Презентация по теме: «Действительные числа».

Выполнила: учитель математики
ГОУ СОШ № 457 Ж.Ю. Магаз

Санкт-Петербург
2010

Числовые множества.

Обозначение	Название множества
N	Множество натуральных чисел
Z	Множество целых чисел
$\underline{Q}$	Множество рациональных чисел
Q	Множество иррациональных чисел
R	Множество вещественных чисел

Множество натуральных чисел.

- Натуральные числа - это числа счета. N={1,2,…n,…}.
- Заметим, что множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения, т.е. сложение и умножение выполняются всегда, а вычитание и деление в общем случае не выполняются

$$\forall n, m \in N \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} n+m \\ n \cdot m \end{matrix} \right. \in N$$

Множество целых чисел.

- Введем в рассмотрение новые числа:
  1) число 0 (ноль),
  2) число (-n), противоположное натуральному n.

При этом полагаем: n+(-n)=(-n)+n=0,
-(-n)=n.

Тогда множество целых чисел можно записать так:

Z ={…,-n,…-2,-1,0,1,2,…,n,…}.

Заметим также, что: $N \subset Z$

Это множество замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, т.е.

$$\forall n, m \in Z \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n+m. \\ n*m, \in Z \\ n-m \end{array}\right.$$

Из множества целых чисел выделим два подмножества:

1) множество четных чисел $\{2*k \mid k \in Z\}$
2) множество несетных чисел $\{2*k+1 \mid k \in Z\}$

Деление с остатком.

В общем случае действие деления в множестве целых чисел не выполняется, но известно, что деление с остатком можно выполнить всегда, кроме деления на 0.

Определение деления с остатком.

Говорят, что целое число m делится на целое число n с остатком, если найдутся два числа q и p, такие что: (*)

$$m=nq+r, \text{ где } 0\le r<|n|$$

(q – частное, r – остаток)

Хорошо известен алгоритм деления с остатком.

Замечание: если r=0, то будем говорить, что m делится нацело на n.

ПРИМЕРЫ:

- Разделить с остатком m на n.

1). m=190, n=3

$$\begin{array}{r|l} 190 & 3 \\ \cline{2-2} 18 & 6 \\ & 3 \\ \cline{1-1} 10 & \\ 9 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

q=63, r=1, 1<3

Проверка:

190=3*63+1

2). m=13, n=5

Подберем q и формуле (*):

13=5q+r

=>q=2, r=3 (3<5)

13=4*(-4)+1

3). m=-15, n=4

По формуле (*):

-15=4q+r

=> q=-4, r=1

-15=4*(-4)+1

4). M=6, n=13

По формуле(*):

6=13q+r

=>q=0, r=6

6=13*0+6

Множество рациональных чисел.

- Множество рациональных чисел можно представить в виде:

$$Q = \{\frac{m}{n} m \in Z, n \in Z\}$$

В частности, $\frac{m}{1} = m \in Z$ Таким образом, $Z \subset Q$

Множество рациональных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления (кроме случая деления на 0).

$$\forall p, q \in Q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p+q, \\ p*q, \\ p-q, \\ \frac{p}{q}, q \neq 0 \end{array} \right. \in Q$$

- Но в множестве рациональных чисел нельзя, например, измерить гипотенузу прямоугольного треугольника с катетам $a = 1, b = 1$.

По теореме Пифагора гипотенуза будет равна $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.Но число $\sqrt{2}$ не будет рациональным, так как $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$ ни для каких m и n.

- Нельзя решить уравнение $x^2 - 2 = 0$.
- Нельзя измерить длину окружности и т.д.

Заметим, что всякое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

$$\frac{1}{8} = \frac{5^3}{2^3 * 5^3} = 0.125; \frac{2}{7} = 0.(285714); \frac{1}{3} = 0.(3)$$

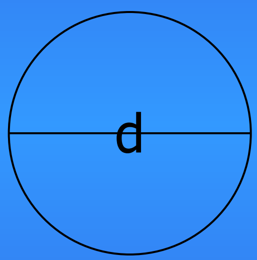
Множество иррациональных чисел.

Числа, которые представляются бесконечной непериодической дробью, будем называть иррациональными. Множество иррациональных чисел обозначим $\overline{Q}$

Для иррациональных чисел нет единой формы обозначения. Отметим два иррациональных числа, которые обозначаются буквами – это числа π и е.

