Задача об экономическом росте

$Y(t)$ – выпуск продукта
$L(t)$ - труд
$K(t)$ – капитал
$C(t)$ - потребление
$I(t)$ – капиталовложения

Согласно тождественному *равенству дохода и расходов*,

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{1}$$

$K(t)$– размер капитала в момент времени t, тогда капитальные вложения измеряются скоростью изменения наличного капитала

$$\dot{K}(t) = \frac{dK}{dt}$$

μ - норма амортизации, т.е. в момент времени t необходимо заменить $\mu K(t)$ амортизированного капитала

Тождество для валовых инвестиций:

$$I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t) \tag{2}$$

Размеры выпуска определяются *производственной функцией*:

$$Y = F(K, L)$$

Отдача от масштаба производства постоянна, т. е. для любого α>0

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L) = \alpha Y$$

Выбирая α = 1/L, получим

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right) \qquad (3)$$

Обозначим

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}, \qquad k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

Тогда (3) перепишется в виде

$$y = f(k) \qquad (4)$$

где $y(t)$— выпуск продукции па одного рабочего, а $k(t)$— величина капитала на одного рабочего.

$$f'(k) = \frac{df(k)}{dk} > 0, f''(k) = \frac{d^2 f(k)}{dk^2} < 0, \text{для всех } k > 0,$$

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$$

$c(t)$— потребление на одного рабочего

$i(t)$ — капитальные вложения, приходящиеся на одного рабочего:

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \qquad i(t) = \frac{I(t)}{L(t)}$$

Тогда тождество дохода и расходов (1) можно переписать как

$$y(t) = c(t) + i(t) \tag{5}$$

а тождество для валовых инвестиций (2) как

$$i(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \mu \frac{K(t)}{L(t)} = \frac{\dot{K}}{L} + \mu k$$

Скорость изменения величины капиталовооруженности рабочего можно записать следующим образом:

$$\dot{k} = \frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L^2}\dot{L} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L}$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + k\frac{\dot{L}}{L}$$

Теперь тождество для валовых инвестиций принимает вид

$$i(t) = \frac{\dot{K}}{L} + \mu k = \dot{k} + \left(\mu + \frac{\dot{L}}{L}\right)k \qquad (6)$$

Численность рабочей силы возрастает экспоненциально с темпом роста n:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

$$i(t) = \dot{k} + (\mu + n)k = \dot{k} + \lambda k$$

$$\lambda = \mu + n > 0$$

Основное дифференциальное уравнение модели экономического роста:

