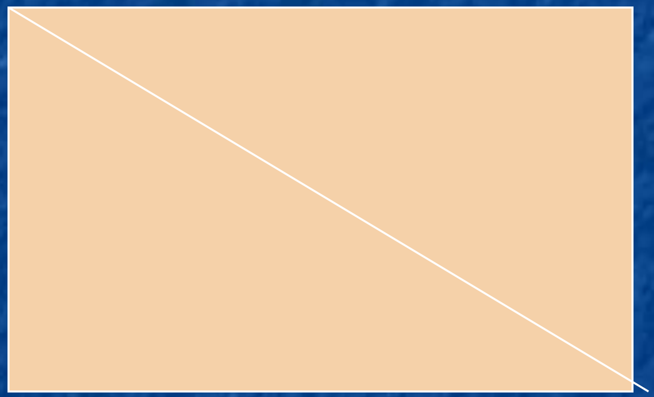
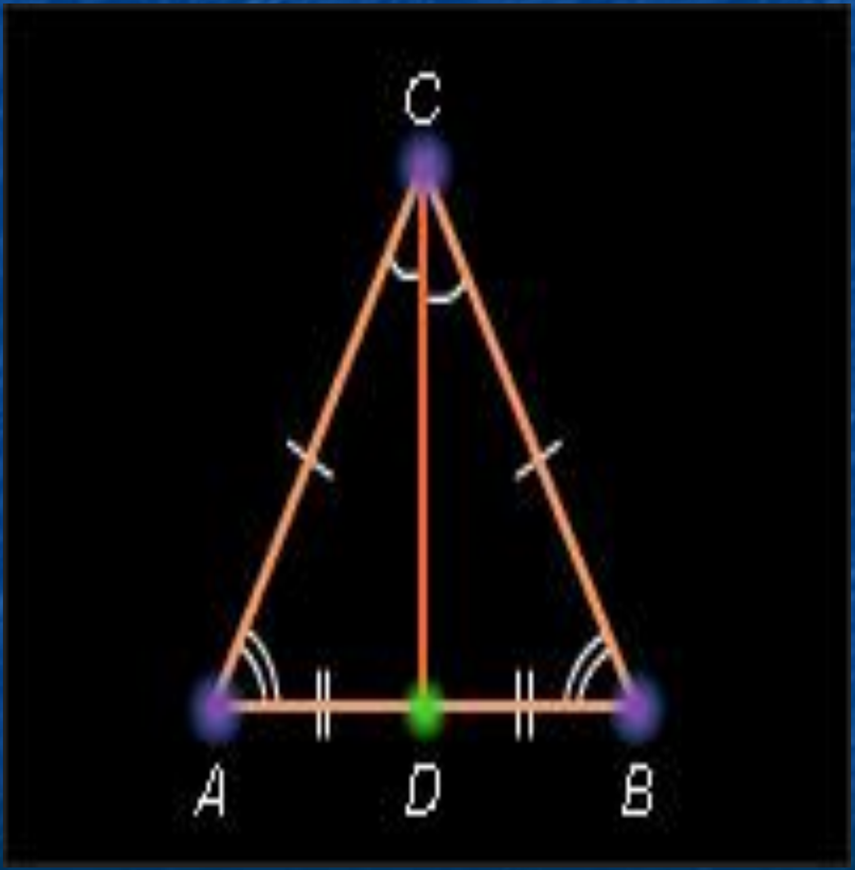
Площадь многоугольника

- Геометрическая фигура называется ***простой***, если ее можно разбить на конечное число треугольников. Очевидно, что выпуклый плоский многоугольник является простой фигурой.



