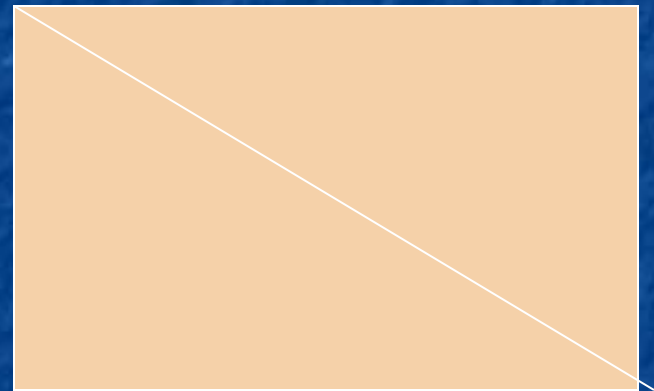


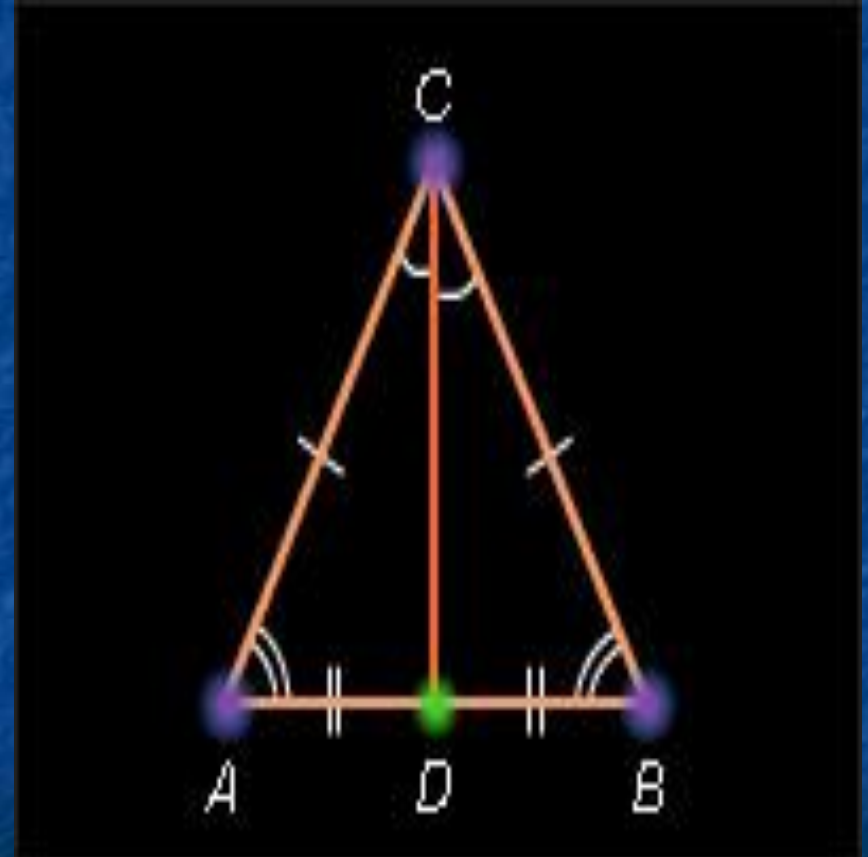
Площадь многоугольника

- Геометрическая фигура называется *простой*, если ее можно разбить на конечное число треугольников. Очевидно, что выпуклый плоский многоугольник является простой фигурой.



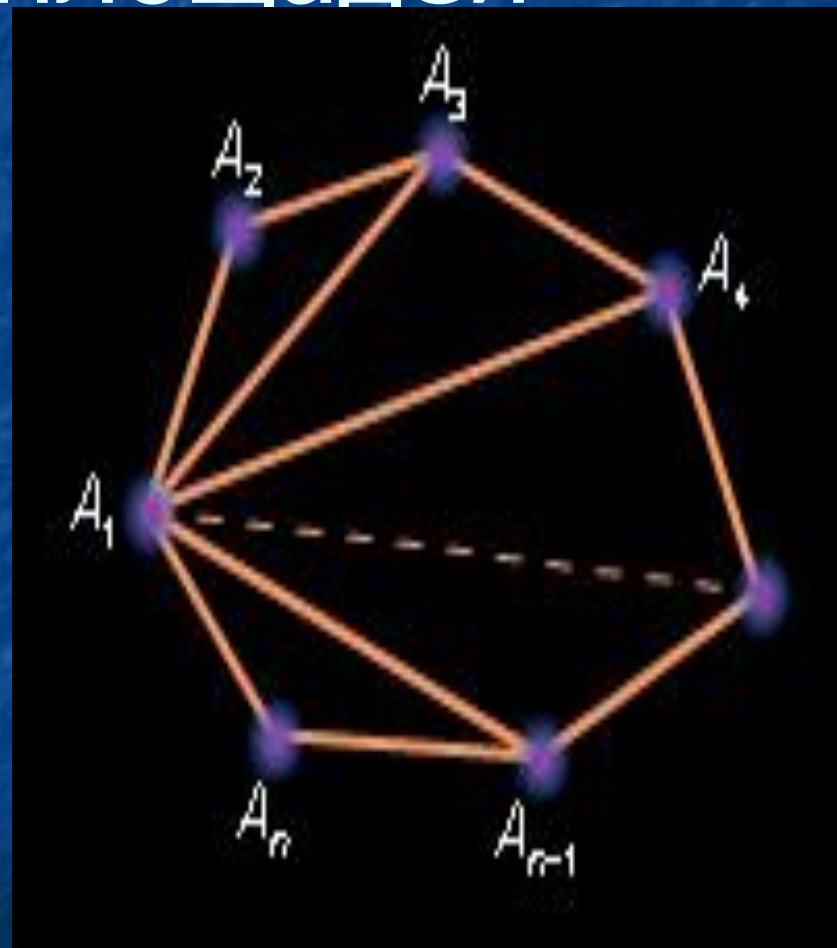
Свойства площадей

- равные многоугольники имеют одну и ту же площадь;



Свойства площадей

- если фигура разбита на конечное число простых фигур, то ее площадь равна сумме площадей этих простых фигур;



Свойства площадей

- площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.



1

1

$$S_{\text{квадрата}} = 1$$

Измерение площади состоит в сравнении площади S_F данной фигуры F с площадью квадрата со стороной, равной единице измерения

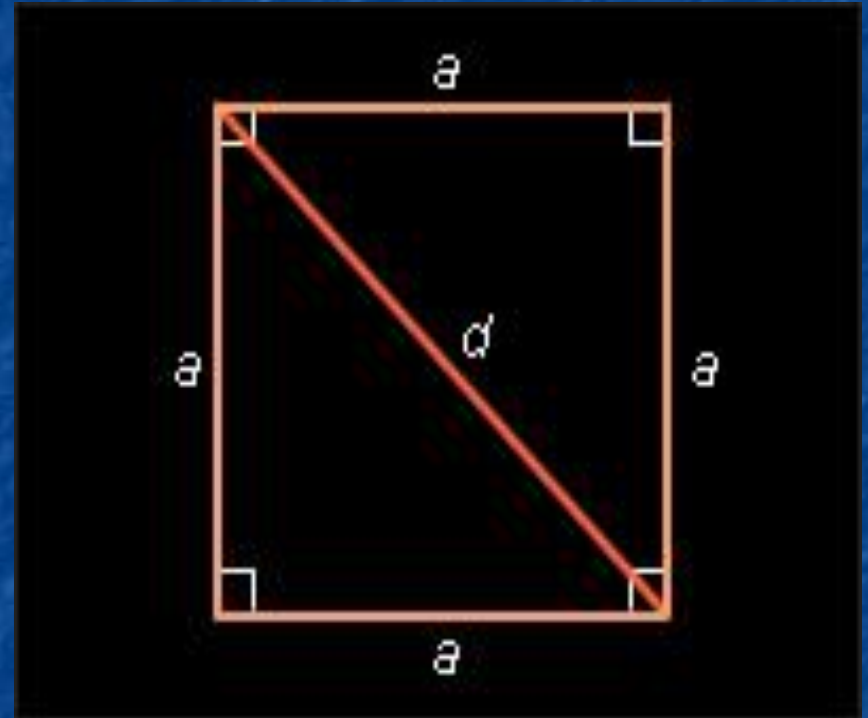
- В результате сравнения получается некоторое число – ***численное значение площади*** данной фигуры, которое показывает, во сколько раз отличается площадь фигуры F от площади ***единичного квадрата***

Фигуры, имеющие одинаковую площадь,
называются *равновеликими*.

- Площади равных фигур равны.

Квадрат

- $S = a^2$, где a - сторона квадрата
- $P = 4a$, где a - сторона квадрата

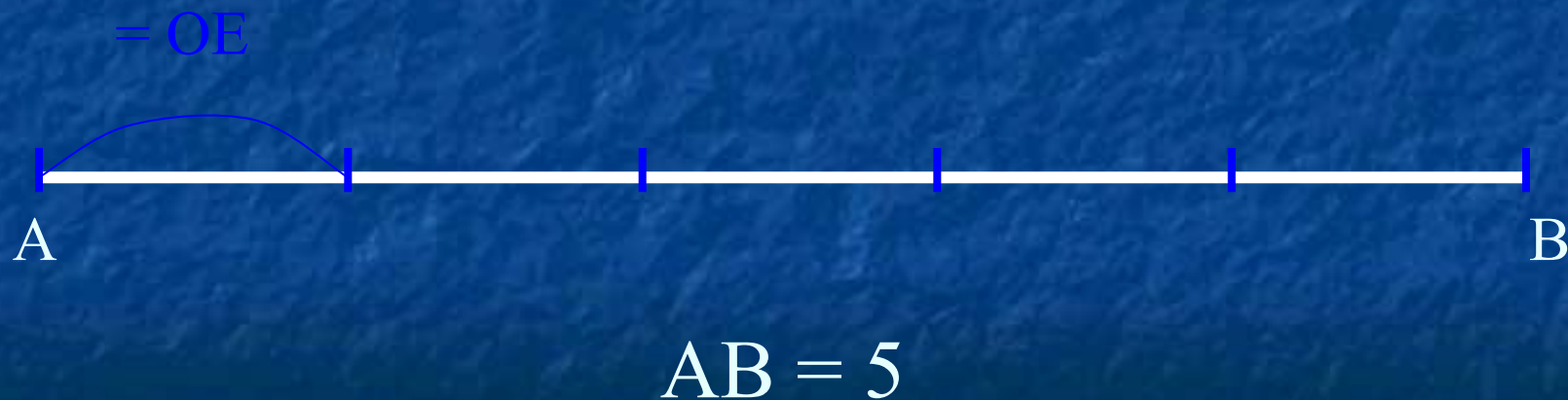


Квадрат

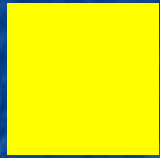
- $S = a^2$, где a - сторона квадрата
- $P = 4a$, где a - сторона квадрата
- Решить задачу
- Разность периметров двух квадратов равна 12 см, а разность их площадей – 105 см². Найти площадь меньшего из них.