$$f\big(k(t)\big) = c(t) + \lambda k(t) + \dot{k}(t) \qquad (*)$$

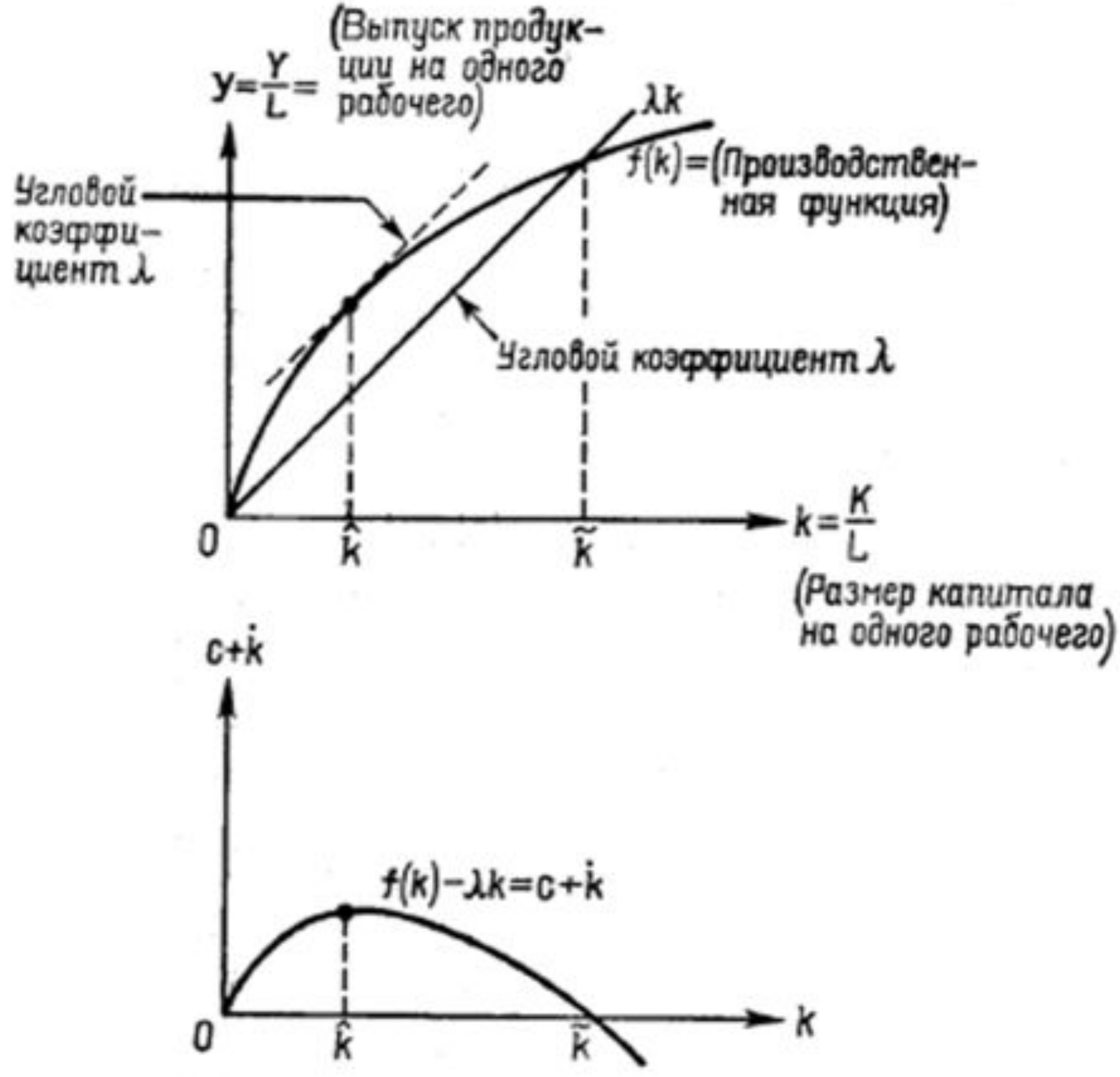


Рис. 1 Основное дифференциальное уравнение неоклассической модели экономического роста.

В критической точке $\hat{k}$ функция $c + \dot{k}$ достигает максимума, в точке $\tilde{k}$ - обращается в нуль:

$$f(\hat{k}) - \lambda\hat{k} \geq f(k) - \lambda k \text{ для всех } k > 0$$

$$f(\tilde{k}) - \lambda\tilde{k} = 0$$

При сделанных выше предположениях точки $\hat{k}$ и $\tilde{k}$ существуют и единственны.

$\hat{c}$ – максимальное значение потребления на одного рабочего, при этом соответствующее ей значение $\hat{k}$ определяется из уравнения

$$f'(k) = \lambda = \mu + n \text{ при } k = \hat{k}$$

$\hat{k}$ - *уровень капиталовооруженности золотого правила накопления*

Максимальное значение уровня потребления, которое может сохраняться неопределенно долго, равно

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - \lambda\hat{k} \tag{7}$$

$\hat{c}$ - уровень *потребления на одного рабочего, соответствующее золотому правилу*.

Условия (7) называют золотым *правилом накопления*.

Задача оптимального экономического роста

Основное дифференциальное уравнение модели экономического роста:

$$\dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - \lambda k(t) - c(t) \tag{1}$$

$$\lambda = \mu + n$$

μ - норма амортизации

n - темп роста рабочей силы

μ, n - экзогенные параметры

$$0 < \mu < 1,$$
$$-1 < n < 1$$

$k(t)$ –фондовооруженность, фазовая координата

$f\big(k(t)\big)$ - выпуск продукции на одного рабочего (производительность труда)

Начальное состояние задается значением капиталовооруженности рабочего при $t = t_0$.

$$k(t_0) = k_0 \tag{2}$$

$c(t)$ - управляющий параметр, среднедушевое потребление

Здесь t_0 и t_1 — начальное и конечное время — считаются заданными, причем t_1, может принимать любые значения, как конечные, так и бесконечные.