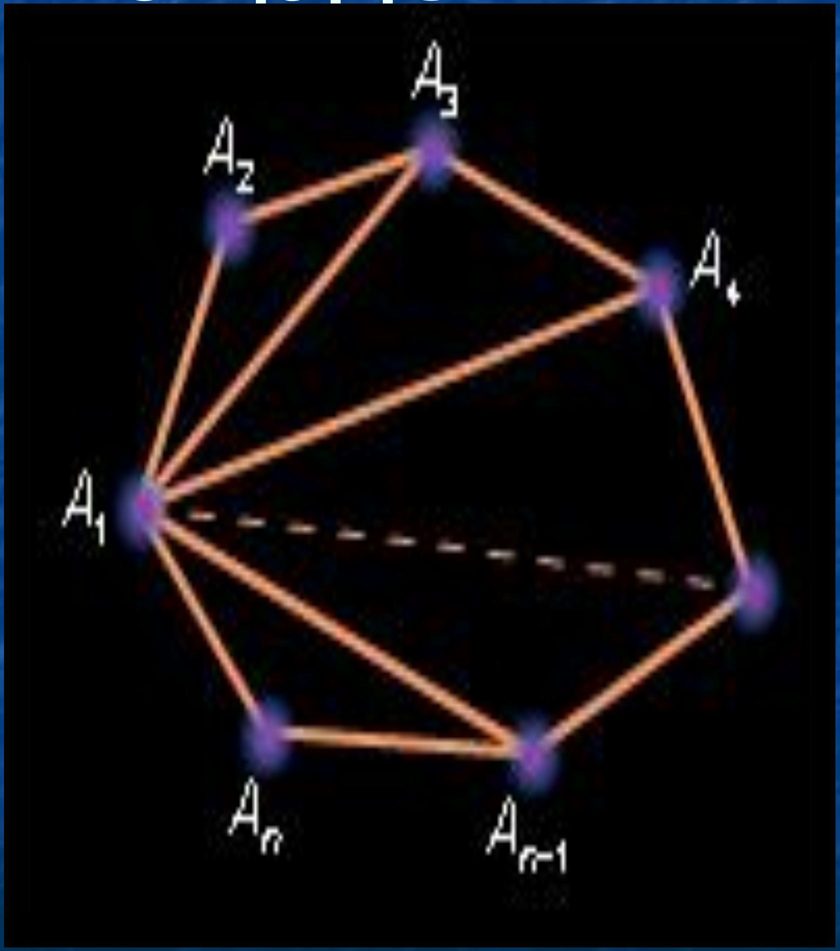
Свойства площадей

- равные многоугольники имеют одну и ту же площадь;



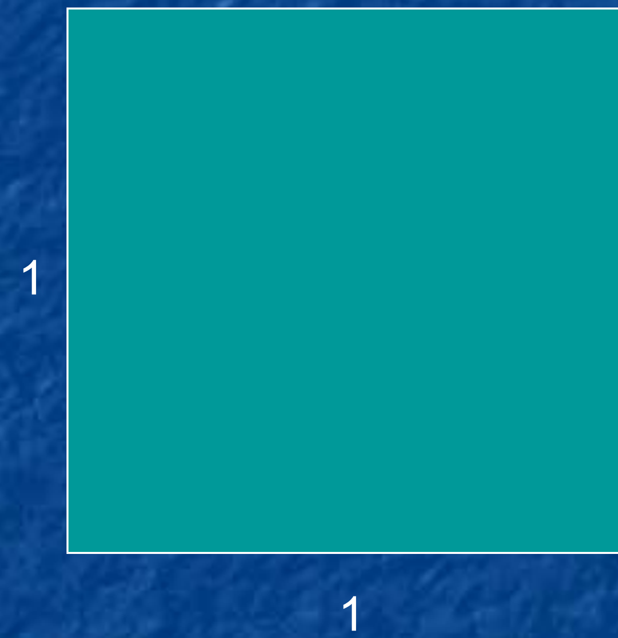
Свойства площадей

- если фигура разбита на конечное число простых фигур, то ее площадь равна сумме площадей этих простых фигур;



Свойства площадей

- площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.