**ПЛОЩАДЬ
ПРЯМОУГОЛЬНИКА.**

ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ



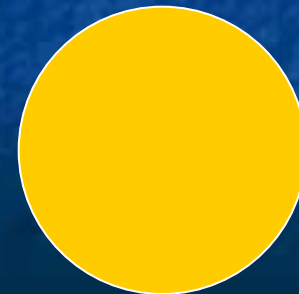
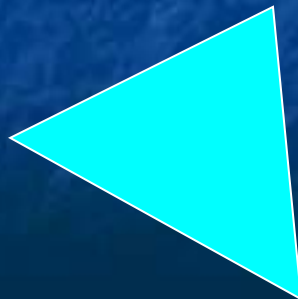
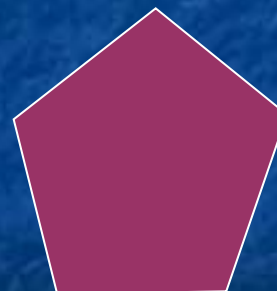
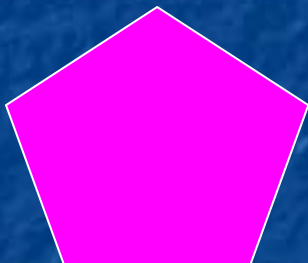
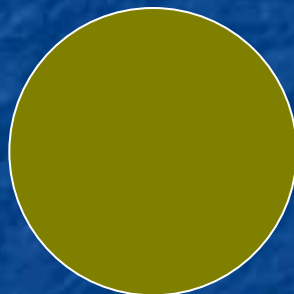
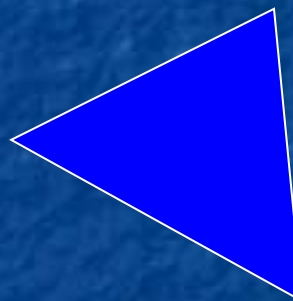
$$S = 18 \text{ кв. ед.}$$



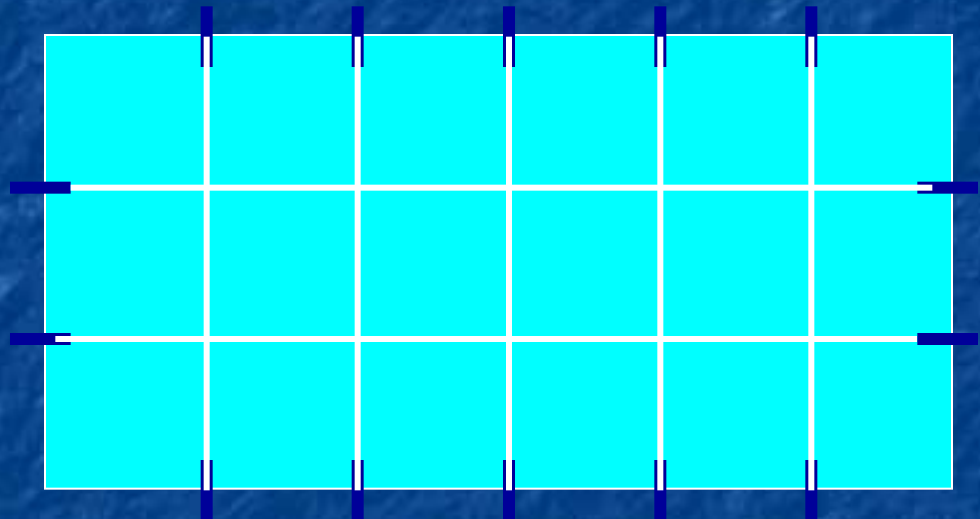
1 кв. ед.



РАВНЫЕ ФИГУРЫ

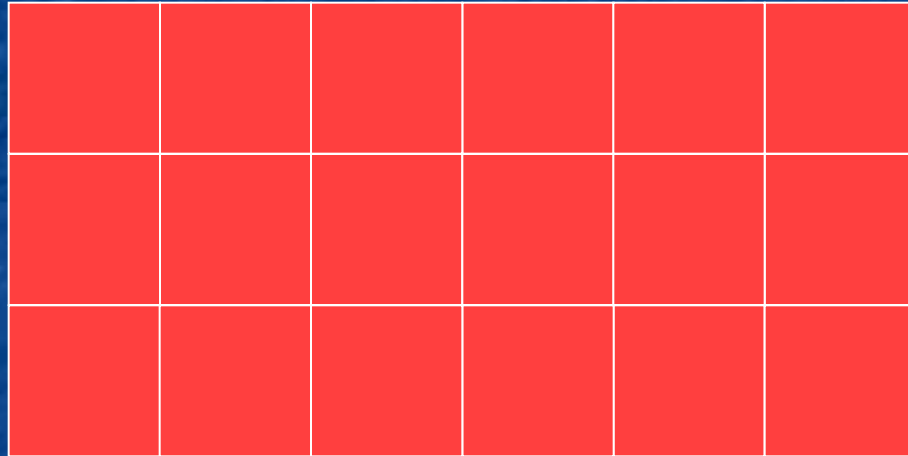


*Равные фигуры –
равные площади.*



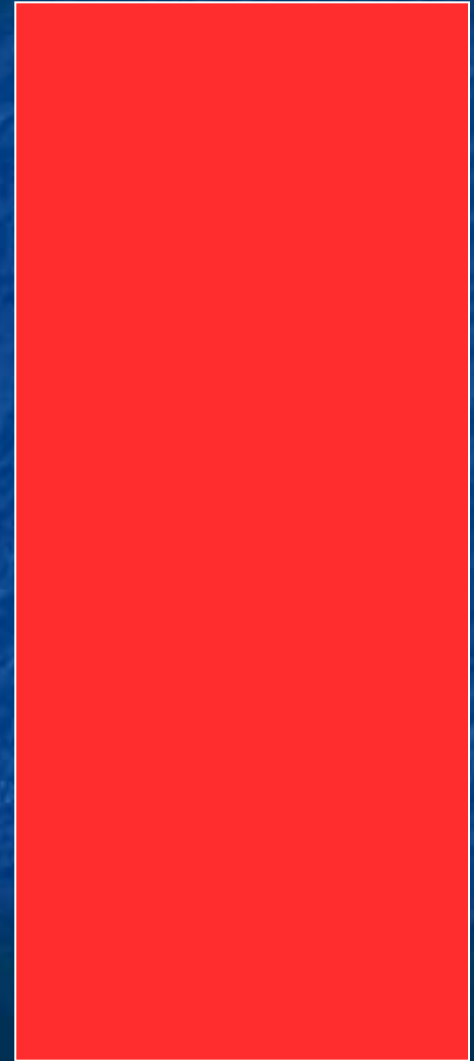


$$S = ? \text{ кв.ед.}$$



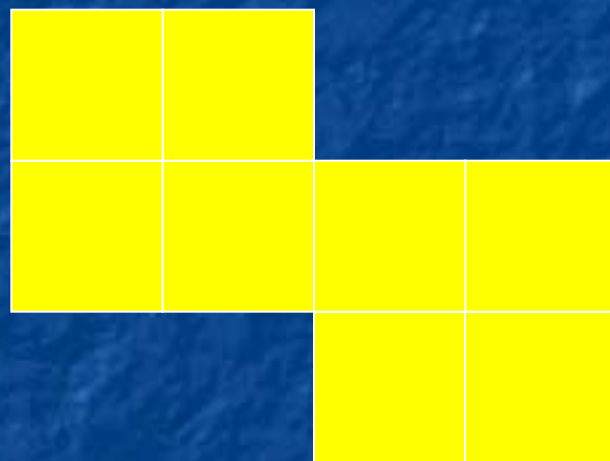
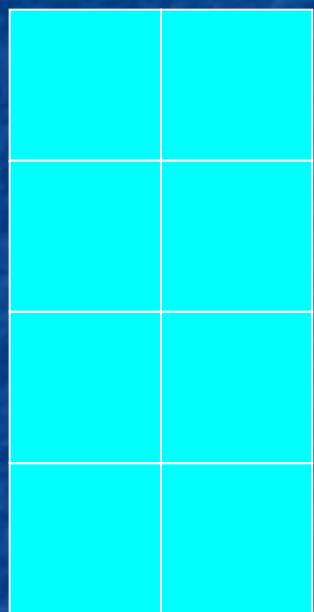
$$S = 18 \text{ кв.ед.}$$

$$S = 18 \text{ кв.ед.}$$

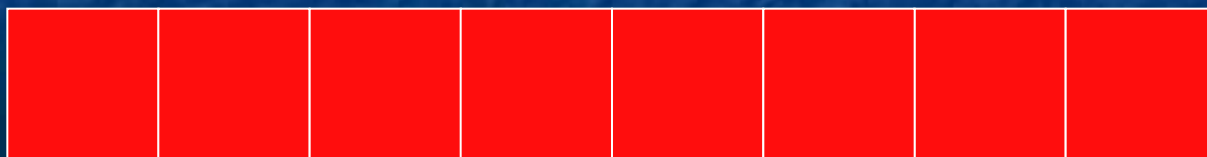


Фигуры, имеющие
равную площадь,
называются
равновеликими.

РАВНОВЕЛИКИЕ ФИГУРЫ

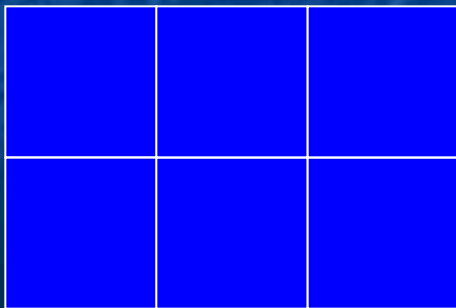
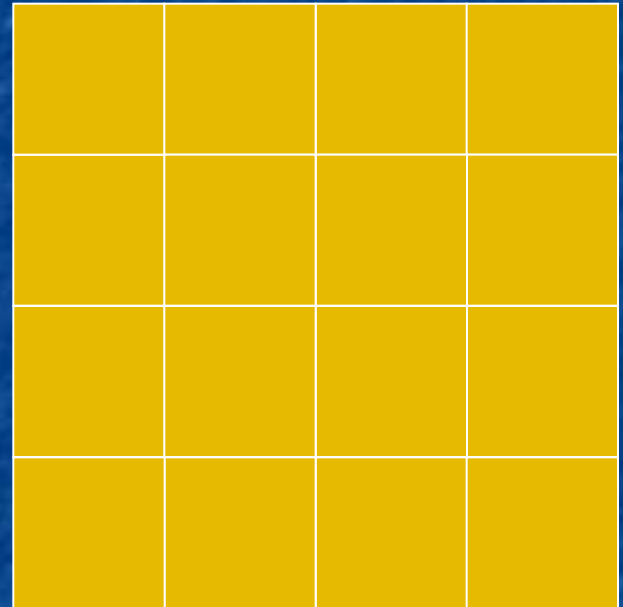
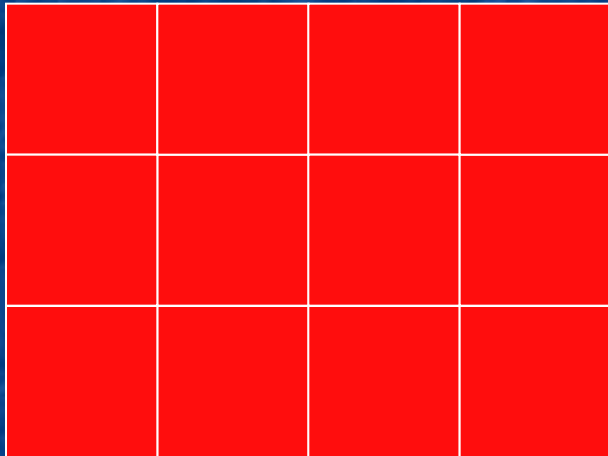


$$S = 8 \text{ кв.ед.}$$



№ прямоуголь ника	длина	ширина	площадь	
1				
2				
3				
	<i>a</i>	<i>b</i>		

Найдите длины сторон представленных прямоугольников и их площади. Запишите полученные результаты в таблицу.