Допустимой траекторией называется любая кусочно-непрерывная траектория $\{c(t)\}$, удовлетворяющая уравнению движения и граничному условию, для которой

$$0 \leq \underline{c} \leq c(t) \leq f\big(k(t)\big) \text{ для всех } t,\ t_0 \leq t \leq t_1$$

(потребление c не может превышать выпуск $f\big(k(t)\big)$)

$\underline{c}$ – предельно допустимая нижняя граница удельного потребления.

функция полезности, определяющая полезность *U* в любой момент времени как функцию от потребления на одного рабочего:

$$U = U(c(t))$$

Будем считать, что:

$$\frac{dU(c)}{dc} = U'(c) > 0, \qquad \frac{d^2U(c)}{dc^2} = U''(c) < 0 \text{ для всех } c, 0 < c_1 < \infty$$

$$\lim_{c\to 0} U'(c) = \infty\,, \lim_{c\to\infty} U'(c) = 0 \tag{3}$$

Показателем кривизны функции полезности является *эластичность предельной полезности*

$$\sigma(c) = -c\,\frac{U''(c)}{U'(c)} > 0$$

Положив, что дисконтирующий множитель имеет вид экспоненты, получим значение полезности в момент времени t, приведенное к моменту времени t_0, равное $e^{-\delta(t-t_0)}U(c(t))$.

В указанный интервал времени от t_0 до t_1 благосостояние W, соответствующее траектории потребления па одного рабочего $\{c(t)\}$, определяется интегрированием (суммированием) всех мгновенных полезностей по всему интервалу

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)} U(c(t)) dt \tag{4}$$

$$k(t_1) = k_1 \tag{5}$$

Положим $t_0 = 0, t_1 = \infty$.

Задача:

$$W \to max$$

задача об оптимальном экономическом росте для агрегированной замкнутой экономики с бесконечным горизонтом планирования и положительной нормой дисконтирования представляет собой задачу о выборе траектории удельного потребления $\{c(t)\}$ такой, что

$$\max_{\{c(t)\}} W = \int_0^\infty e^{-\delta t} U(c(t)) dt$$
$$\dot{k}(t) = f(k) - \lambda k - c$$
$$k(0) = k_0$$
$$0 \leq \underline{c} \leq c \leq f(k) \qquad (6)$$

$c(t)$— кусочно-непрерывная функция.

Решением этой задачи будет оптимальная пара $\{c^*(t), k^*(t)\}$, для которой благосостояние макисмально.

Решим задачу (6), используя принцип максимума. Функция Гамильтона для этой задачи записывается в виде

$$H = e^{-\delta t}\{U(c) + q[f(k) - \lambda k - c]\}$$

где q — сопряженная переменная (ранее фигурировал символ y, здесь $y = qe^{-\delta t}$).

$q[f(k) - \lambda k - c]$ - ценность той части, которая использована на расширение фондов, умножением на $e^{-\delta t}$ эта ценность приведена к настоящему времени.

В соответствии с принципом максимума :

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\delta t}[U'(c) - q] = 0$$

следует, что

$$q = U'(c) \tag{7}$$

Каноническое уравнение для сопряженной переменной записывается следующим образом:

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\delta t} q(t)\right) = -\frac{\partial H}{\partial k}$$

$$-\delta e^{-\delta t} q + e^{-\delta t} \dot{q} = e^{-\delta t} q[f'(k) - \lambda]$$

Отсюда следует, что

$$\dot{q} = -(f'(k) - (\lambda + \delta))q$$

$$\frac{\dot{q}}{q} = -(f'(k) - (\lambda + \delta)) \quad (8)$$

Преобразуем это уравнение учтем, что $\lambda = \mu + n$

$$f'(k) + \frac{\dot{q}}{q} - \mu - n - \delta = 0$$

Поскольку на оптимальной траектории согласно (7) выполняется $q(t) = U'(c(t))$, то после дифференцирования равенства по времени получим:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(U'(c(t))) = \frac{d(U')}{dc}\frac{dc}{dt} = U''(c)\dot{c}$$

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{U''(c)}{U'(c)}\dot{c} = \frac{U''(c)}{U'(c)}c\frac{\dot{c}}{c} = -\sigma(c)\frac{\dot{c}}{c}$$

$$\sigma(c) = -c\frac{U''(c)}{U'(c)} > 0$$

$$\dot{c} = -\frac{1}{\sigma(c)}\frac{\dot{q}}{q}c$$

где $\sigma(c)$ есть ненулевая эластичность предельной полезности.

