


Теория  
майорановского  
фермиона



# Постановка задачи

Дано фермионное поле  $\psi$  с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_{;\mu} - \frac{m}{2}(\bar{\psi}^C\psi + \bar{\psi}\psi^C),$$

где  $\psi^c$  - зарядово сопряженное поле.

- Показать, что лагранжиан лоренц-инвариантен.
- Найти общее решение уравнений поля.
- Получить выражения для вектора энергии-импульса, вектора спина.
- Проквантовать это поле.
- Рассмотреть теорию в пределе высоких энергий.

# Лоренц инвариантность

- **Пример: доказательство инвариантности относительно преобразований из собственной группы Лоренца(повороты системы отсчета).**

При преобразованиях из полной группы Пуанкаре координаты преобразуются следующим образом:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

При этом функции поля преобразуется так:

$$\psi'(x') = \Lambda \psi(x), \quad (5)$$

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \Lambda^{-1}, \quad (6)$$

Матрицы  $L$  и  $\Lambda$  удовлетворяют:

$$\Lambda^{-1} \gamma^{\mu} \Lambda = L^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu},$$

$$\Lambda \gamma^{\mu} \Lambda^{-1} = (L^{-1})^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}.$$

При этом оператор  $\partial_{\nu}$  преобразуется так:

$$\partial'_{\mu} = (L^{-1})^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} \quad (7)$$

### 3.2 Инвариантность при поворотах системы отсчета

При поворотах системы отсчета матричные операторы  $\Lambda$  и  $\Lambda^{-1}$  имеют вид:

$$\Lambda^{lk} = \exp\left(\frac{1}{2}[\gamma^l, \gamma^k]\varphi\right), \quad (8)$$

$$(\Lambda^{-1})^{lk} = \exp\left(-\frac{1}{2}[\gamma^l, \gamma^k]\varphi\right).$$

Покажем отдельно, что каждое слагаемое в лагранжиане (1) преобразуется как скаляр. Рассмотрим первое слагаемое. Требуется показать, что

$$i\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x). \quad (9)$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') &= i\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda\partial'_\mu\psi(x) = \\ &= i\bar{\psi}(x)L^\mu{}_\nu\gamma^\nu(L^{-1})^\eta{}_\mu\partial_\eta\psi(x) = i\bar{\psi}(x)\delta^\eta{}_\nu\gamma^\nu\partial_\eta\psi(x) = \\ &= i\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\partial_\nu\psi(x). \end{aligned}$$

Требование (9) удовлетворяется.

Рассмотрим теперь второе слагаемое. Требуется показать, что:

$$\bar{\psi}^{C'}(x')\psi'(x') = \bar{\psi}^C(x)\psi(x) \quad (10)$$

Выполним преобразования:

$$\bar{\psi}^{C'}(x')\psi'(x') = \bar{\psi}'(x')\gamma^2\gamma^0\psi = (\Lambda\psi(x))^T\gamma^2\gamma^0\Lambda\psi(x) = \bar{\psi}(x)\overset{T}{\Lambda}\gamma^2\gamma^0\Lambda\psi(x).$$

Отсюда следует, что требование (10) эквивалентно требованию:

$$\overset{T}{\Lambda}\gamma^2\gamma^0\Lambda = \gamma^2\gamma^0, \quad (11)$$

что, в свою очередь, эквивалентно:

$$\gamma^2\gamma^0\overset{T}{\Lambda}\gamma^2\gamma^0 = \Lambda^{-1}. \quad (12)$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \gamma^2\gamma^0\overset{T}{\Lambda}(\gamma^k\gamma^l)\gamma^2\gamma^0 &= \\ &= (-C^{-1})\overset{T}{\Lambda}(\gamma^k\gamma^l)(-C) = C^{-1}\overset{T}{\Lambda}(\gamma^k\gamma^l)C = C^{-1}\overset{T}{\Lambda}(\overset{T}{\gamma^l}\overset{T}{\gamma^k})C = \overset{T}{\Lambda}(C^{-1}\overset{T}{\gamma^l}\overset{T}{\gamma^k}C) = \\ &= \overset{T}{\Lambda}(C^{-1}\overset{T}{\gamma^l}CC^{-1}\overset{T}{\gamma^k}C) = \overset{T}{\Lambda}(\overset{T}{\gamma^l}\overset{T}{\gamma^k}) = \overset{T}{\Lambda}([\overset{T}{\gamma^l}\overset{T}{\gamma^k}]) = \overset{T}{\Lambda}(-[\overset{T}{\gamma^k}\overset{T}{\gamma^l}]) = \\ &= \Lambda^{-1}(\gamma^k\gamma^l). \end{aligned}$$

Требование (12) удовлетворяется, значит, удовлетворяется и требование (10).

Аналогично доказывается, что  $\bar{\psi}'(x')\psi^{C'}(x') = \bar{\psi}(x)\psi^C(x)$

Таким образом, лоренц-инвариантность лагранжиана при преобразованиях поворотов системы отсчета доказана.

# Решение уравнения поля

уравнение движения:

$$i\bar{\sigma}^\mu \psi_{L;\mu} - m\sigma^2 \psi_L^* = 0.$$

решение

$$\begin{aligned} \psi_L(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int & [a(\vec{p}) \sqrt{\frac{E+p}{2E}} \xi_{-}(\vec{p}) e^{-ipx} - a^*(\vec{p}) \sqrt{\frac{E-p}{2E}} \xi_{+}(\vec{p}) e^{ipx} + \\ & + b(\vec{p}) \sqrt{\frac{E-p}{2E}} \xi_{+}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^*(\vec{p}) \sqrt{\frac{E+p}{2E}} \xi_{-}(\vec{p}) e^{ipx}] d\vec{p} \end{aligned}$$

# Интегралы движения

Пользуясь теоремой Нётер, запишем тензор энергии-импульса:

$$T^{kl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{;k}} \psi^{;l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{\dagger}_{;k}} \psi^{\dagger;l} - g^{lk} \mathcal{L}.$$

Вектор энергии-импульса

$$P^l = \int T^{0l} d\vec{x}$$

$$P^l = \int d\vec{p} p^l \left[ a^* a \frac{E+p}{2E} + b^* b \frac{E-p}{2E} - a a^* \frac{E-p}{2E} - b b^* \frac{E+p}{2E} \right].$$

Теорема Нётер дает выражение для тензора спинового момента:

$$S^{k,lm} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} u_j(x) A_i^{j,lm}, \quad A^{\psi,lm} = -\frac{i}{2} \sigma^{lm},$$

проекция спина

$$S_3 = \int d\vec{x} S^{0,21} \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{1}{2} \int d\vec{p} \left[ a a^* \frac{E-p}{2E} - b b^* \frac{E+p}{2E} - a^* a \frac{E+p}{2E} + b^* b \frac{E-p}{2E} \right].$$

# Квантованное поле

вектор энергии-импульса:

$$P^l = \int d\vec{p} p^l [a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})],$$

проекцию спина на направление движения:

$$S_3 = \frac{1}{2} \int d\vec{p} [-a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})]$$

Отсюда следует, что  $a^\dagger, a$  суть операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом  $p$  массой  $m^2 = p^2$  и проекцией спина на направление движения  $-\frac{1}{2}$ ;  $b^\dagger, b$  суть операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом  $p$  массой  $m^2 = p^2$  и проекцией спина на направление движения  $\frac{1}{2}$ .

# Ультрарелятивистский предел

При  $E \gg m$  после совершения предельного перехода функция поля (14) принимает вид:

$$\psi_L(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int [a \xi_- e^{-ipx} + b^\dagger \xi_- e^{ipx}] d\vec{p}.$$

При этом операторы поля  $b^\dagger, b$  переходят в операторы рождения и уничтожения правого антинейтрино,  $a^\dagger, a$  левого нейтрино. Таким образом, теория безмассового нейтрино восстанавливается.