Теория майорановского фермиона

Постановка задачи

Дано фермионное поле ψ с лагранжианом

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi_{;\mu} - \frac{m}{2}(\bar{\psi^C}\psi + \bar{\psi}\psi^C),$$

где ψ^c - зарядово сопряженное поле.

- Показать, что лагранжиан лоренц-инвариантен.
- Найти общее решение уравнений поля.
- Получить выражения для вектора энергии-импульса, вектора спина.
- Проквантовать это поле.
- Рассмотреть теорию в пределе высоких энергий.

Лоренц инвариантность

- **Пример: доказательство инвариантности относительно преобразований из собственной группы Лоренца(повороты системы отсчета).**

При преобразованиях из полной группы Пуанкаре координаты преобразуются следующим образом:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}.$$

При этом функции поля преобразуется так:

$$\psi'(x') = \Lambda\psi(x), \tag{5}$$

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}, \tag{6}$$

Матрицы L и Λ удовлетворяют:

$$\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda = L^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu},$$

$$\Lambda\gamma^{\mu}\Lambda^{-1} = (L^{-1})^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}.$$

При этом оператор ∂_{ν} преобразуется так:

$$\partial'_{\mu} = (L^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu} \tag{7}$$

3.2 Инвариантность при поворотах системы отсчета

При поворотах системы отсчета матричные операторы Λ и Λ^{-1} имеют вид:

$$\Lambda^{lk} = \exp\left(\frac{1}{2}[\gamma^l, \gamma^k]\varphi\right), \tag{8}$$

$$(\Lambda^{-1})^{lk} = \exp\left(-\frac{1}{2}[\gamma^l, \gamma^k]\varphi\right).$$

Покажем отдельно, что каждое слагаемое в лагранжиане (1) преобразуется как скаляр. Рассмотрим первое слагаемое. Требуется показать, что

$$i\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x). \tag{9}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') &= i\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda\partial'_\mu\psi(x) = \\ &= i\bar{\psi}(x)L^\mu{}_\nu\gamma^\nu(L^{-1})^\eta{}_\mu\partial_\eta\psi(x) = i\bar{\psi}(x)\delta^\eta{}_\nu\gamma^\nu\partial_\eta\psi(x) = \\ &= i\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\partial_\nu\psi(x). \end{aligned}$$

Требование (9) удовлетворяется.

Рассмотрим теперь второе слагаемое. Требуется показать, что:

$$\bar{\psi}^{C\prime}(x')\psi'(x') = \bar{\psi}^C(x)\psi(x) \tag{10}$$

Выполним преобразования:

$$\bar{\psi}^{C\prime}(x')\psi'(x') = \overset{T}{\psi}{}'(x')\gamma^2\gamma^0\psi = (\Lambda\psi(x))^T\gamma^2\gamma^0\Lambda\psi(x) = \overset{T}{\psi}(x)\overset{T}{\Lambda}\gamma^2\gamma^0\Lambda\psi(x).$$

Отсюда следует, что требование (10) эквивалентно требованию:

$$\overset{T}{\Lambda}\gamma^2\gamma^0\Lambda = \gamma^2\gamma^0, \tag{11}$$

что, в свою очередь, эквивалентно:

$$\gamma^2\gamma^0\overset{T}{\Lambda}\gamma^2\gamma^0 = \Lambda^{-1}. \tag{12}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} &\gamma^2\gamma^0\overset{T}{\Lambda}(\gamma^k\gamma^l)\gamma^2\gamma^0 = \\ &= (-C^{-1})\overset{T}{\Lambda}(\gamma^k\gamma^l)(-C) = C^{-1}\overset{T}{\Lambda}(\gamma^k\gamma^l)C = C^{-1}\Lambda(\overset{T}{\gamma}{}^l\overset{T}{\gamma}{}^k)C = \Lambda(C^{-1}\overset{T}{\gamma}{}^l\overset{T}{\gamma}{}^k C) = \\ &= \Lambda(C^{-1}\overset{T}{\gamma}{}^l C C^{-1}\overset{T}{\gamma}{}^k C) = \Lambda(\gamma^l\gamma^k) = \Lambda([\gamma^l\gamma^k]) = \Lambda(-[\gamma^k\gamma^l]) = \\ &= \Lambda^{-1}(\gamma^k\gamma^l). \end{aligned}$$

Требование (12) удовлетворяется, значит, удовлетворяется и требование (10).

Аналогично доказывается, что $\bar{\psi}'(x')\psi^{C\prime}(x') = \bar{\psi}(x)\psi^C(x)$

Таким образом, лоренц-инвариантность лагранжиана при преобразованиях поворотов системы отсчета доказана.

Решение уравнения поля

уравнение движения:

$$i\bar{\sigma}^{\mu}\psi_{L;\mu} - m\sigma^2\psi_L^* = 0.$$

решение

$$\psi_L(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\Big[a(\vec{p})\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-(\vec{p})e^{-ipx} - a^*(\vec{p})\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p})e^{ipx} +$$

$$+ b(\vec{p})\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p})e^{-ipx} + b^*(\vec{p})\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-(\vec{p})e^{ipx}\Big]d\vec{p}$$

Интегралы движения

Пользуясь теоремой Нётер, запишем тензор энергии-импульса:

$$T^{kl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{;k}} \psi^{;l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{\dagger}{}_{;k}} \psi^{\dagger;l} - g^{lk} \mathcal{L}.$$

Вектор энергии-импульса

$$P^l = \int T^{0l} d\vec{x}$$

$$P^l = \int d\vec{p} p^l [a^* a \frac{E+p}{2E} + b^* b \frac{E-p}{2E} - a a^* \frac{E-p}{2E} - b b^* \frac{E+p}{2E}] \, .$$

Теорема Нётер дает выражение для тензора спинового момента:

$$S^{k,lm} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} u_j(x) A_i^{j,lm}, \qquad A^{\psi,lm} = -\frac{i}{2} \sigma^{lm},$$

проекция спина

$$S_3 = \int d\vec{x} S^{0,21} \qquad \Rightarrow \qquad S_3 = \frac{1}{2} \int d\vec{p} [a a^* \frac{E-p}{2E} - b b^* \frac{E+p}{2E} - a^* a \frac{E+p}{2E} + b^* b \frac{E-p}{2E}].$$

Квантованное поле

вектор энергии-импульса:

$$P^l = \int d\vec{p} p^l [a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})],$$

проекцию спина на направление движения:

$$S_3 = \frac{1}{2} \int d\vec{p} [-a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})]$$

Отсюда следует, что $a^\dagger, a$ суть операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом p массой $m^2 = p^2$ и проекцией спина на направление движения $-\frac{1}{2}$; $b^\dagger, b$ суть операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом p массой $m^2 = p^2$ и проекцией спина на направление движения $\frac{1}{2}$.

Ультрарелятивистский предел

При $E \gg m$ после совершения предельного перехода функция поля (14) принимает вид:

$$\psi_L(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int [a\xi_- e^{-ipx} + b^\dagger \xi_- e^{ipx}] d\vec{p}.$$

При этом операторы поля $b^\dagger, b$ переходят в операторы рождения и уничтожения правого антинейтрино, $a^\dagger, a$ левого нейтрино. Таким образом, теория безмассового нейтрино восстанавливается.