

Принцип максимума

Общая задача управления

$$\begin{aligned} \max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J &= \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt + F(\mathbf{x}_1, t_1) \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_1) &= \mathbf{x}_1 \\ \{\mathbf{u}(t)\} &\in U \end{aligned}$$

Функция Гамильтона:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t) \equiv I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Используя функцию Гамильтона, можно представить дифференциальные уравнения для фазовых координат, т. е. уравнения движения, в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}$$

Т.к.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}$$

Данные дифференциальные уравнения для фазовых координат и дифференциальные уравнения для сопряженных переменных плюс все граничные условия образуют систему уравнений, называемых *каноническими уравнениями*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{y}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, & \mathbf{y}(t_1) &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1}\end{aligned} \quad (*)$$

Теорема. Если допустимое управление \mathbf{u}^* оптимально, то существует такое ненулевое решение $\mathbf{y}(t)$ сопряженной системы (*), что при любом $t \in [t_0, t_1]$ функция Гамильтона $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t)$ как функция управляющего параметра \mathbf{u} достигает максимума в точке $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*$.

При решении задачи с помощью принципа максимума сначала вводятся сопряженные переменные $\mathbf{y}(t)$ и определяется функция Гамильтона

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t) = I(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \mathbf{y}f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Затем отыскиваются функции $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \max_{\{u \in \Omega\}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \\ \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{y}(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1} \end{aligned}$$

Эти условия являются необходимыми для существования локального максимума.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Характеристиками чувствительности решения к изменениям параметров t_0, t_1 и $\mathbf{x}(t_0)$ являются частные производные от оптимального значения целевого функционала J^* по этим переменным.

Чувствительность оптимального значения целевого функционала к изменению начального момента времени определяется значением производной $\frac{\partial J^*}{\partial t_0}$. Характеристикой чувствительности величины J^* к изменениям конечного момента времени t_1 является величина производной $\frac{\partial J^*}{\partial t_1}$.

Чувствительность оптимального значения целевого функционала к изменениям начального фазового состояния $\mathbf{x}(t_0)$ определяется начальным значением оптимальной сопряженной переменной, т. е.

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}(t_0)} = \mathbf{y}^*(t_0)$$