Число «пи» π

- Отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная, равная числу π



$$\pi = \frac{1}{d} \Rightarrow \iota = 2\pi r$$

$$\iota - длина$$

Число e.

- Если рассмотреть числовую последовательность:

$2, (\frac{2}{3})^2, (\frac{4}{3})^3, (\frac{5}{4})^4, \ldots, (1+\frac{1}{n})^n, \ldots$ с общим членом последовательности $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$, то с

ростом п значения x_n будут возрастать, но никогда не будет больше 3. Это означает, что последовательность ограничена. Такая последовательность имеет предел, который равен числу e.

$$e = \lim(1+\frac{1}{n})^n = 2,8$$

Известно, что мощность иррациональных чисел больше мощности рациональных, т.е. Иррациональных чисел «больше», чем рациональных. Кроме того, как бы ни были близки два рациональных числа, между ними всегда есть иррациональное, т.е.

$$\forall p,q \in Q, \exists r \in \overline{Q} : p < r < q$$

Примеры иррациональных чисел:

$\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{7}$ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

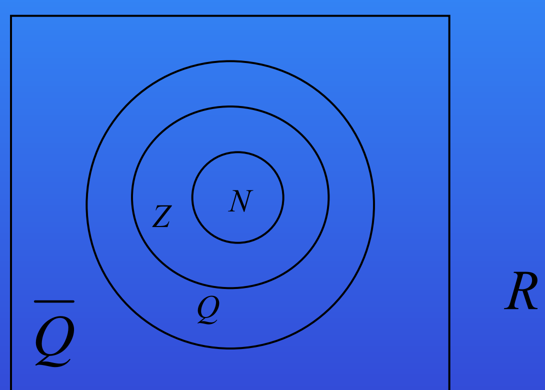
(золотое сечение) и т.д.

Множество вещественных (действительных) чисел.

- Множество вещественных чисел – это объединение множества рациональных чисел.

$$R = Q \cup \overline{Q}$$

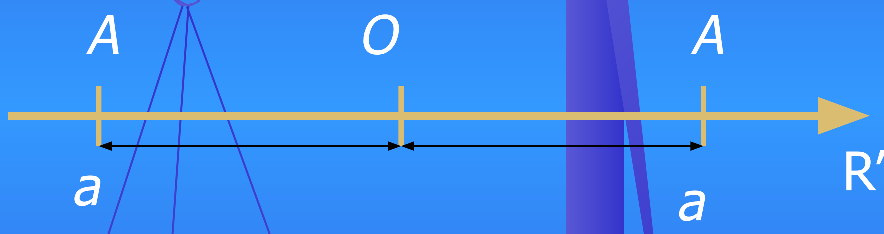
- Вывод: $N \subset Z \subset Q \subset R$ (см. рис. 1)



Определение модуля вещественного числа

- 1) Пусть на числовой оси точка *A* имеет координату *a*. Расстояние от точки начала отсчета *O* до точки *A* называется модулем вещественного числа *a* и обозначается $|a|$.

$$\boxed{|a| = |OA|}$$



- 2) Раскрытие модуля происходит по правилу:

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

- Например:

$$|2{,}5| = 2{,}5 \qquad \left|-3\frac{1}{3}\right| = -\left(-3\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1}{3}$$

- **Замечание.**
  Определение модуля можно расширить:

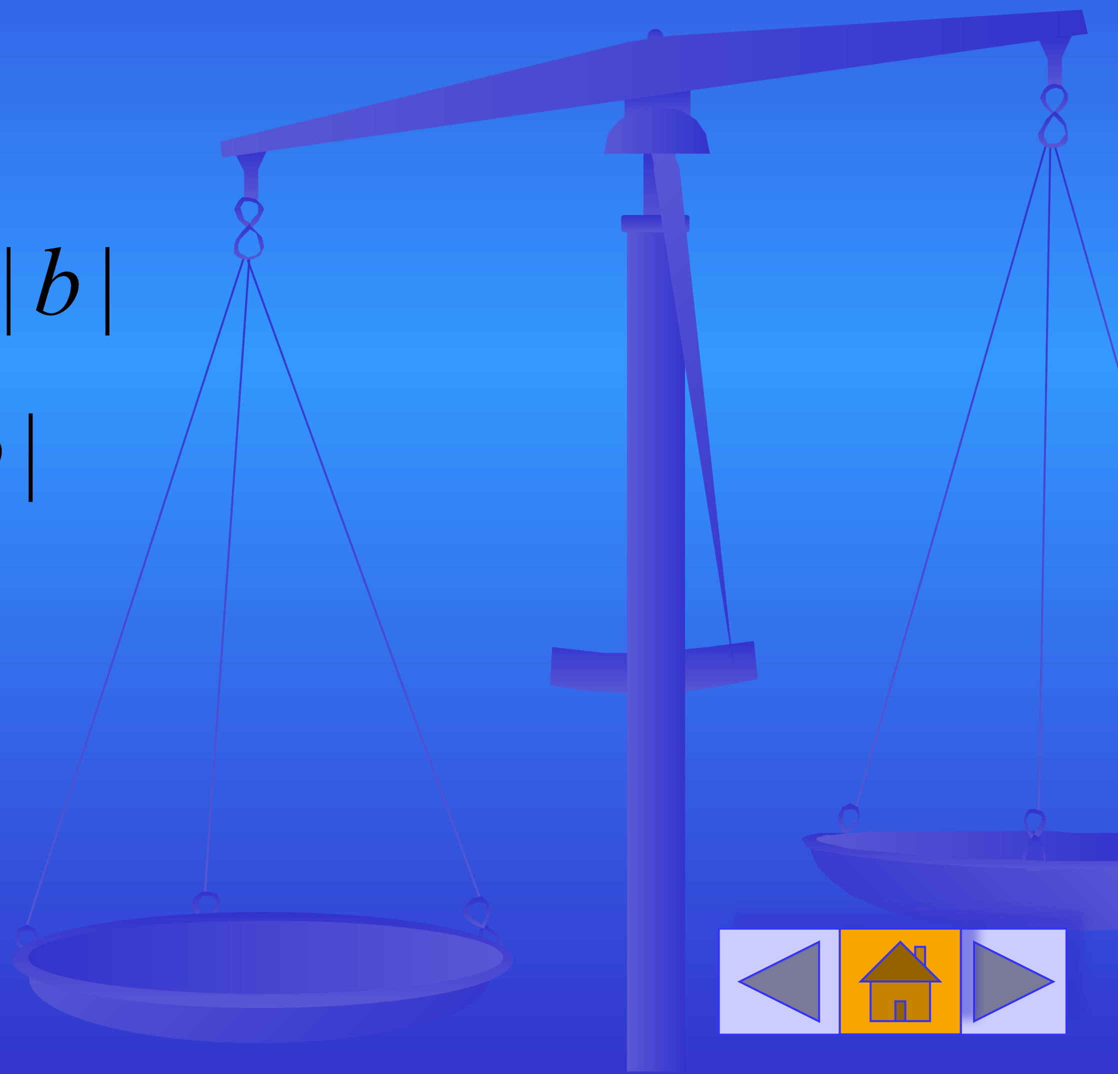
$$|f(x)| = \left[\begin{array}{l} f(x),\ f(x) \ge 0 \\ -f(x),\ f(x) < 0 \end{array}\right. \quad \text{где } f(x) - \text{функция аргумента } x$$

- <u>Пример.</u> Раскрыть знак модуля.

$$|3x-1| = \left[\begin{array}{l} 3x-1,\ 3x-1 \ge 0 \\ -(3x-1),\ 3x-1 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow |3x-1| = \left[\begin{array}{l} 3x-1,\ x \ge \frac{1}{3} \\ -(3x-1),\ x < \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Основные свойства модуля

- 1) $|a| \geq 0$, при этом $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- 2) $|a| = |-a|$
- 3) $|a+b| \leq |a| + |b|$
- 4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
- 6) $|a^n| = |a|^n$



Решение примеров с использованием свойств модуля

- Пример 1.
  Вычислить $|2x-3|, \text{ если } x=1;\ x=5;\ x=1{,}5$

- Пример 2. Раскрыть знак модуля $|4-7x|, \text{ если } x \ \square\ \frac{4}{7}$

- Пример 3.
- Вычислить 1) $|2x+1|-|3-2x|, \text{ если } x\in(1\frac{1}{2},+\infty)$
- 2) $\sqrt{(5-3x)^2}-\sqrt{(x+5)^2}, \text{ если } x\in[0{,}1]$
- 3) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{4x^2+12x+9}, \text{ если } x\in[-\pi,-2]$