0; B) $\frac{\sin 2a - \sin 2\beta}{2}$; Г) $\frac{1 - \sin 2\beta}{2}$.