Соберем уравнения:

$$(7) \Rightarrow \; q(t) = U'(c(t)$$

$$(8) \Rightarrow \; \dot{q} = -(f'(k) - (\lambda + \delta))q$$

$$\dot{c} = -\frac{1}{\sigma(c)} \frac{\dot{q}}{q} c$$

Тогда

$$\dot{c} = \frac{c}{\sigma(c)} \frac{(f'(k) - (\lambda + \delta))q}{q}$$

Итак, каноническое уравнение для сопряженной переменной q можно представить как дифференциальное уравнение для управляющего параметра с:

$$\dot{c} = \frac{1}{\sigma(c)} [f'(k) - (\lambda + \delta)]c$$

Итак, по принципу максимума, если траектория $\{c^*(t)\}$ и $\{k^*(t)\}$ оптимальны, то они должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\dot{c} = \frac{1}{\sigma(c)}[f'(k) - (\lambda + \delta)]c$$

$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - c \text{ (уравнение движения)} \qquad (9)$$

Стационарные траектории:

$$\dot{c} = 0, \dot{k} = 0 \Rightarrow c^* = const, k^* = const$$

Чтобы потребление в расчете на одного рабочего было постоянным, необходимо, согласно (9), чтобы k=k*, при этом

$$f'(k^*) = \lambda + \delta \tag{10}$$

и капиталовооруженность рабочего сохраняет свое значение k^*, если потребление на одного рабочего равно

$$c^* = f(k^*) - \lambda k^*$$

Величины k^* и c* существуют, единственны и удовлетворяют следующему неравенству:

$$0 < c^* < f(k^*)$$

Равновесие при *k(t)=k** и *c(t)= c** удовлетворяет всем необходимым условиям, за исключением начального граничного условия. Это равновесие при {k*}, {c*} называется *траекторией сбалансированного роста*

Если λ фиксировано, то из уравнения (10) k* определяется как функция от δ такая, что

$$\lim_{\delta \to 0} k^* = \hat{k}$$

где $\hat{k}$ — значение капиталовооруженности по золотому правилу.

Уравнения (9) с начальным условием $k(0) = k_0$ определяют траектории, среди которых находятся и оптимальные $k^*(t)$ и $c^*(t)$, при этом

$$\lim_{t \to \infty} c^*(t) = c^*, \lim_{t \to \infty} k^*(t) = k^*$$

Докажем последнее утверждение для случая $U(c) = c,\ \text{и}\ \underline{c} < c(t) < f(k^*)$.

Гамильтониан *H* примет вид

$$H = e^{-\delta t}\{U(c) + q[f(k) - \lambda k - c]\} =$$
$$= e^{-\delta t}\{c + q[f(k) - \lambda k - c]\} = e^{-\delta t}\{(1-q)c + q[f(k) - \lambda k]\}$$

Так как H в этом случае линейно зависит от c, то его максимум по c зависит от знака $(1-q)$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\delta t}[1-q]$$

и достигается при следующем релейном изменении c:

$$c^* = \begin{cases} \underline{c}, q > 1 - \text{максимум на левой границе} \\ c(t), \quad q = 1 - \text{внутренний максимум} \\ f\big(k(t)\big)\; q > 1 - \text{максимум на правой границе} \end{cases} \tag{11}$$

Как следует из (7), канонические уравнения для фазовой и сопряженной переменных имеют вид:

$$\dot{q} = -\left(f'(k) - (\lambda + \delta)\right)q$$
$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - c$$
$$k(0) = k_0$$

(12)

И именно из участков решений этих уравнений состоят оптимальные траектории. Из (12) находим стационарные точки (при $\dot{q}^* = 0,\ \dot{k}^* = 0$)

$$f'(k^*) = \lambda + \delta$$

$$c^* = f(k^*) - \lambda k^*$$

$$q^* = 1$$

(13)

Причем $q^* = 1$ вытекает из двух условий: с одной стороны $q^* = const$, т.к. $\dot{q}^* = 0$, а с другой стороны $c^* \neq \underline{c}, c^* \neq f(k^*)$, поэтому согласно (11) $q^* = 1$.

