



БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра теории функций

Бойко Евгений Вячеславович

Построение мероморфных функций на
накрытиях Римановых поверхностей
векторных задач дискретной
оптимизации.

Руководитель

Долгополова Ольга Борисовна
доцент кафедры теории функций,
кандидат физ-мат. наук





Структура работы

1. Актуальность
2. Цели и задачи
3. Определение и примеры римановых поверхностей
4. Мероморфные функции и их свойства
5. Пример построения мероморфной функции
6. Заключение





Актуальность

Проблема нахождения мероморфных функций является центральной в теории функции на римановых поверхностях. В настоящее время известны многочисленные теоремы существования мероморфных функций с различными особенностями. Однако эти теоремы не решают проблему нахождения аналитических выражений для мероморфных функций.





Цели и задачи

- **Исследование римановых поверхностей и их свойств;**
- **Построение мероморфных функций на накрытиях римановых поверхностей;**
- **Практическая реализация рассмотренных примеров и задач.**





Определение римановых поверхностей

Пусть X – двумерное многообразие (n -мерным многообразием называется хаусдорфово пространство X , каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной некоторому открытому подмножеству в R^n).

Комплексной структурой Σ на двумерном многообразии X называется класс эквивалентности биголоморфно согласованных атласов на X .

Риманова поверхность – это пара (X, Σ) .





Примеры римановых поверхностей

1. Гауссова числовая плоскость C .
2. Риманова числовая сфера \hat{C} ($\hat{C} = C \cup \{\infty\}$)
3. Торы.
4. Риманова поверхность корня.
5. Риманова поверхность алгебраических функций.





Мероморфные функции и их свойства

Пусть X – риманова поверхность и Y – открытое подмножество X .

Мероморфной функцией на Y называется аналитическая функция $f : Y' \rightarrow Y$, определенная на открытом подмножестве $Y' \subset Y$ со следующими свойствами:

1. $Y' \setminus Y$ состоит только из изолированных точек;
2. для каждой точки $p \in Y \setminus Y'$ имеем: $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$.

Точки множества называются полюсами функции f .



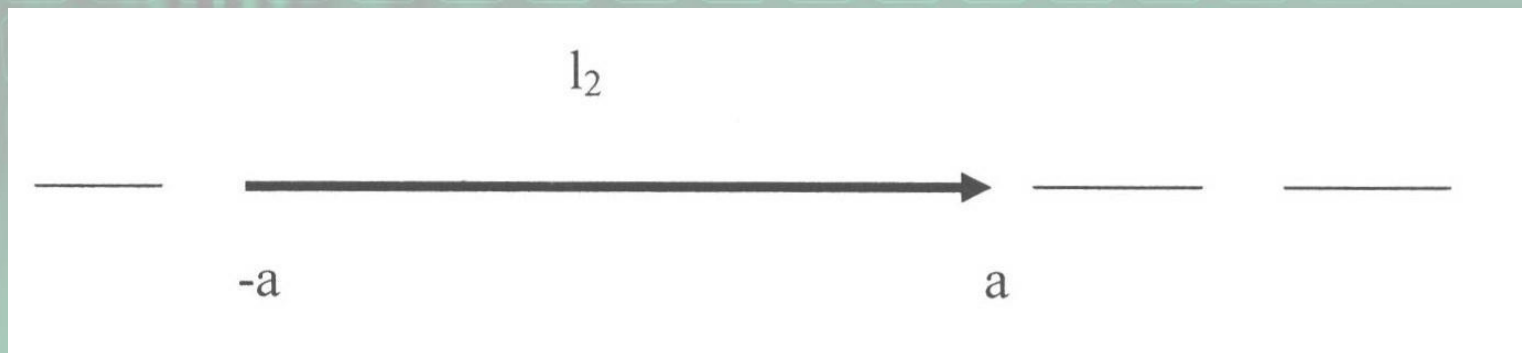


Пример построения мероморфной функции на накрытиях римановых поверхностей

Пусть риманова поверхность R задается

$$w^2 = a^2 - z^2$$

Ее можно рассматривать как двулистную поверхность наложения сферы





...

Подстановка на разрезе $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Возьмем два экземпляра поверхности \mathbb{R} , разрежем вдоль прямых, лежащих над $[-c, -b] = l_1$ и $[c, b] = l_3$, $c < b < a < 0$ и «склеим» два таких экземпляра «крест-накрест». В результате получится четырёхлистная поверхность наложения сферы со следующими подстановками.

На разрезе l_2 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

На разрезах l_1 и l_3 $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$





...

Находим поле мероморфных функций на \mathbb{R} .

$$w^+(z) = Dw^-(t), t \in l_2$$

$$w^+(z) = Cw^-(t), t \in l_1 \cup l_3$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





...

В качестве решения будем искать вектор-функцию, порядок роста которой следующий

$$\begin{cases} w_1(z) = z^2 + O(1) \\ w_2(z) = O(1) \\ w_3(z) = O(1) \\ w_4(z) = -z^2 + O(1) \end{cases}, z \rightarrow \infty$$

Найдем матрицу N , осуществляющую одновременную диагонализацию матриц C и D , и перепишем для вектор-функции $\hat{O} = N_w^{-1}$ в виде: $\hat{O}^+(z) = \Lambda \hat{O}^-(z)$, $z \in l_2$

$$\hat{O}^+(z) = M \hat{O}^-(z), z \in l_1 \cup l_3$$





...

Из асимптотики для $w(z)$ получим асимптотику для функции $\Phi(z)$:

$$\begin{cases} \hat{O}_1(z) = O(1) \\ \hat{O}_2(z) = z^2 + O(1) \\ \hat{O}_3(z) = z^2 + O(1) \\ \hat{O}_4(z) = -z^2 + O(1) \end{cases}, z \rightarrow \infty$$

Выделяя координаты в неравенствах, получим требуемые скалярные задачи Римана на плоскости. Учитывая асимптотику запишем решение:

$$\begin{cases} \hat{O}_1(z) = C_1 \\ \hat{O}_2(z) = (C_3 + C_4 z) \sqrt{a^2 - z^2} \\ \hat{O}_3(z) = C_2 \sqrt{(b^2 - z^2)(c^2 - z^2)} \\ \hat{O}_4(z) = 0 \end{cases}$$





...

Возвращаемся к функции $w(z) = N\hat{O}(z)$ и учитывая найденные константы $C_k : C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 0, C_4 = -i$. получаем искомое решение задачи:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - iz\sqrt{a^2 - z^2} + \sqrt{(b^2 - z^2)(c^2 - z^2)} \\ 1 - iz\sqrt{a^2 - z^2} - \sqrt{(b^2 - z^2)(c^2 - z^2)} \\ 1 + iz\sqrt{a^2 - z^2} + \sqrt{(b^2 - z^2)(c^2 - z^2)} \\ 1 + iz\sqrt{a^2 - z^2} - \sqrt{(b^2 - z^2)(c^2 - z^2)} \end{pmatrix}$$





...

В итоге получаем:

$$(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3)(w - w_4) = 0$$

$$(w_1 + 1 + (b^2 - z^2)(c^2 - z^2) - 4w + z^2(a^2 - z^2))^2 - \\ - (b^2 - z^2)(c^2 - z^2)4(1 - 2w)^2 = 0$$

$$4(w - 0,5(1 - iz\nu))^2 = (b^2 - z^2)(c^2 - z^2).$$





Заключение

- Рассмотрены различные подходы к определению римановых поверхностей.
- Дано определение накрытий римановых поверхностей.
- Построена мероморфная функция на накрытиях римановых поверхностей.





*СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!*