№ прямоуголь ника	длина	ширина	площадь	
1	4	3	12	
2	3	2	6	
3	4	4	16	

№ прямоуголь ника	длина	ширина	площадь	
1	4	3	12	$12 = 4 \cdot 3$
2	3	2	6	$6 = 3 \cdot 2$
3	4	4	16	$16 = 4 \cdot 4$
	<i>a</i>	<i>b</i>		

№ прямоуголь ника	длина	ширина	площадь	
1	4	3	12	$12 = 4 \cdot 3$
2	3	2	6	$6 = 3 \cdot 2$
3	4	4	16	$16 = 4 \cdot 4$
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>S = a · b</i>	

$$S = a \cdot b$$

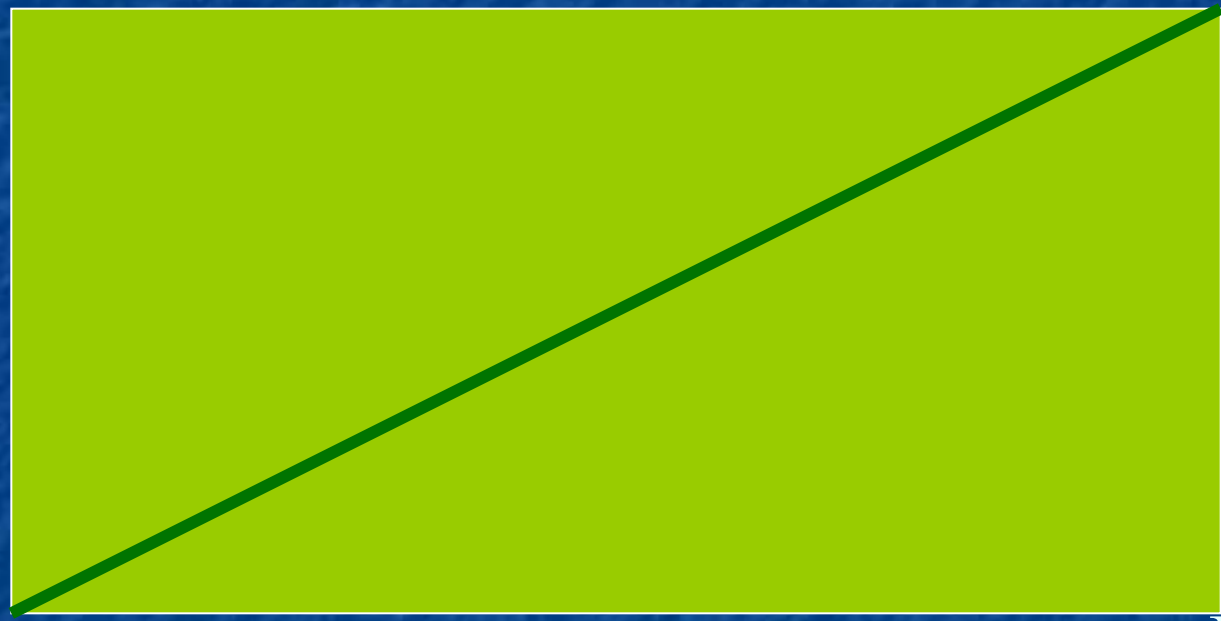
Формула площади прямоугольника

B

C

A

D



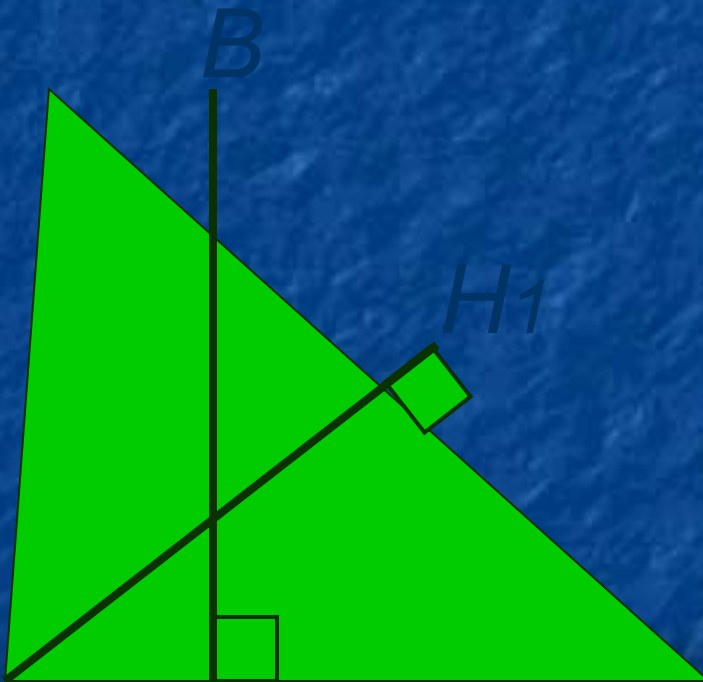
$$S_{\Delta} = S_{\square} : 2$$

- Согласны ли вы, что...
- 1. Равные фигуры имеют равные площади
- 2. Неравные фигуры имеют различные площади
- 3. Если фигуры равновеликие, то они равны
- 4. Если фигура состоит из двух частей, чтобы найти площадь всей фигуры, нужно сложить площади частей

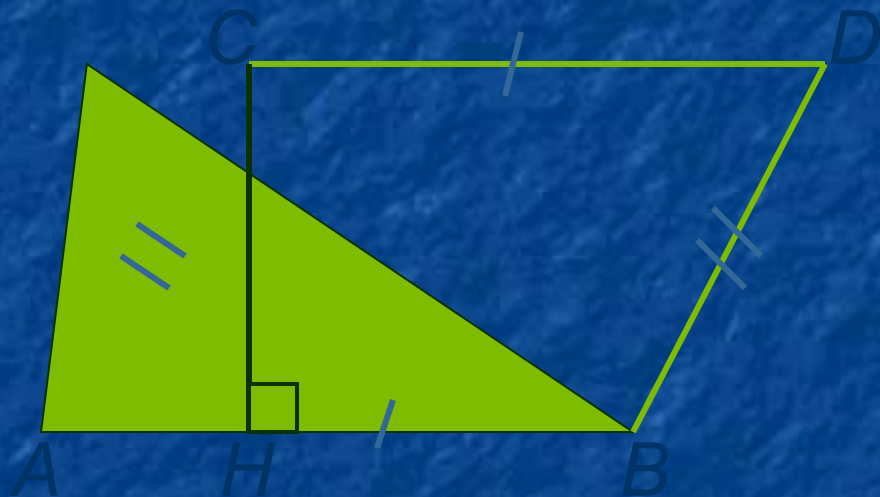
Площадь треугольника



AC- основание
BH- высота;
BC- основание
AH₁- высота



Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.



Дано: $\triangle ABC$;

CH- высота;

AB- основание.

Док-ть: $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$.

Док-во: $\triangle ABC = \triangle DCB$ (по трем сторонам (CB-
общая, $AB = CD$,

$AC = BD$)) $S_{ABC} = S_{DCB}$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, т.е. $S =$

$= \frac{1}{2} AB \cdot CH$.

Следствие 1.



Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.



BC- гипотенуза;

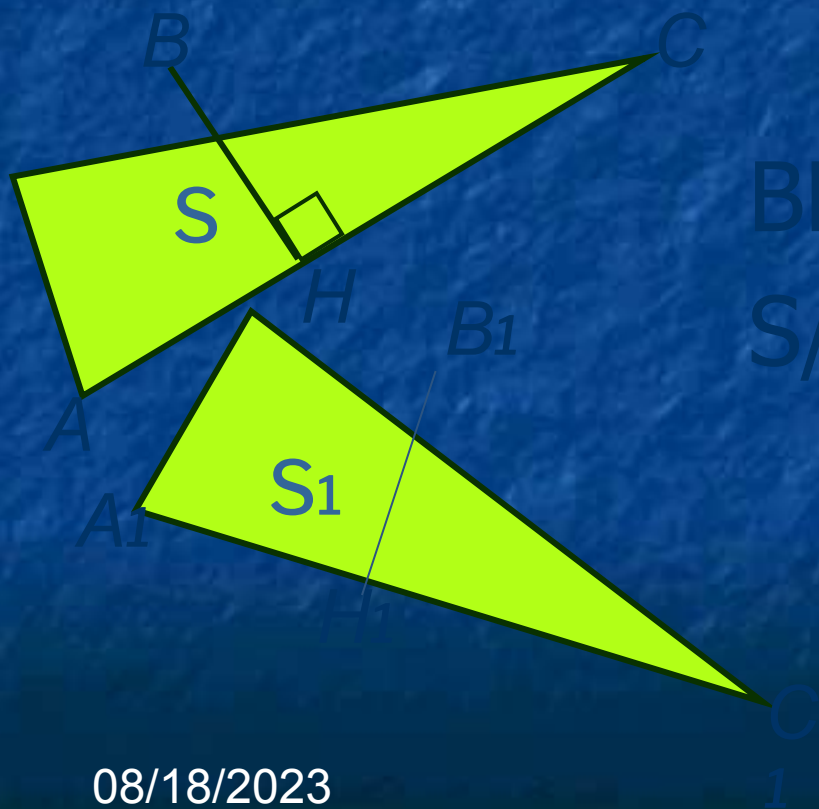
AB и AC- катеты.

\triangle ABC- прямоугольный;

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC.$$

Следствие 2.

Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

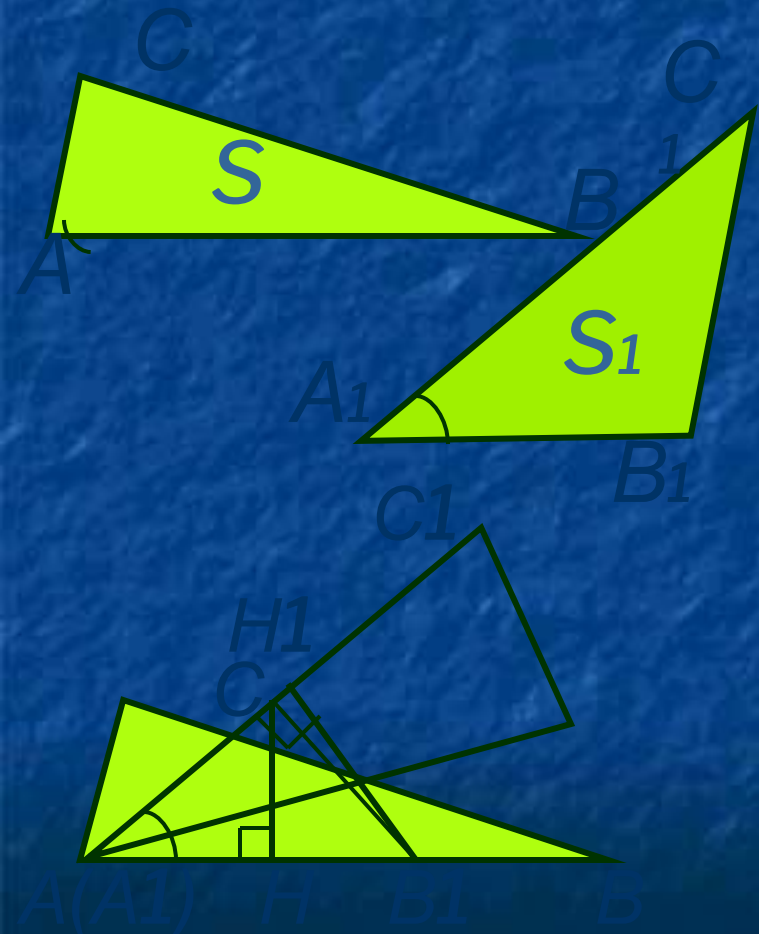


$$BH = B_1H_1$$

$$S/S_1 = AC/A_1C_1$$



Теорема. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.



Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$.

Док-ть: $S/S_1 = AC \cdot AB / A_1C_1 \cdot A_1B_1$

Док-во: Наложим $\triangle A_1B_1C_1$

на $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C$ имеют общую высоту CH , $S/S_{\triangle AB_1C} = AB / AB_1$;

$\triangle AB_1C$ и $\triangle A_1B_1C_1$ имеют общую высоту B_1H_1 ,

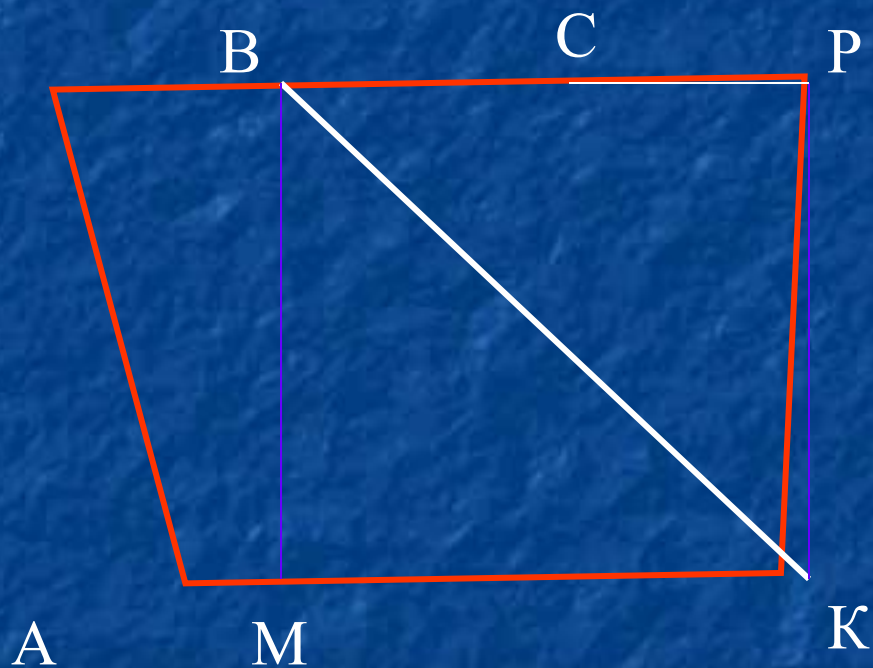
$S/S_{\triangle AB_1C} = AC / A_1C_1$;

$S/S_{\triangle AB_1C} = AB \cdot AC / AB_1 \cdot A_1C_1$ или

$S/S_1 = AB \cdot AC / A_1B_1 \cdot A_1C_1$.