$S_{\text{квадрата}}=1$

Измерение площади состоит в сравнении площади S_F данной фигуры F с площадью квадрата со стороной, равной единице измерения

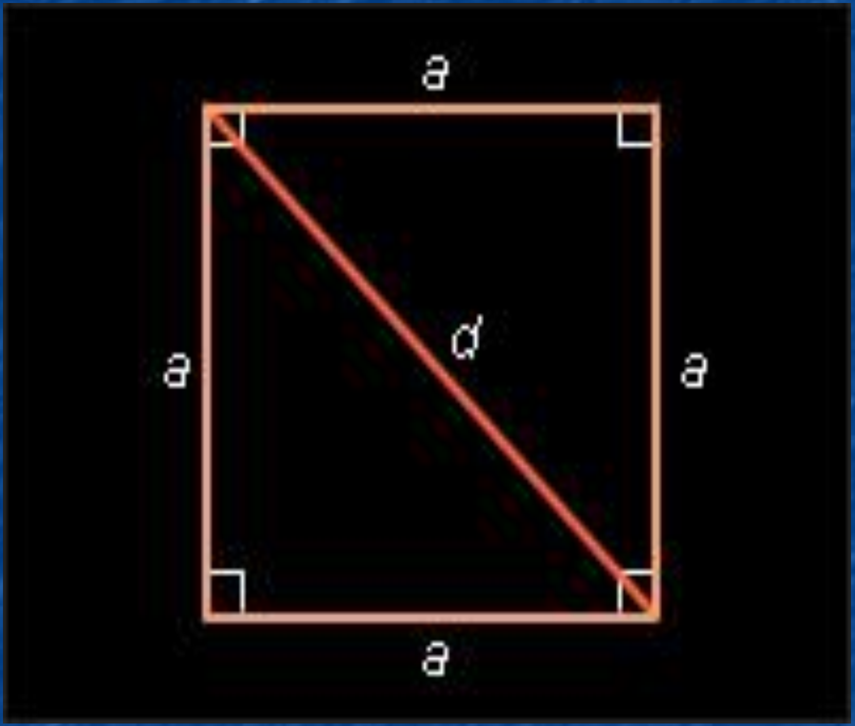
- В результате сравнения получается некоторое число – ***численное значение площади*** данной фигуры, которое показывает, во сколько раз отличается площадь фигуры F от площади ***единичного квадрата***

Фигуры, имеющие одинаковую площадь, называются ***равновеликими***.

- Площади равных фигур равны.

Квадрат

- **$S = a^2$, где а-сторона квадрата**
- **$P=4a$, где а-сторона квадрата**



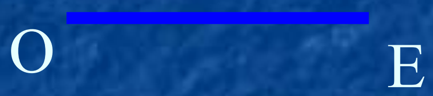
Квадрат

- **$S = a^2$, где а- сторона квадрата**
- **$P=4a$,где а- сторона квадрата**

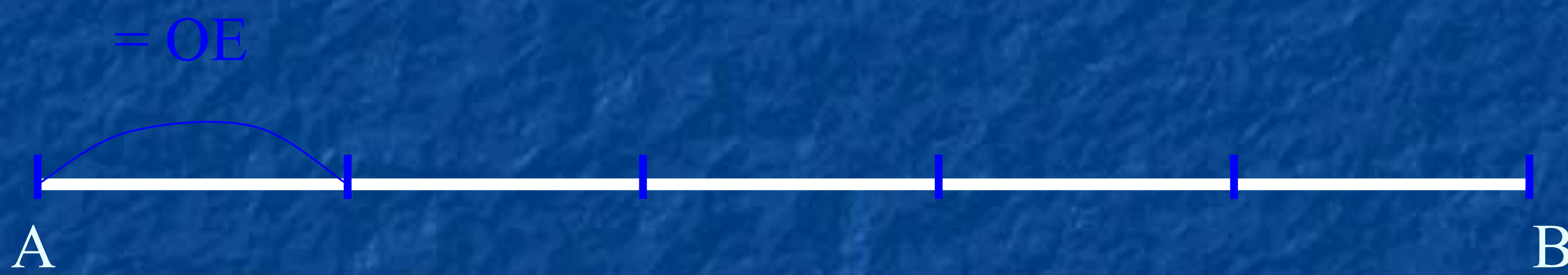
- Решить задачу
- Разность периметров двух квадратов равна 12 см, а разность их площадей – 105 см^2. Найти площадь меньшего из них.

