

Иррациональные неравенства



Теорема 1

$$\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > f(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases}$$

Теорема 2

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}, n \in N \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Теорема 3

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}$$

Теорема 4

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), n \in N \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x)$$

Теорема 5

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x), n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{array} \right. \end{cases}$$

Теорема 6

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} > g(x), n \in N \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x)$$

Пример 1

$$\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2 + 12x + 11} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(2-x) \geq 0 \\ 4x^2 + 12x + 11 > (x-3)(2-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 5x^2 + 7x + 17 > 0 \end{cases} \begin{cases} x \in [2;3] \\ x \in (-\infty; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [2;3]$$

Пример 2

$$\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \\ (x+2)(x-5) < (8-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 8 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \\ 13x < 74 \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 8) \\ x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty) \Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[5; 5\frac{9}{13}\right) \\ x \in \left(-\infty; 5\frac{9}{13}\right) \end{cases}$$

Пример 3

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > (x + 3)^2 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -\frac{7}{9} \\ x \geq -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left[-3; -\frac{7}{9}\right) \\ x \in (-\infty; -3) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{7}{9}\right)$$
$$\begin{cases} x < -3 \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases}$$

Пример 4

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \\ x+6 > x+7 + 2\sqrt{(x+7)(2x-5)} + 2x-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2,5 \\ \sqrt{(x+7)(2x-5)} < 2-x \end{cases} \begin{cases} x \geq 2,5 \\ 2-x \geq 0 \\ (x+7)(2x-5) \geq 0 \\ 9(x+7)(2x-5) < (2-x)^2 \end{cases}$$

Из этого следует - неравенство не имеет решений.

Примеры для самостоятельного решения

1 $\sqrt{2 - \sqrt{x + 3}} < \sqrt{x + 4}$

$$x \in \left(-\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

2 $\sqrt{4 - x^2} + x + 1 > 0$

$$x \in \left(-\frac{\sqrt{7} + 1}{2}; 2 \right]$$

Примеры для самостоятельного решения

3 $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq x + 4$

$$x \in \left[-\frac{10}{13}; 2\right] \cup [3; +\infty)$$

4 $\sqrt{\frac{9}{x^2 - 3}} > 1 + \frac{3}{x}$

$$x \in [-\sqrt{3}; 0)$$

5 $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} \leq x + 1$

$$x \in \{0\} \cup [2; +\infty)$$