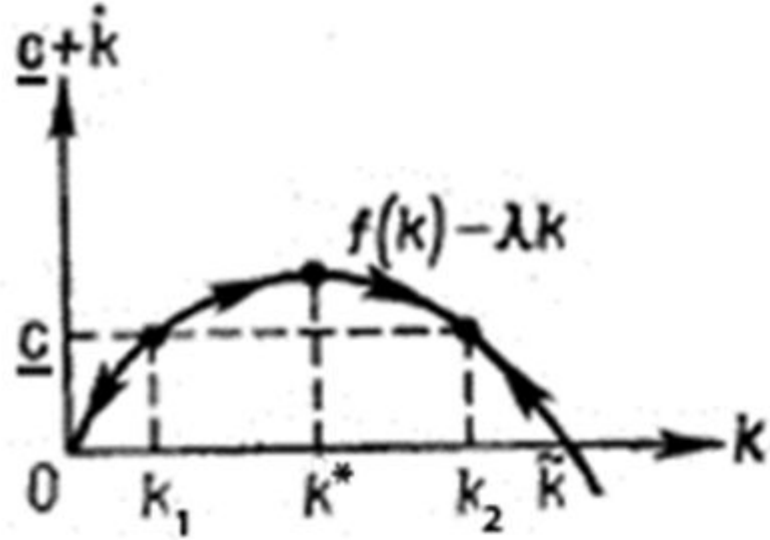
Решение первого из уравнений (13) существует, поскольку $f'(k^*) = \infty, f''^{(k)} < 0$.

Исследуем поведение оптимальных траекторий $k^*(t), q^*(t)$ в плоскости фазовой и сопряженной переменных *(k,q)* , $k \geq 0, q \geq 0$. Используемые далее стационарные оптимальные значения фондовооруженности k^* и удельного потребления c^* определяются из (13).

1. Вначале рассмотрим область $q \geq 1$. Здесь $c^*(t) = \underline{c}$. Поэтому второе уравнение (12) запишется в виде

$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - \underline{c}, \qquad k(0) = k_0 \tag{14}$$

Его траектории имеют разный вид при $k_0 < k_1$, $k_0 > k_1$, где k_1- меньший корень уравнения $f(k) - \lambda k - \underline{c} = 0$. Причем $k_1 < k^*$, поскольку $\underline{c} < c^*$.



Линия потребления на одного рабочего $c = \underline{c}$ пересекает кривую в двух точках, соответствующих уровням капиталовооруженности k_1и k_2 (k_1<k_2). Зафиксируем $c = \underline{c}$. Тогда $\dot{c} = 0 \quad \rightarrow \quad$ уравнение кривой $\quad \dot{k} = f(k) - \lambda k - \underline{c}$.

- Если $f(k) - \lambda k > \underline{c} \ \rightarrow \dot{k} > 0,\ k$ растет (находимся выше линии $c = \underline{c}$, k_1< k <k_2)

- Если $f(k) - \lambda k < \underline{c} \ \rightarrow \dot{k} < 0,\ k$ убывает (находимся ниже линии $c = \underline{c}$, $k < k_1, k > k_2$)
- Если $f(k) - \lambda k = \underline{c} \ \rightarrow \dot{k} = 0$ (находимся на линии $c = \underline{c},\ k = k_1, k = k_2$)

- При $k_0 < k_1$ фондовооруженность убывает и, следовательно удаляется от от стационарного значения k^*,
- При $k_0 > k_1$ - возрастает и поэтому приближается к стационарному значению k^*.
- При $k_1 < k_0 < k^*$ решение уравнения (14) $k^*(t)$ непрерывно возрастает, пока не достигнет в точке ${t_1}^*$ стационарного значения $k^*({t_1}^*) = k^*$. (нижняя кривая ${k_0}^{(1)}(t)$)