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

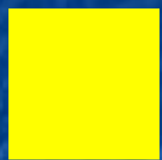


$OE = 1$

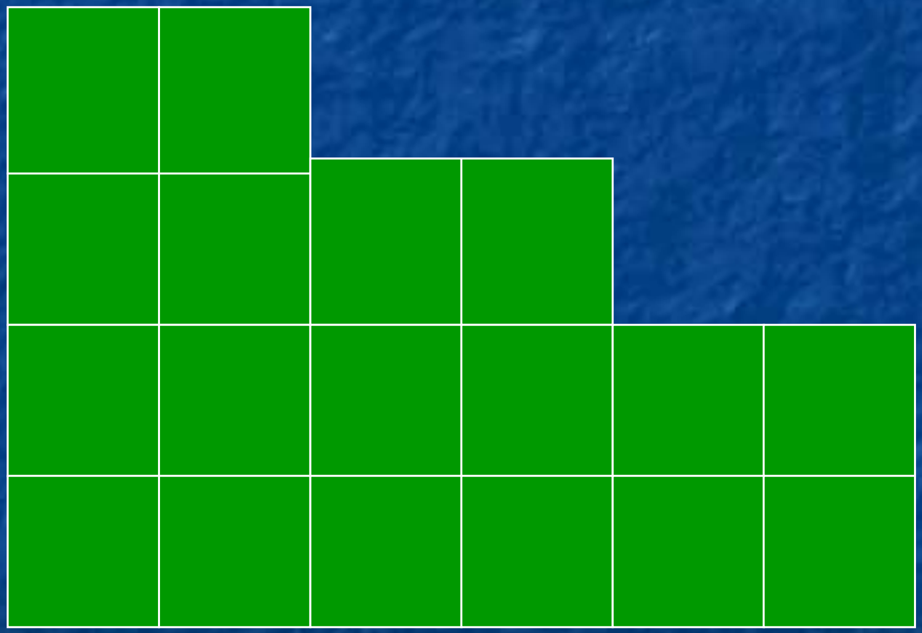


$AB = 5$

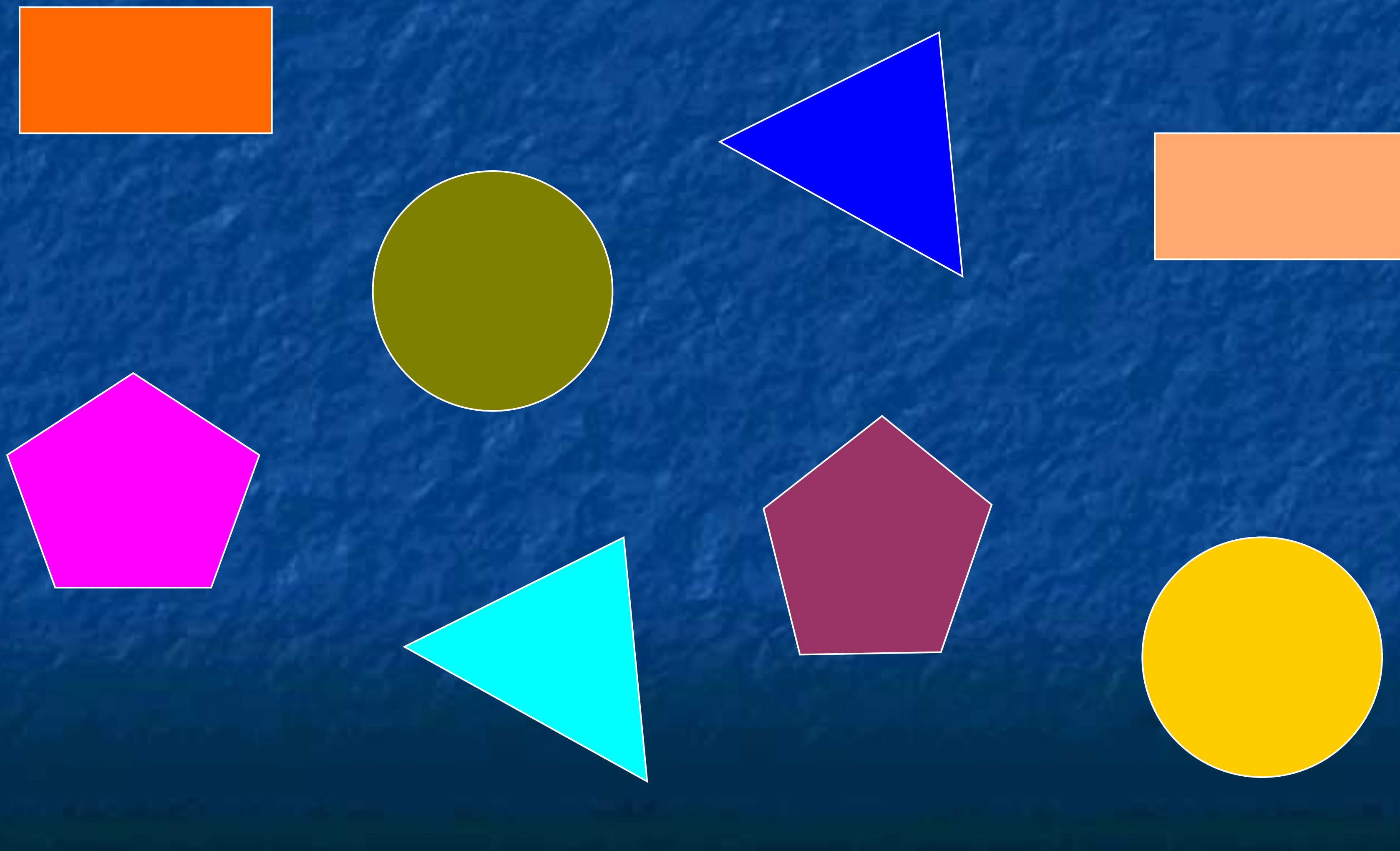
S = 18 кв.ед.



