Иррациональные неравенства

Теорема 1

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}, n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > f(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases}$$

Теорема 2

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}, n \in N \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Теорема 3

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}$$

Теорема 4

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), n \in N \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x)$$

Теорема 5

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x), n \in N \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 6

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x), n \in N \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x)$$

Пример 1

$$\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2+12x+11} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(2-x) \geq 0 \\ 4x^2+12x+11 > (x-3)(2-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 5x^2+7x+17 > 0 \end{cases} \begin{cases} x \in [2;3] \\ x \in (-\infty;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [2;3]$$

Пример 2

$$\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \\ (x+2)(x-5) < (8-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 8 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \\ 13x < 74 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty;8) \\ x \in (-\infty;-2) \cup (5;+\infty) \\ x \in (-\infty;5\frac{9}{13}) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty;-2\right] \cup \left[5;5\frac{9}{13}\right)$$

Пример 3

$$\sqrt{x^2-3x+2} > x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2-3x+2 > (x+3)^2 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 < 0 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -\frac{7}{9} \\ x \geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3 \\ x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty) \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \in \left[-3;-\frac{7}{9}\right) \\ x \in (-\infty;-3) \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left(-\infty;-\frac{7}{9}\right)$$

Пример 4

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \\ x+6 > x+7+2\sqrt{(x+7)(2x-5)} + 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2{,}5 \\ \sqrt{(x+70(2x-5)} < 2-x \end{cases} \begin{cases} x \geq 2{,}5 \\ 2-x \geq 0 \\ (x+7)(2x-5) \geq 0 \\ 9x+7)(2x-5) < (2-x)^2 \end{cases}$$

Из этого следует - неравенство не имеет решений.

Примеры для самостоятельного решения

1 $\sqrt{2-\sqrt{x+3}} < \sqrt{x+4}$

$$x \in \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]$$

2 $\sqrt{4-x^2} + x + 1 > 0$

$$x \in \left(-\frac{\sqrt{7}+1}{2}; 2 \right]$$

Примеры для самостоятельного решения

3 $\sqrt{x^2-5x+6} \le x+4$

$x \in \left[-\frac{10}{13};2\right] \cup [3;+\infty)$

4 $\sqrt{\frac{9}{x^2-3}} > 1+\frac{3}{x}$

$x \in \left[-\sqrt{3};0\right)$

5 $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}} \le x+1$

$x \in \{0\} \cup [2;+\infty)$