Площадь трапеции

Теорема

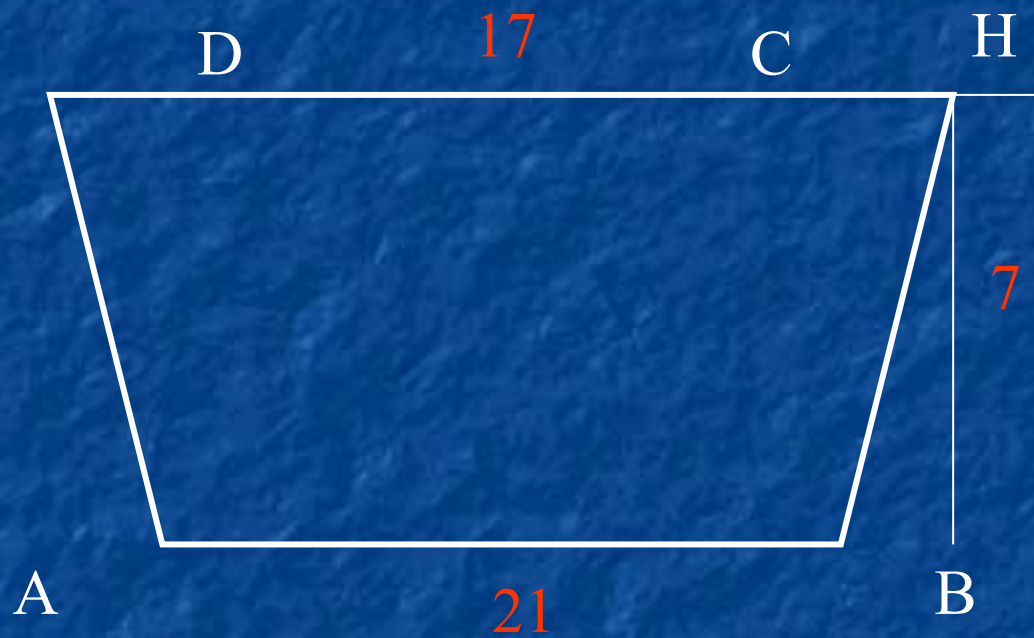


Дано: $ABCD$ – трапеция

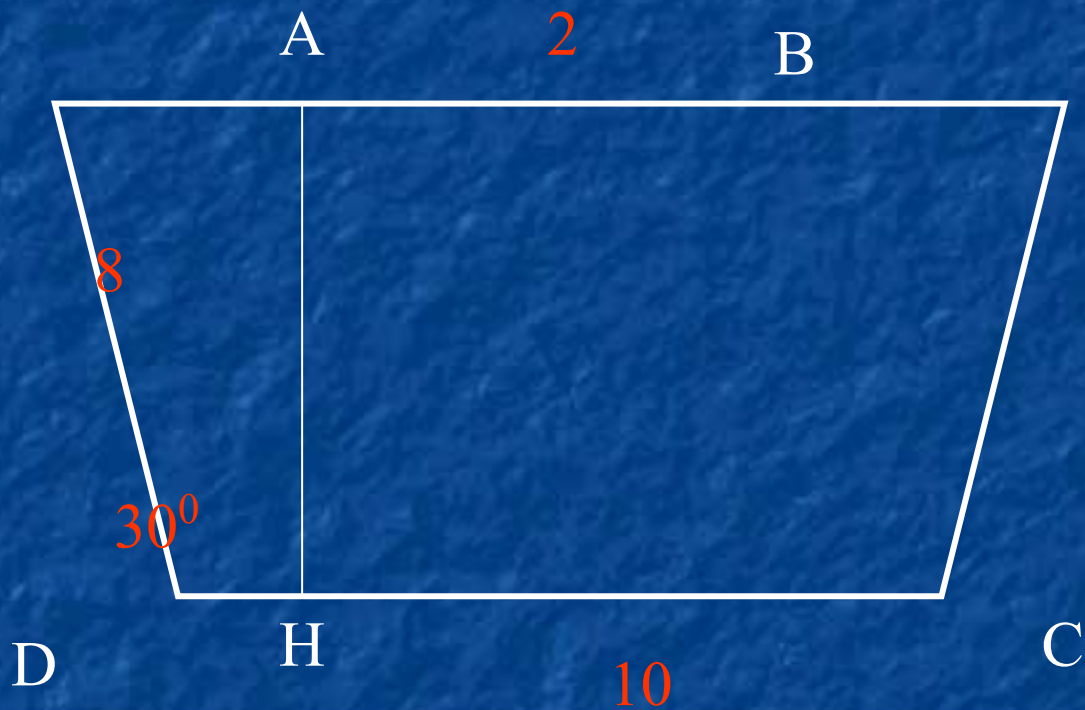
$AD = a$, $BC = b$, $BM = h$

Доказать: $S = 0,5h(a+b)$

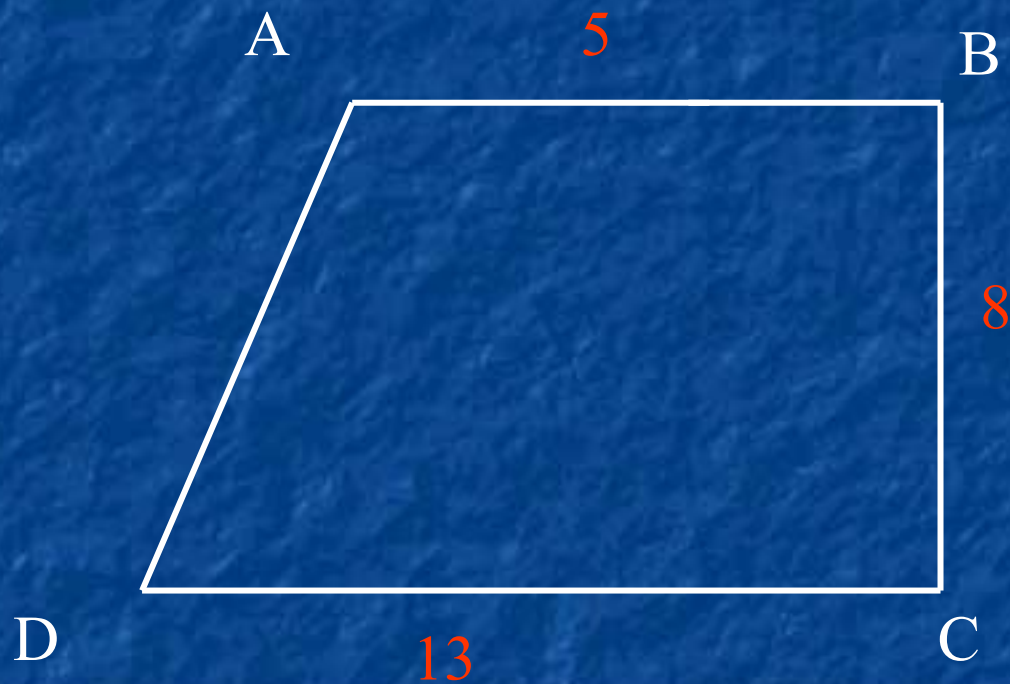
Задача



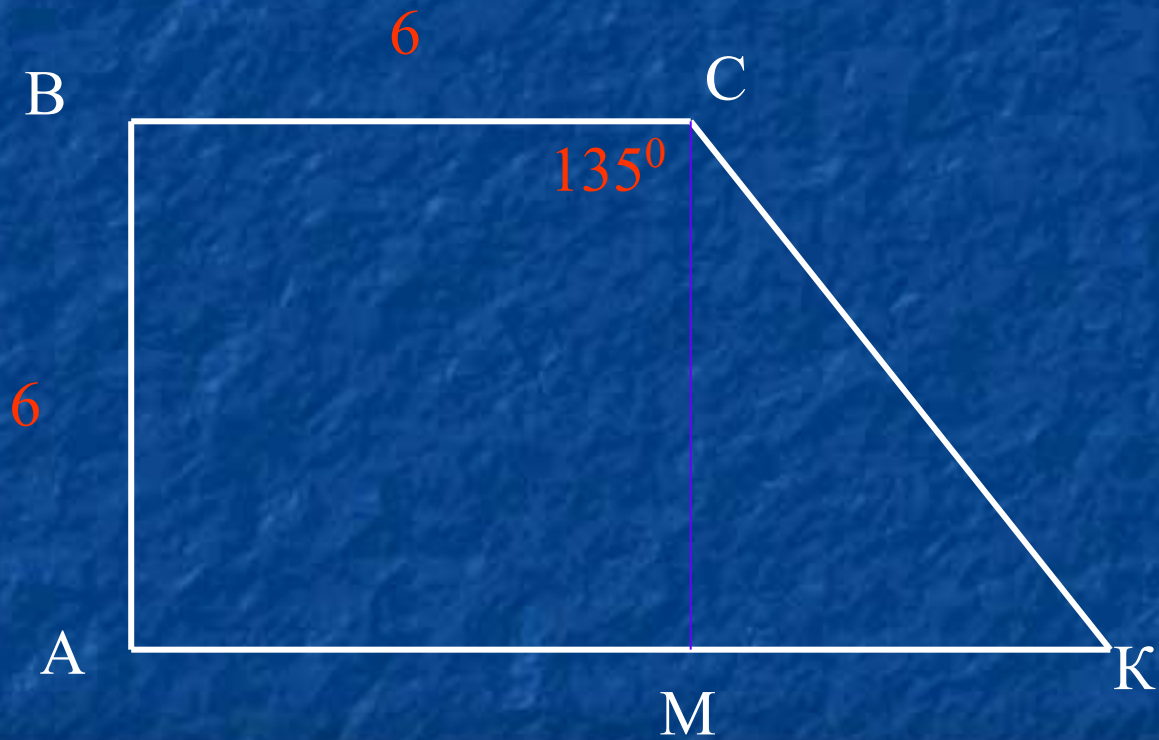
Задача



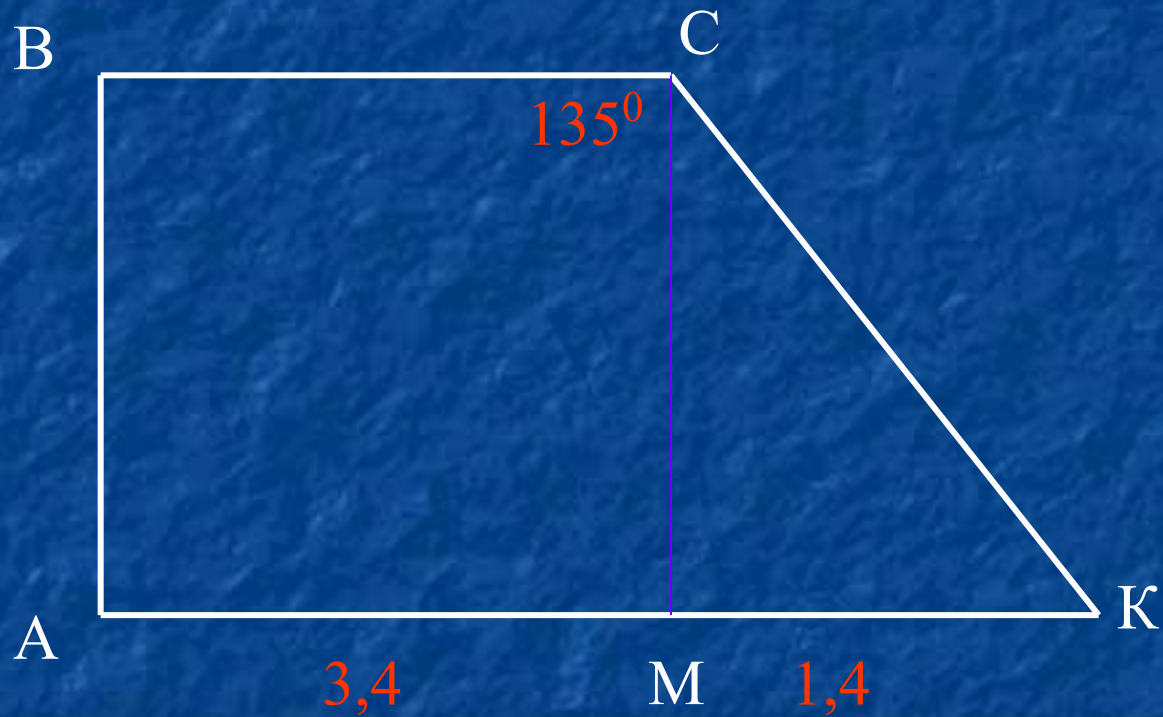
Задача



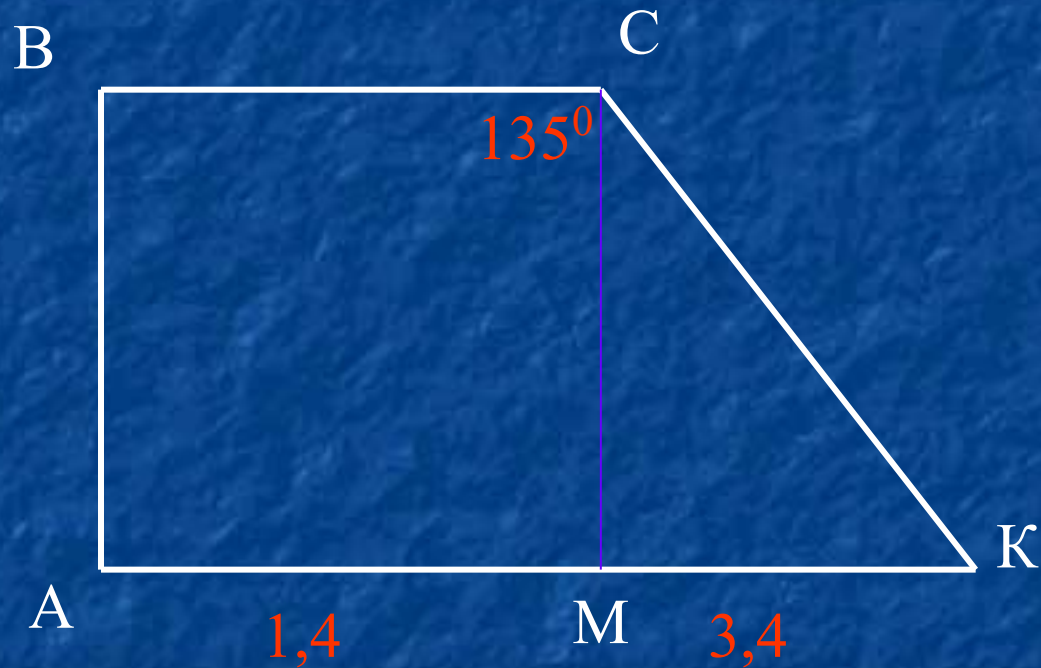
Задача



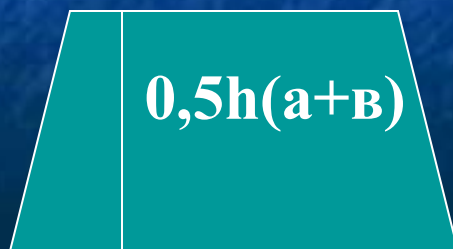
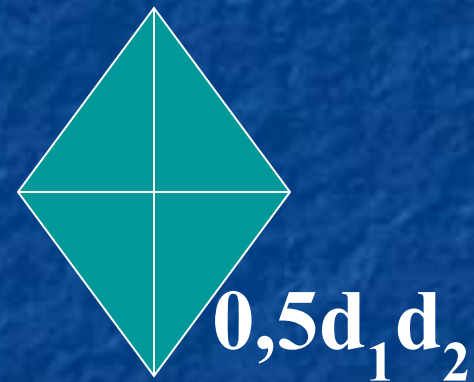
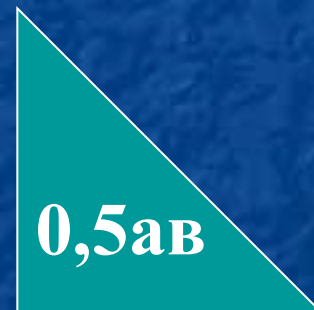
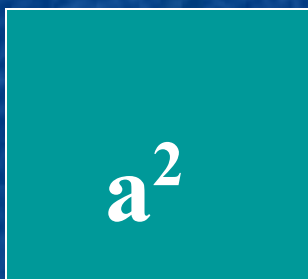
Задача



Задача



Площади многоугольников.



Самостоятельная работа

- Высота и основания трапеции относятся как 5:6:4. Найдите меньшее основание трапеции, если её площадь равна 88 см^2 .
- Высота трапеции равна меньшему основанию и в два раза меньше большего основания. Найдите высоту трапеции, если её площадь равна 54 см^2 .

Теорема Пифагора

Пребудет вечной истина, как скоро
Её познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора
Верна, как и в его далёкий век.

Содержание

- Формулировка теоремы
- Доказательства теоремы
- Значение теоремы Пифагора

Формулировка теоремы

Во времена Пифагора теорема звучала так:

- ✓ « Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах»
или
- ✓ « Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах».

Современная формулировка

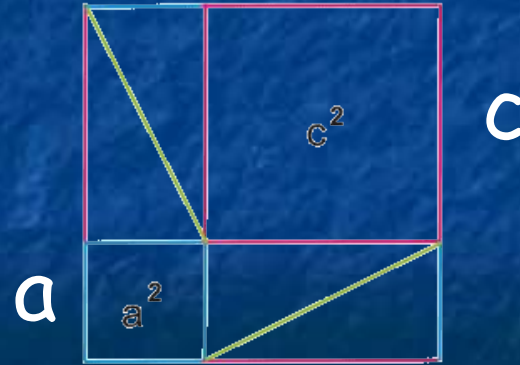
« В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

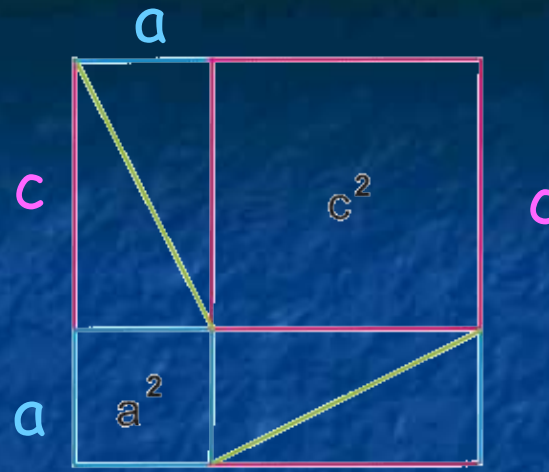
Доказательства теоремы

Существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.).

I. Самое простое доказательство

Рассмотрим квадрат,
показанный на рисунке.
Сторона квадрата равна a
 $+ c$.



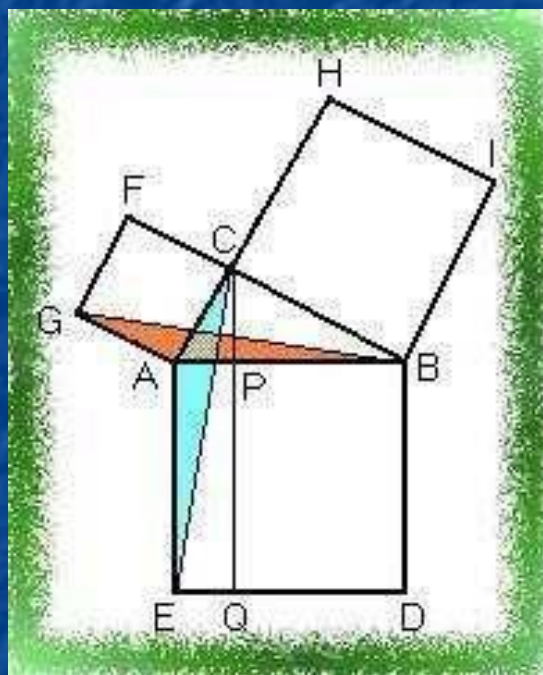


В одном случае (слева) квадрат разбит на квадрат со стороной b и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c .