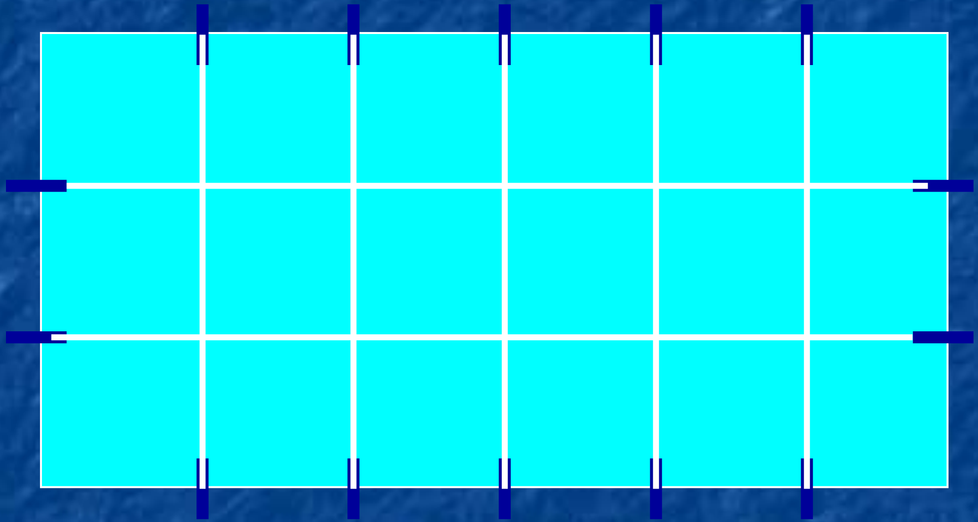
1 кв. ед.