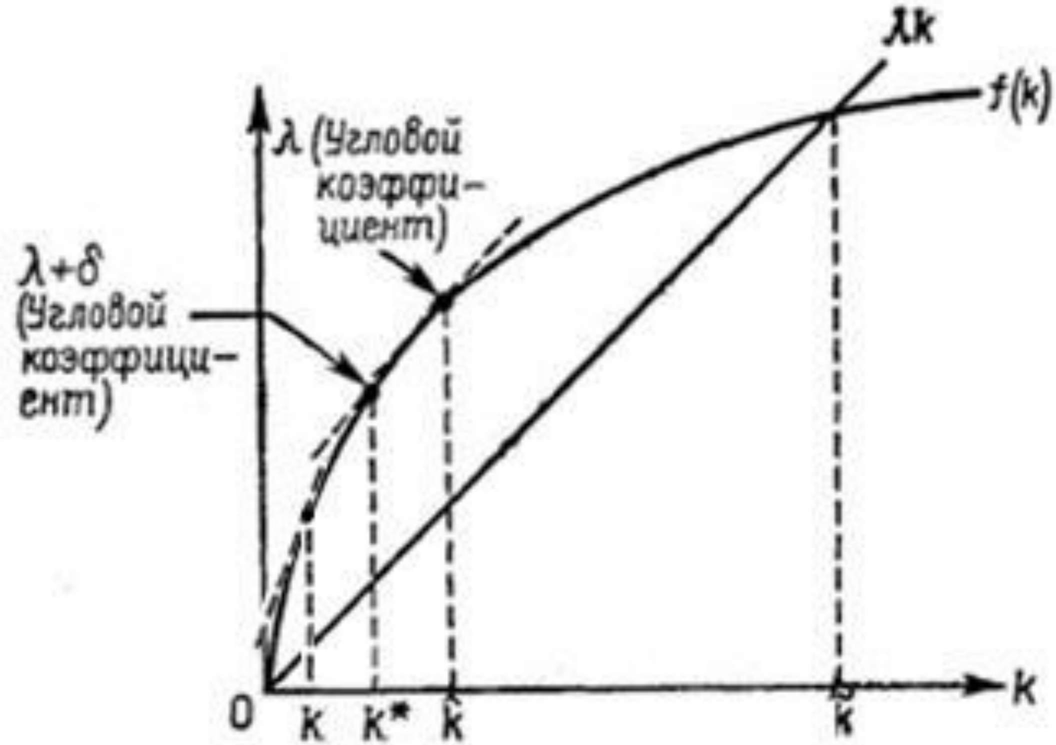
Кроме того, согласно первому уравнению (12)

$$\dot{q} = -\big(f'(k) - (\lambda + \delta)\big)q$$

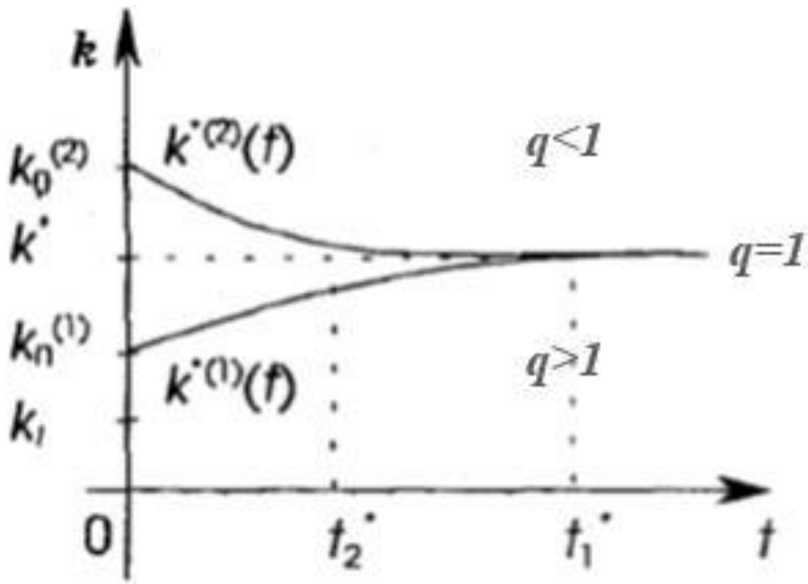
$(13) \to\ f'(k^*) = \lambda + \delta$ – угол наклона кривой $f(k)$ в точке k^*