В другом случае (справа) квадрат разбит на два квадрата со сторонами a и c и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c .

Таким образом, получаем, что площадь квадрата со стороной b равна сумме площадей квадратов со сторонами a и c .

II. Доказательство Евклида

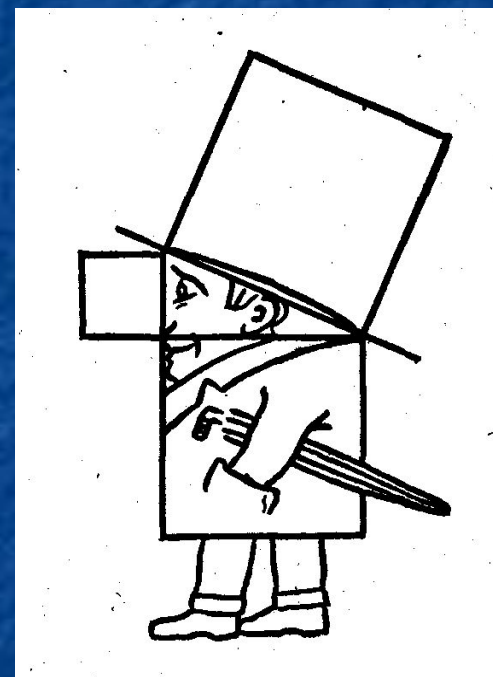


Дано:

ABC-прямоугольный
треугольник

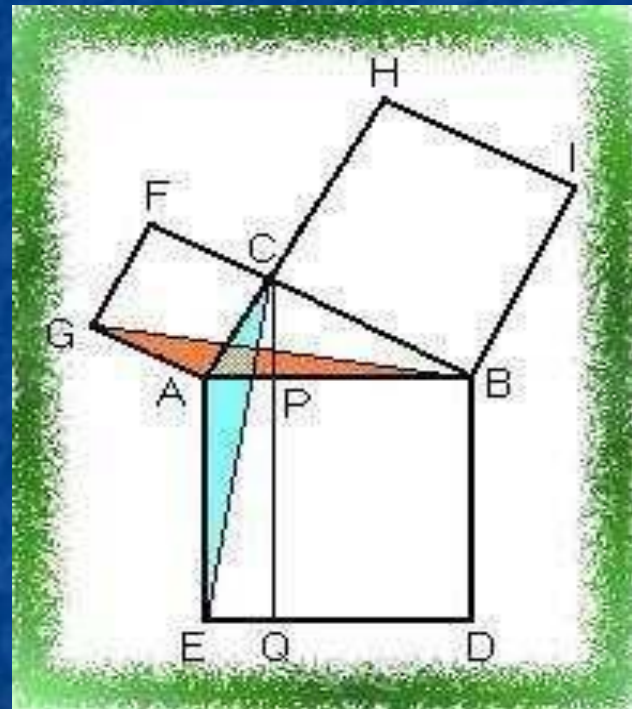
Доказать:

$$S_{ABDE} = S_{ACFG} + S_{BCHI}$$



Доказательство:

Пусть $ABDE$ -квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC , а $ACFG$ и $BCHI$ -квадраты, построенные на его катетах. Опустим из вершины C прямого угла перпендикуляр CP на гипотенузу и продолжим его до пересечения со стороной DE квадрата $ABDE$ в точке Q ; соединим точки C и E , B и G .

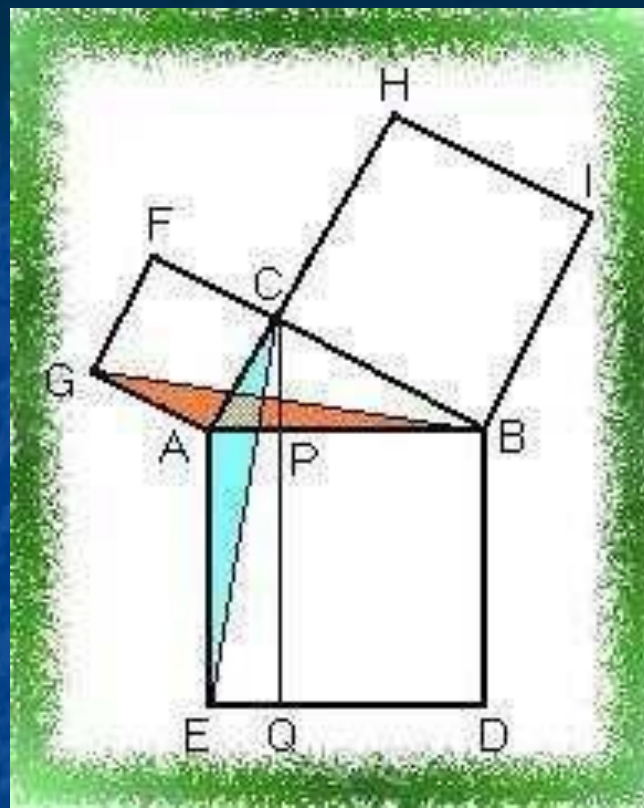


очевидно, что углы $\angle CAE = \angle GAB (=A + 90^\circ)$; отсюда следует, что треугольники $\triangle ACE$ и $\triangle AGB$ (закрашенные на рисунке) равны между собой (по двум сторонам и углу, заключённому между ними). Сравним далее треугольник $\triangle ACE$ и прямоугольник $\square PQEA$; они имеют общее основание AE и высоту AP , опущенную на это основание, следовательно

$$S_{PQEA} = 2S_{ACE}$$

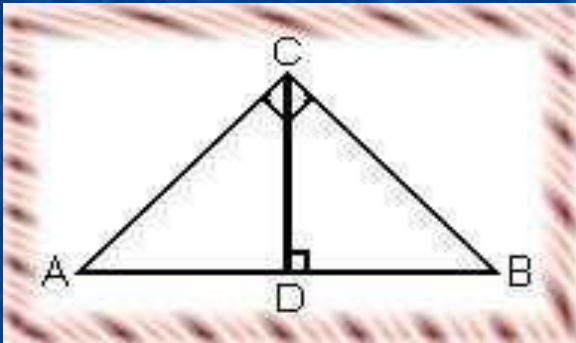
точно так же квадрат $\square FCAG$ и треугольник $\triangle BAG$ имеют общее основание GA и высоту AC ; значит,

$$S_{FCAG} = 2S_{GAB}$$



Отсюда и из равенства треугольников $\triangle ACE$ и $\triangle GBA$ вытекает равновеликость прямоугольника $\square PQBD$ и квадрата $\square FCAG$; аналогично доказывается и равновеликость прямоугольника $\square PRAE$ и квадрата $\square BCHI$. А отсюда, следует что квадрат $\square ABDE$ равновелик сумме квадратов $\square ACFG$ и $\square BCHI$, т.е. теорема Пифагора.

III. Алгебраическое доказательство



Дано: ABC -прямоугольный треугольник

Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Доказательство:

1) Проведем высоту CD из вершины прямого угла C .

2) По определению косинуса угла $\cos A = AD/AC = AC/AB$, отсюда следует $AB \cdot AD = AC^2$.

3) Аналогично $\cos B = BD/BC = BC/AB$, значит $AB \cdot BD = BC^2$.

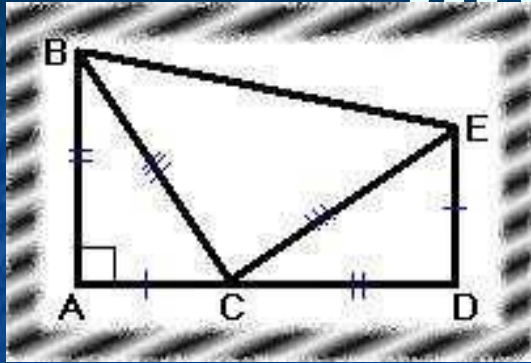
4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Что и требовалось доказать.

IV. Геометрическое доказательство



Дано: ABC -прямоугольный
треугольник

Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Доказательство:

1) Построим отрезок CD равный отрезку AB на продолжении катета AC прямоугольного треугольника ABC . Затем опустим перпендикуляр ED к отрезку AD , равный отрезку AC , соединим точки B и E .

2) Площадь фигуры $ABED$ можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED} = 2 \cdot AB \cdot AC / 2 + BC^2 / 2$$

3) Фигура $ABED$ является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED} = (DE + AB) \cdot AD / 2.$$

4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (DE + AB)(CD + AC) / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (AC + AB)^2 / 2$$

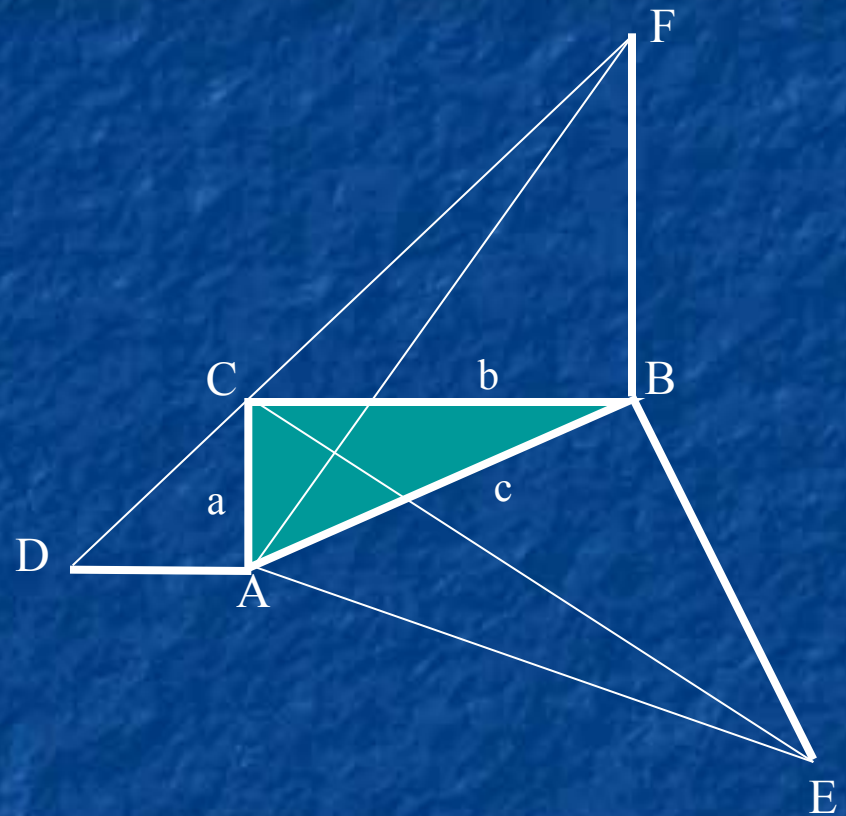
$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = AC^2 / 2 + AB^2 / 2 + AB \cdot AC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