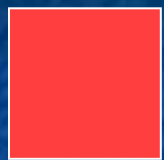


РАВНЫЕ ФИГУРЫ

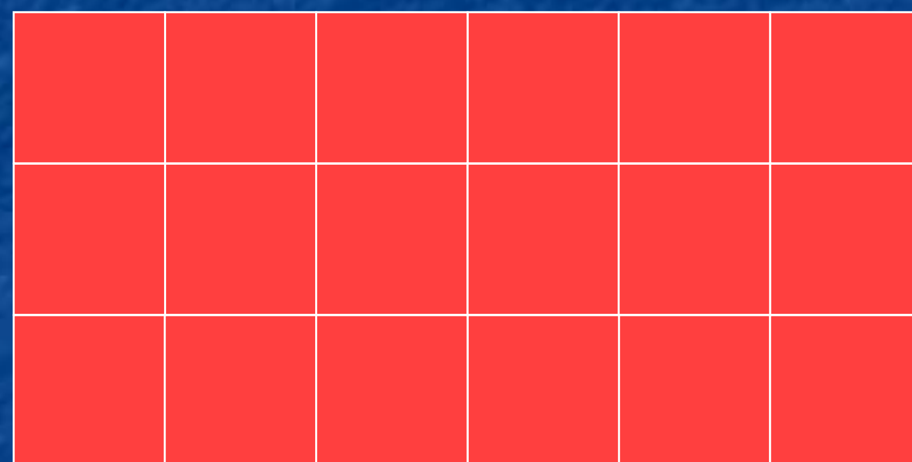


Равные фигуры – равные площади.



