БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра теории функций

Бойко Евгений Вячеславович

Построение мероморфных функций на накрытиях Римановых поверхностей векторных задач дискретной оптимизации.

Руководитель
Долгополова Ольга Борисовна
доцент кафедры теории функций,
кандидат физ-мат. наук

Структура работы

Актуальность

Проблема нахождения мероморфных функций является центральной в теории функции на римановых поверхностях. В настоящее время известны многочисленные теоремы существований мероморфных функций с различными особенностями. Однако эти теоремы не решают проблему нахождения аналитических выражений для мероморфных функций.

Цели и задачи

- **Исследование римановых поверхностей и их свойств;**
- **Построение мероморфных функций на накрытиях римановых поверхностей;**
- **Практическая реализация рассмотренных примеров и задач.**

Определение римановых поверхностей

Пусть X – двухмерное многообразие (n-мерным многообразием называется хаусдорфово пространство X, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной некоторому открытому подмножеству в R^n).

Комплексной структурой $\sum$ на двухмерном многообразии X называется класс эквивалентности биголоморфно согласованных атласов на X.

Риманова поверхность – это пара $(X, \sum)$.

Примеры римановых поверхностей

1. Гауссова числовая плоскость C.
2. Риманова числовая сфера $\bar{C}$ $\left(\bar{C}=C\cup\{\infty\}\right)$
3. Торы.
4. Риманова поверхность корня.
5. Риманова поверхность алгебраических функций.

Мероморфные функции и их свойства

Пусть X – риманова поверхность и Y – открытое подмножество X.

Мероморфной функцией на Y называется аналитическая функция $f: Y' \to Y$, определенная на открытом подмножестве $Y' \subset Y$ со следующими свойствами:

1. $Y' \setminus Y$ состоит только из изолированных точек;

2. для каждой точки $p \in Y \setminus Y'$ имеем: $\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$.

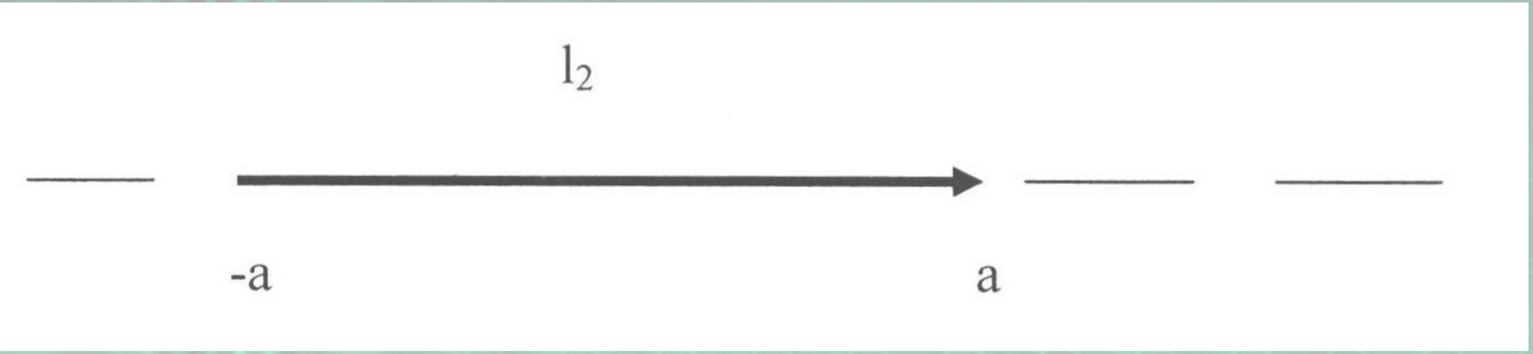
Точки множества называются полюсами функции f.

Пример построения мероморфной функции на накрытиях римановых поверхностей

Пусть риманова поверхность R задается

уравнением $w^2 = a^2 - z^2$

Ее можно рассматривать как двулистную поверхность наложения сферы



…

Подстановка на разрезе $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Возьмем два экземпляра поверхности R, разрежем вдоль прямых, лежащих над $[-c,-b]=l_1$ è $[c,b]=l_3$, $c<b<a<0$ и «склеим» два таких экземпляра «крест-накрест». В результате получится четырёхлистная поверхность наложения сферы со следующими подстановками.

На разрезе l_2 $\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$

На разрезах l_1 è l_3 $\sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$

…

Находим поле мероморфных функций на R.

$$w^{+}(z) = Dw^{-}(t),\ t \in l_2$$

$$w^{+}(z) = Cw^{-}(t),\ t \in l_1 \cup l_3$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

...

В качестве решения будем искать вектор-функцию, порядок роста которой следующий

$$\begin{cases} w_1(z) = z^2 + O(1) \\ w_2(z) = O(1) \\ w_3(z) = O(1) \\ w_4(z) = -z^2 + O(1) \end{cases}, \ z \to \infty$$

Найдем матрицу N, осуществляющую одновременную диагонализацию матриц C и D, и перепишем для вектор-функции $\hat{O} = N_w^{-1}$ в виде: $\hat{O}^+(z) = \Lambda \hat{O}^-(z),\ z \in l_2$

$$\hat{O}^+(z) = M\hat{O}^-(z),\ z \in l_1 \cup l_3$$

...

Из асимптотики для w(z) получим асимптотику для функции Ф(z):

$$\begin{cases} \hat{O}_1(z) = O(1) \\ \hat{O}_2(z) = z^2 + O(1) \\ \hat{O}_3(z) = z^2 + O(1) \\ \hat{O}_4(z) = -z^2 + O(1) \end{cases}, \quad z \to \infty$$

Выделяя координаты в неравенствах, получим требуемые скалярные задачи Римана на плоскости. Учитывая асимптотику запишем решение:

$$\begin{cases} \hat{O}_1(z) = C_1 \\ \hat{O}_2(z) = (C_3 + C_4 z)\sqrt{a^2 - z^2} \\ \hat{O}_3(z) = C_2\sqrt{\left(b^2 - z^2\right)\left(c^2 - z^2\right)} \\ \hat{O}_4(z) = 0 \end{cases}$$

…

Возвращаемся к функции $w(z)=N\hat{O}(z)$ и учитывая найденные константы $C_k : C_1=1, C_2=1, C_3=0, C_4=-i.$ получаем искомое решение задачи:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-iz\sqrt{a^2-z^2}+\sqrt{(b^2-z^2)(c^2-z^2)} \\ 1-iz\sqrt{a^2-z^2}-\sqrt{(b^2-z^2)(c^2-z^2)} \\ 1+iz\sqrt{a^2-z^2}+\sqrt{(b^2-z^2)(c^2-z^2)} \\ 1+iz\sqrt{a^2-z^2}-\sqrt{(b^2-z^2)(c^2-z^2)} \end{pmatrix}$$

…

В итоге получаем:

$$(w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)(w-w_4)=0$$

$$(w_1+1+\left(b^2-z^2\right)\left(c^2-z^2\right)-4w+z^2(a^2-z^2))^2-$$

$$-\left(b^2-z^2\right)\left(c^2-z^2\right)4(1-2w)^2=0$$

$$4(w-0,5(1-izv))^2=\left(b^2-z^2\right)\left(c^2-z^2\right).$$

Заключение

- Рассмотрены различные подходы к определению римановых поверхностей.
- Дано определение накрытий римановых поверхностей.
- Построена мероморфная функция на накрытиях римановых поверхностей.

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!