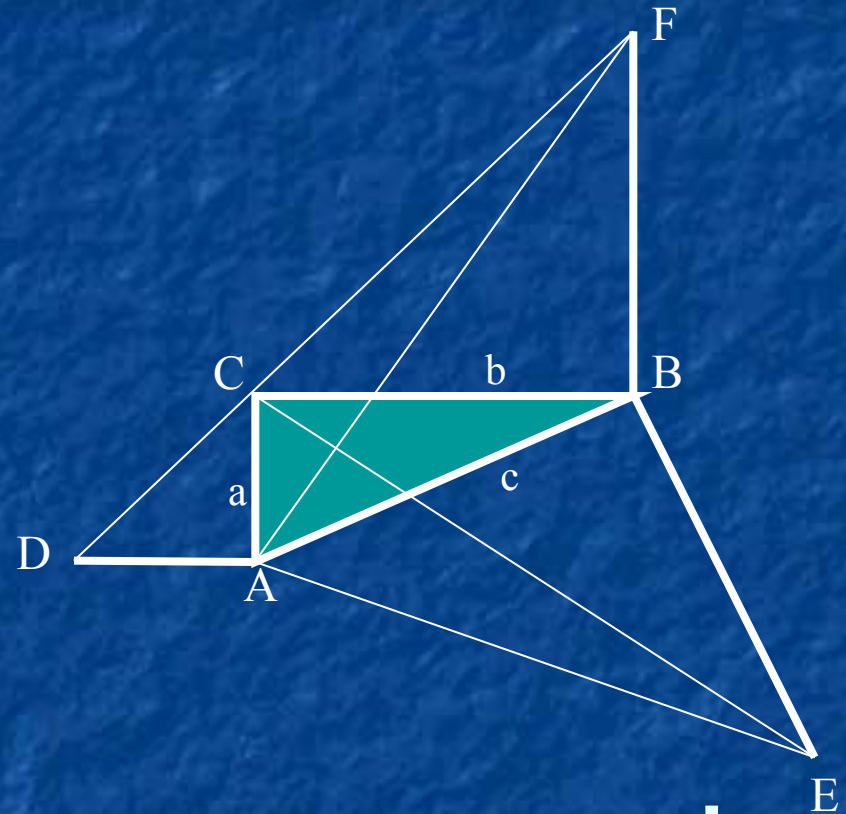
Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.

Начало доказательства

- Построим треугольник ABC с прямым углом C .
- Построим $BF=CB$, $BF \perp CB$
- Построим $BE=AB$, $BE \perp AB$
- Построим $AD=AC$, $AD \perp AC$
- Точки F, C, D принадлежат одной прямой.



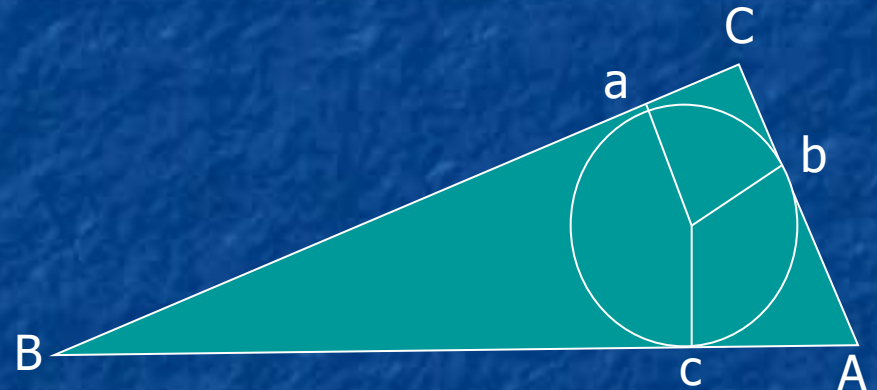
- Как мы видим, четырёхугольники $ADFB$ и $ACBE$ равновелики, т.к. $ABF = ECB$. Треугольники ADF и ACE равновелики.
- Отнимем от обоих равновеликих четырёхугольников общий для них треугольник ABC , получим:
$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2$$
- Соответственно:
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Что и требовалось доказать!

Начало доказательства

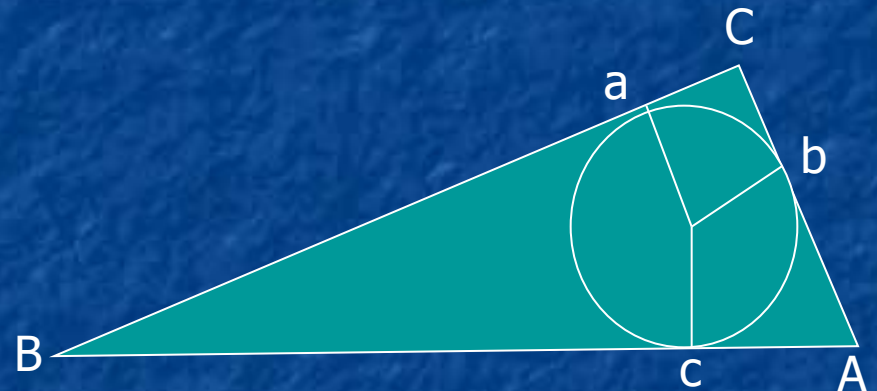
- Площадь данного прямоугольника с одной стороны равна $0.5ab$, с другой $0.5pr$, где p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной в него окружности ($r=0.5(a+b-c)$).



- Имеем:

$$0.5ab = 0.5pr = 0.5(a+b+c) \cdot 0.5(a+b-c)$$

- Отсюда следует, что $c^2 = a^2 + b^2$

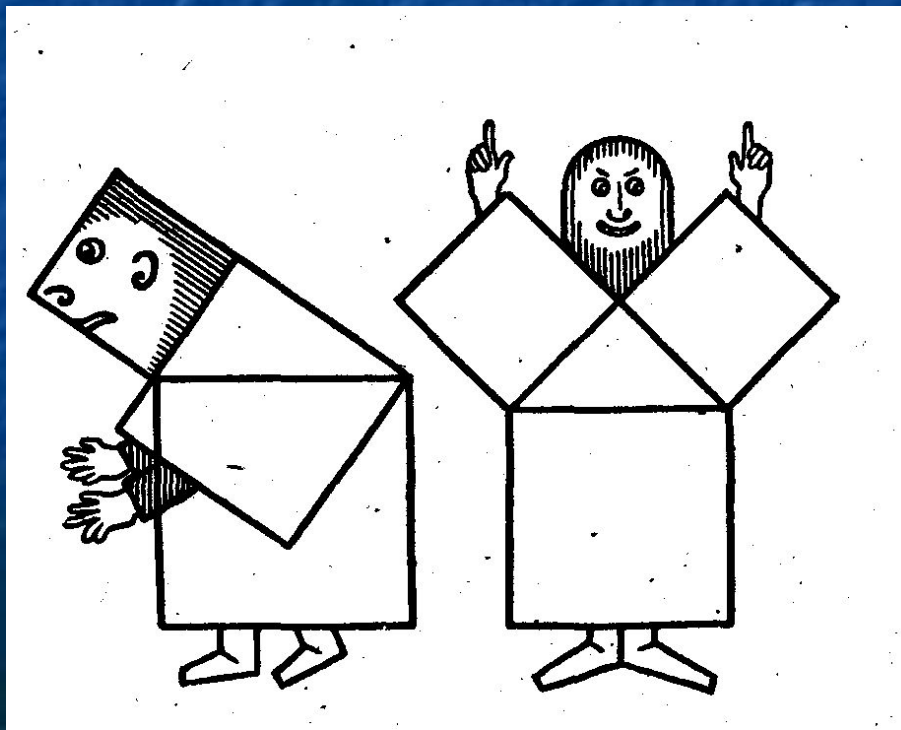


Что и требовалось доказать!

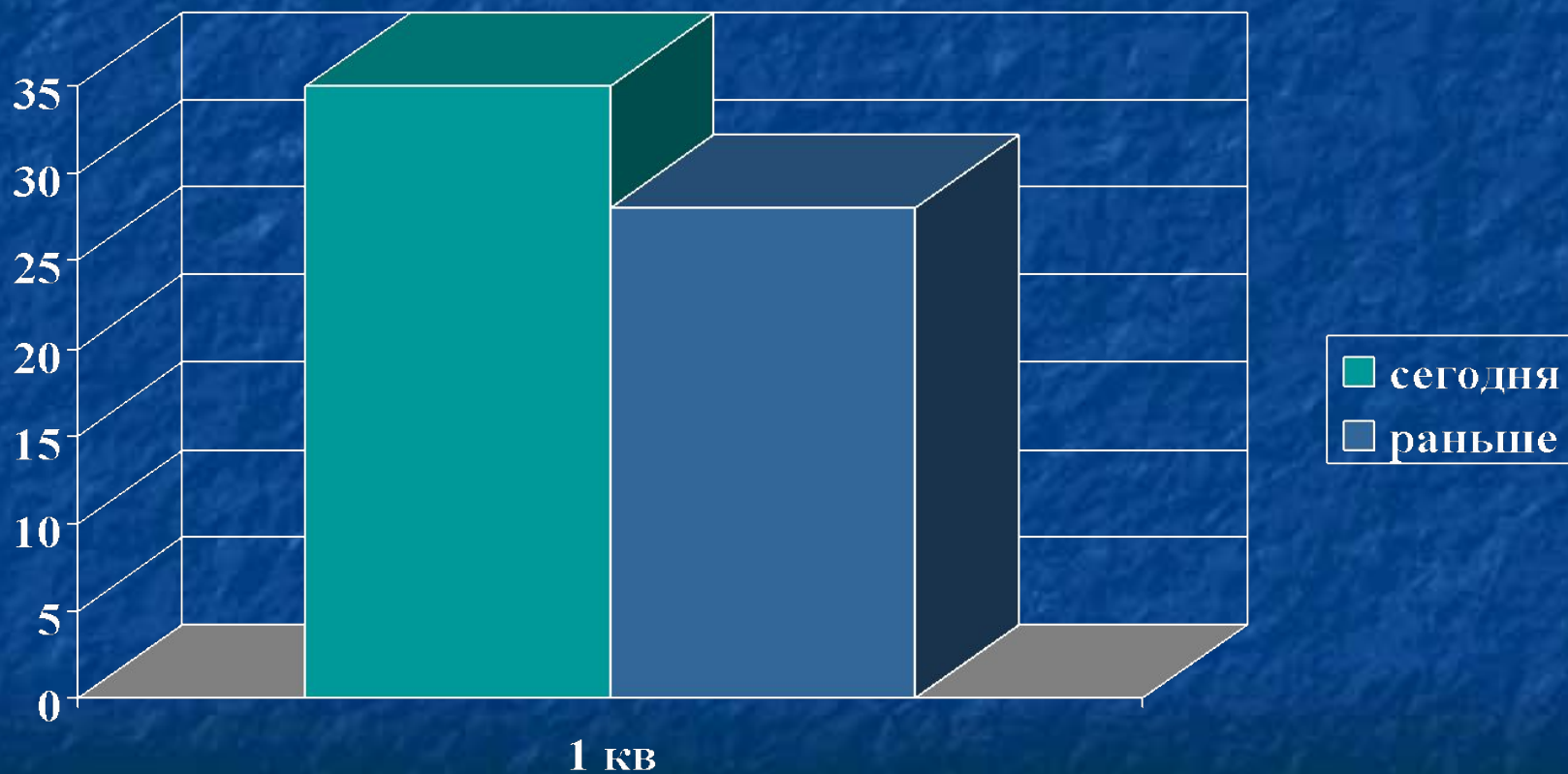
Значение теоремы Пифагора

Теорема Пифагора- это одна из самых важных теорем геометрии. Значение её состоит в том, что из неё или с её помощью можно вывести большинство теорем геометрии.