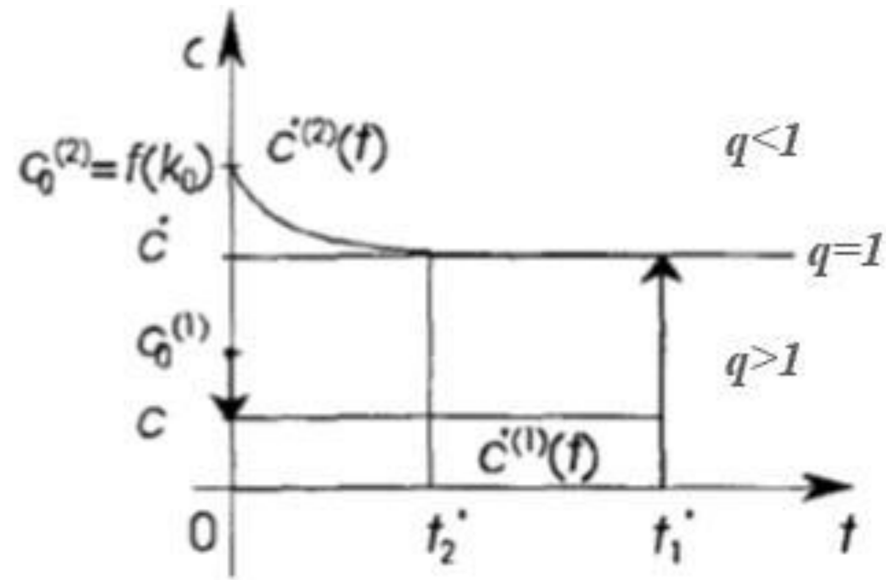
при $k_1 < k < k^* \quad \to \quad f'(k) > f'(k^*)$ (т.к. точка k находится левее k^*)

$\to f'(k) > \lambda + \delta \ \to \quad \dot{q} < 0$, т.е. q монотонно убывает и $q > 1$, поэтому и при $t = {t_1}^*$ значение $q^*({t_1}^*) = q^* = 1$ и в (11) значение $c^*(t)$ при $q^* = 1$ надо заменить на $c^* = \ f(k^*) - \lambda k^*$.



- Если $k_0 > k^*$, то согласно первому уравнению (12) $\dot{q} > 0$, поэтому q удаляется от стационарного значения $q^* = 1$, т.е. нет сходимости траекторий к стационарным.





2. Рассмотрим теперь область $q < 1$. Здесь $c^*(t) = f\big(k(t)\big)$, т.е. на потребление работают все фонды (нет ни расширения, ни даже восстановления фондов), при этом второе уравнение (12) примет вид:

$$\dot{k} = -\lambda k, k(0) = k_0,$$

$$k = c_1 e^{-\lambda t},$$

Из начального условия следует, что $c_1 = k_0$, т.о.

$$k^* = k_0 e^{-\lambda t},$$

Следовательно, фондовооруженность уменьшается $(k^* < k_0)$ до тех пор, пока не достигнет в точке $t = t_1^*$ стационарного уровня $k_0 e^{-\lambda t} = k^*$ (верхняя кривая ${k_0}^{(2)}(t)$). При этом q возрастает, т.к. $\dot{q} > 0$ при $k > k^*$, пока не достигнет при $t = t_1^*$ стационарного уровня $q^* = 1$, при этом $c^*(t_1^*) = c^*$.

2. Рассмотрим теперь область $q < 1$. Здесь $c^*(t) = f\big(k(t)\big)$, т.е. на потребление работают все фонды (нет ни расширения, ни даже восстановления фондов), при этом второе уравнение (12) примет вид:

$$\dot{k} = -\lambda k, k(0) = k_0,$$

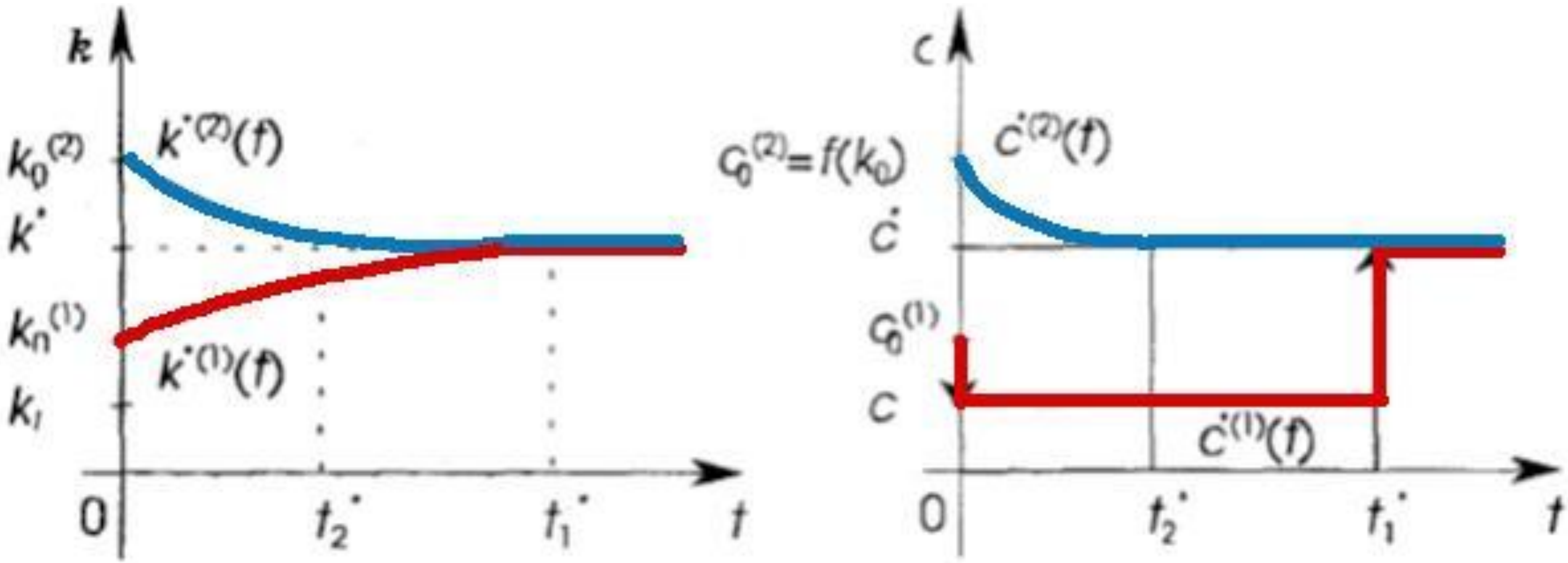
$$k = c_1 e^{-\lambda t},$$

Из начального условия следует, что $c_1 = k_0$, т.о.

$$k^* = k_0 e^{-\lambda t},$$

Следовательно, фондовооруженность уменьшается $(k^* < k_0)$ до тех пор, пока не достигнет в точке $t = t_1^*$ стационарного уровня $k_0 e^{-\lambda t} = k^*$ (верхняя кривая $k_0{}^{(2)}(t)$). При этом q возрастает, т.к. $\dot{q} > 0$ при $k > k^*$, пока не достигнет при $t = t_1^*$ стационарного уровня $q^* = 1$, при этом $c^*(t_1^*) = c^*$.

Если же $k^* > k_0$, то нет сходимости к стационарным траекториям.


k
$k_0^{(2)}$
$k^{*(2)}(t)$
k^*
$k_n^{(1)}$
$k^{*(1)}(t)$
k_l
0
t_2^*
t_1^*
t
c
$c^{*(2)}(t)$
$c_0^{(2)}=f(k_0)$
c^*
$c_0^{(1)}$
c
$c^{*(1)}(t)$
0
t_2^*
t_1^*
t

Таким образом, получаем следующую картину оптимального управления.

При $q > 1, k_1 < k_0 < k^*$ фондовооруженность непрерывно растет за счет того, что удельное потребление удерживается на предельно низком уровне. Как только в момент t_1^* фондовооруженность достигает стационарного значения, система переходит на стационарный режим: имеет место такое воспроизводство, которое позволяет поддерживать фондовооруженность на стационарном уровне k^*; удельное потребление постоянно и равно $f(k^*) - \lambda k^*,\ q^* = 1$.

При $q < 1, k_0 > k^*$ в фонды не поступает никаких вложений, поэтому фондовооруженность сокращается за счет износа и за счет увеличения числа занятых по закону $k^* = k_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda=\mu+n$, потребление также сокращается по закону $c^*(t) = f\left(k_0 e^{-\lambda t}\right)$, пока фондовооруженность не достигнет в момент t_2^* стационарного значения k^*, после чего система входит в стационарный режим.

Во всех остальных случаях система не достигает стационарного режима.