Принцип максимума

Общая задача управления

$$\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} \mathbf{J} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{I}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt + F(\mathbf{x}_1, t_1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x_1}$$

$$\{\mathbf{u}(t)\} \in \boldsymbol{U}$$

Функция Гамильтона:

$$\boldsymbol{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t) \equiv \boldsymbol{I}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Используя функцию Гамильтона, можно представить дифференциальные уравнения для фазовых координат, т. е. уравнения движения, в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}$$

Т.к.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Данные дифференциальные уравнения для фазовых координат и дифференциальные уравнения для сопряженных переменных плюс все граничные условия образуют систему уравнений, называемых *каноническими уравнениями*

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \boldsymbol{y}(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x_1}} \qquad (*)$$

Теорема. Если допустимое управление $\mathbf{u}^*$ оптимально, то существует такое ненулевое решение $\boldsymbol{y}(t)$ сопряженной системы (*), что при любом $t \in [t_0, t_1]$ функция Гамильтона $\boldsymbol{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t)$ как функция управляющего параметра $\mathbf{u}$ достигает максимума в точке $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*$.

При решении задачи с помощью принципа максимума сначала вводятся n сопряженных переменных **y**(t) и определяется функция Гамильтона

$$\boldsymbol{H}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y},t) = \boldsymbol{I}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) + \mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$

Затем отыскиваются функции $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\max_{\{u\epsilon\Omega\}} H\,(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y},t)\,, t_0 \le t \le t_1$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \boldsymbol{y}(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x_1}}$$

Эти условия являются необходимыми для существования локального максимума.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Характеристиками чувствительности решения к изменениям параметров t_0, t_1 и $\mathbf{x}(t_0)$ являются частные производные от оптимального значения целевого функционала $\boldsymbol{J}^*$ по этим переменным.
Чувствительность оптимального значения целевого функционала к изменению начального момента времени определяется значением производной $\frac{\partial \boldsymbol{J}^*}{\partial t_0}$. Характеристикой чувствительности величины $\boldsymbol{J}^*$ к изменениям конечного момента времени t_1 является величина производной $\frac{\partial \boldsymbol{J}^*}{\partial t_1}$

Чувствительность оптимального значения целевого функционала к изменениям начального фазового состояниях $\mathbf{x}(t_0)$ определяется начальным значением оптимальной сопряженной переменной, т. е.

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}^*}{\partial \mathbf{x}(t_0)} = \mathbf{y}^*(t_0)$$