Доказательство теоремы Пифагора учащиеся средних веков считали очень трудным и называли его **Dons asinorum** - ослиный мост, или **elefuga** - бегство «убогих», так как некоторые «убогие» ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть, без понимания, и прозванные поэтому «ослами», были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста. Из-за чертежей, сопровождающих теорему Пифагора, учащиеся называли ее также «ветряной мельницей», составляли стихи, вроде «Пифагоровы штаны на все стороны равны», рисовали карикатуры.



Здесь показано на сколько больше доказательств стало
в наше время



Подведём итоги

Доказательств теоремы
Пифагора очень много и они
открываются до сих пор ,так что
не унывайте ,может вы найдёте
ещё доказательство :)

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

ПРИМЕНЕНИЕ



ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

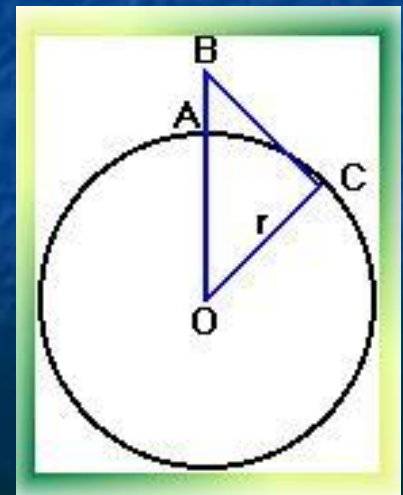
- Строительство
- Астрономия
- Мобильная связь



Мобильная связь

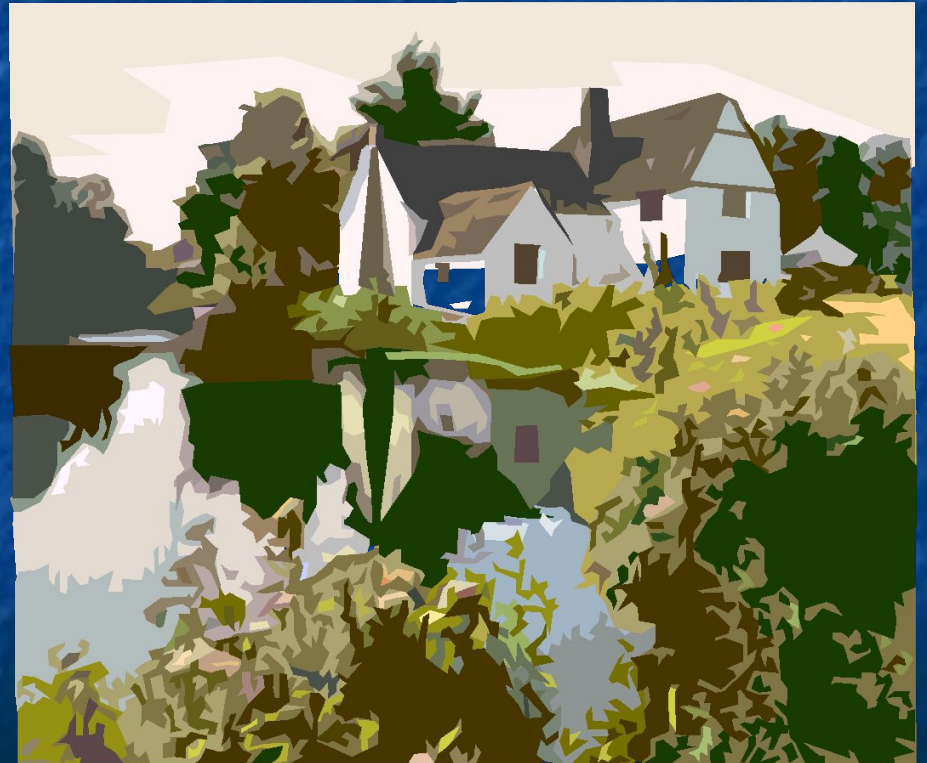
- Какую наибольшую высоту должна иметь антенна мобильного оператора, чтобы передачу можно было принимать в радиусе $R=200$ км? (радиус Земли равен 6380 км.)
- **Решение:**
- Пусть $AB=x$, $BC=R=200$ км, $OC=r=6380$ км.
- $OB=OA+AB$
 $OB=r+x$.
- Используя теорему Пифагора, получим **км.**

Ответ: 2,3



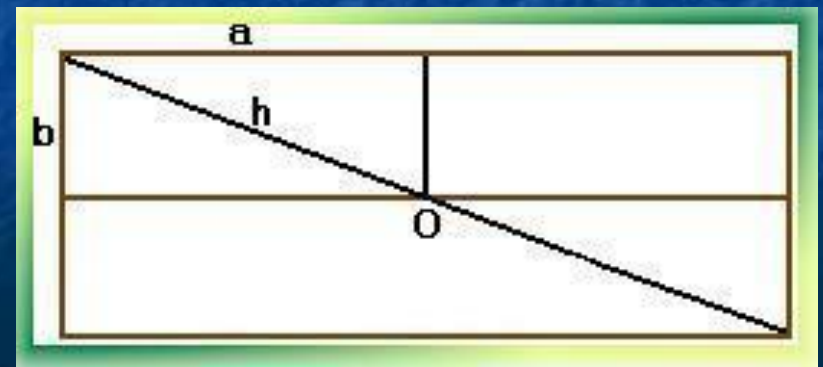
Строительство

- Окна
- Крыши
- Молниеотводы



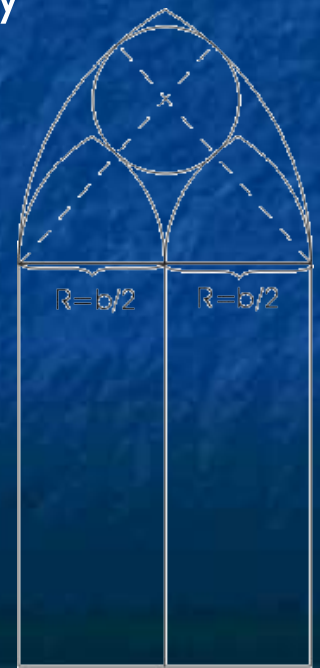
Молниеотвод

- Известно, что молниеотвод защищает от молнии все предметы, расстояние которых от его основания не превышает его удвоенной высоты. Необходимо определить оптимальное положение молниеотвода на двускатной крыше, обеспечивающее наименьшую его доступную высоту.
- **Решение:**
- По теореме Пифагора $h^2 \geq a^2 + b^2$, значит $h \geq (a^2 + b^2)^{1/2}$.

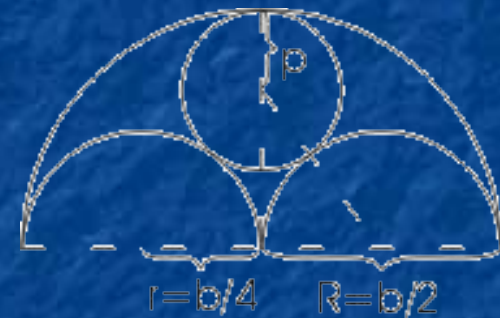


Окна

- В зданиях **готического и романского стиля** верхние части окон расчленяются каменными ребрами, которые не только играют роль орнамента, но и способствуют прочности окон. На рисунке представлен простой пример такого окна в готическом стиле. Способ построения его очень прост: Из рисунка легко найти центры шести дуг окружностей, радиусы которых равны ширине окна (b) для наружных дуг
- половине ширины, ($b/2$) для внутренних дуг
- Остается еще полная окружность, касающаяся четырех дуг. Т. к. она заключена между двумя концентрическими окружностями, то ее диаметр равен расстоянию между этими окружностями, т. е. $b/2$ и, следовательно, радиус равен $b/4$. А тогда становится ясным и положение ее центра.

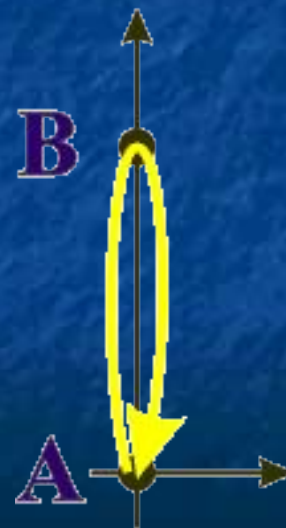


- В **романской архитектуре** часто встречается мотив, представленный на рисунке. Если b по-прежнему обозначает ширину окна, то радиусы полуокружностей будут равны $R = b / 2$ и $r = b / 4$. Радиус p внутренней окружности можно вычислить из прямоугольного треугольника, изображенного на рис. пунктиром. Гипотенуза этого треугольника, проходящая через точку касания окружностей, равна $b/4+p$, один катет равен $b/4$, а другой $b/2-p$. По теореме Пифагора имеем:
 - $(b/4+p)^2 = (b/4)^2 + (b/2-p)^2$
 - или
 - $b/16 + bp/2 + p^2 = b/16 + b/4 - bp + p^2$,
 - откуда
 - $bp/2 = b/4 - bp$.
 - Разделив на b и приводя подобные члены, получим:
 - $(3/2)p = b/4$, $p = b/6$.

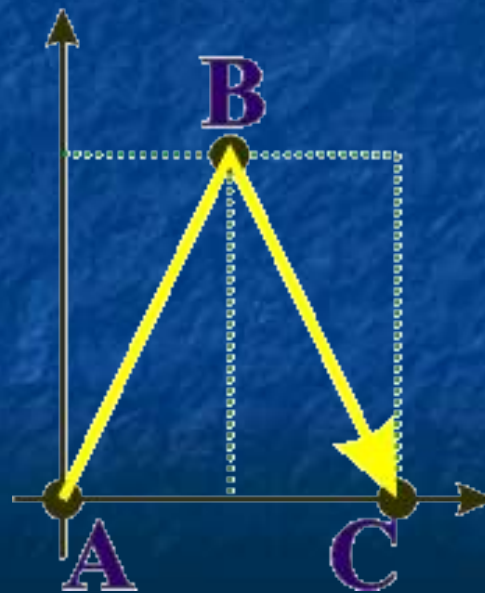


Астрономия

- На этом рисунке показаны точки А и В и путь светового луча от А к В и обратно. Путь луча показан изогнутой стрелкой для наглядности, на самом деле, световой луч - прямой.
- Какой путь проходит луч? Поскольку свет идет туда и обратно одинаковый путь, спросим сразу: чему равно расстояние между точками?



- На этом рисунке показан путь светового луча только с другой точки зрения, например из космического корабля. Предположим, что корабль движется влево. Тогда две точки, между которыми движется световой луч, станут двигаться вправо с той же скоростью. Причем, в то время, пока луч пробегает свой путь, исходная точка А смещается и луч возвращается уже в новую точку С.



- В конце девятнадцатого века высказывались разнообразные предположения о существовании обитателей Марса подобных человеку. В шутку, хотя и не совсем безосновательно, было решено **передать обитателям Марса сигнал в виде теоремы Пифагора**. Неизвестно, как это сделать; но для всех очевидно, что математический факт, выражаемый теоремой Пифагора имеет место всюду и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал.



Строительство крыши

При строительстве домов и коттеджей часто встает вопрос о длине стропил для крыши, если уже изготовлены балки. Например: в доме задумано построить двускатную крышу (форма в сечении). Какой длины должны быть стропила, если изготовлены балки $AC=8$ м., и $AB=BF$.

Решение:

Треугольник ADC - равнобедренный $AB=BC=4$ м., $BF=4$ м. Если предположить, что $FD=1,5$ м., тогда:

А) Из треугольника DBC : $DB=2,5$ м.,

Б) Из треугольника ABF :

$$AF = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \approx 5,7$$