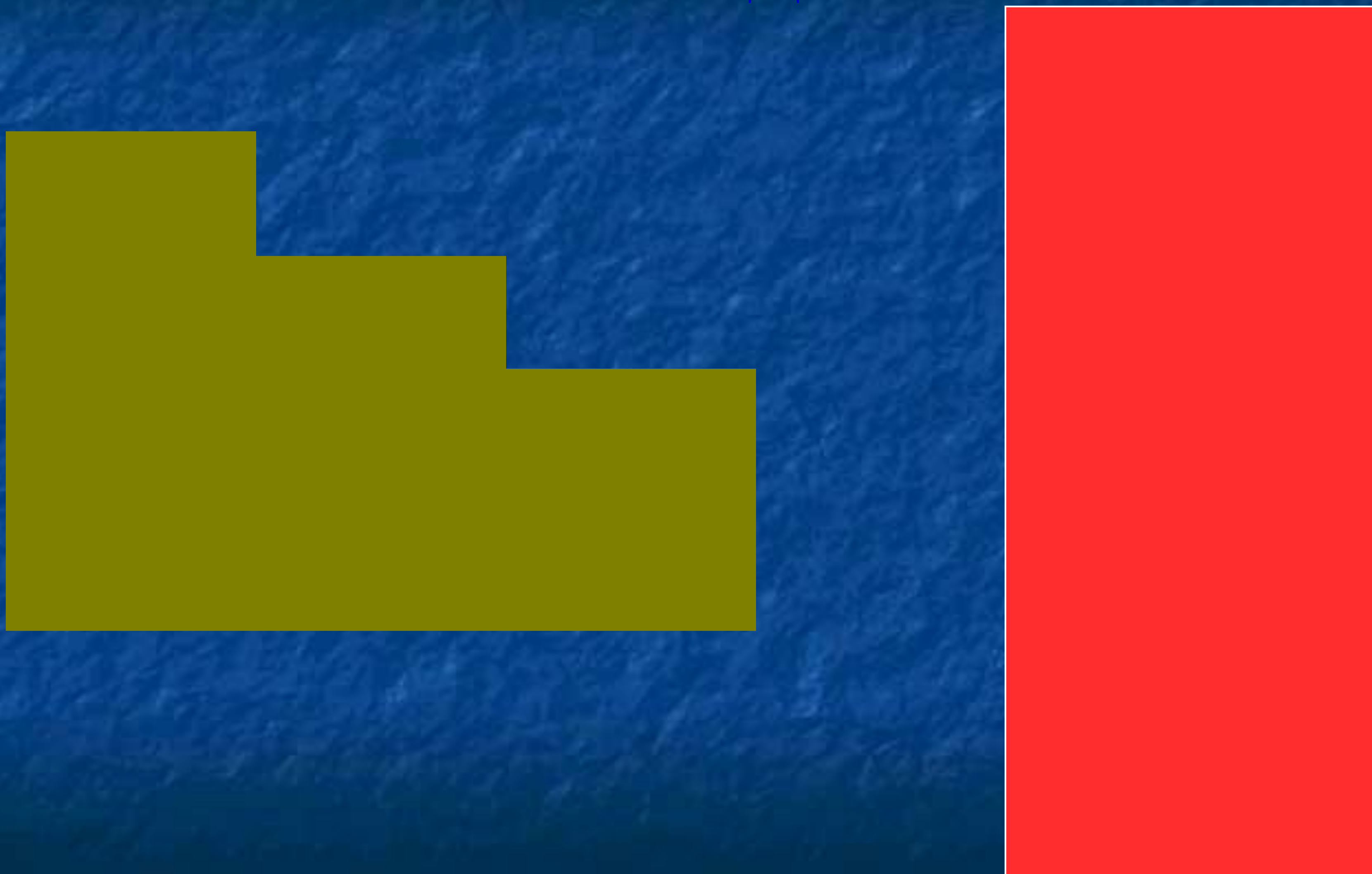


S = ? кв.ед.



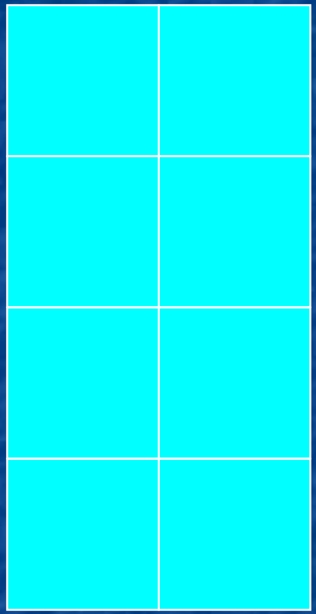
S = 18 кв.ед.

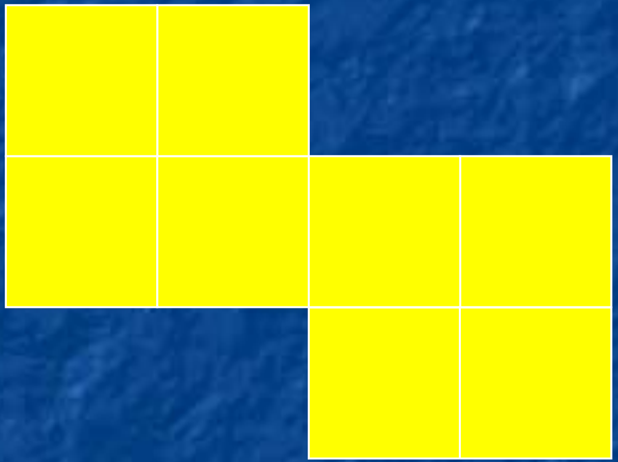
S = 18 кв.ед.

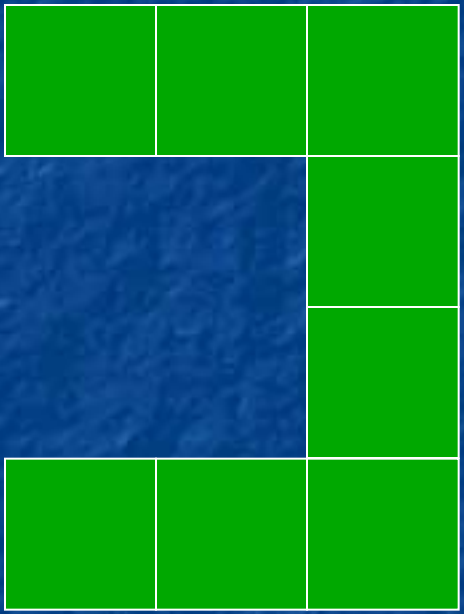


Фигуры, имеющие равную площадь, называются ***равновеликими.***

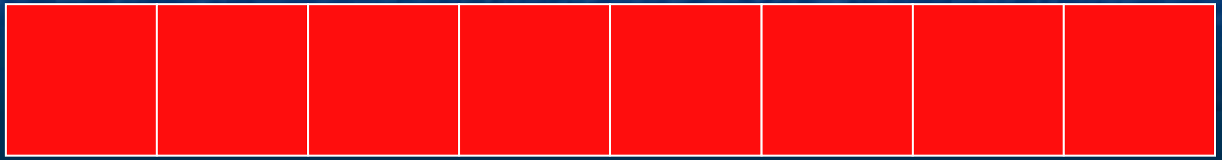
РАВНОВЕЛИКИЕ ФИГУРЫ





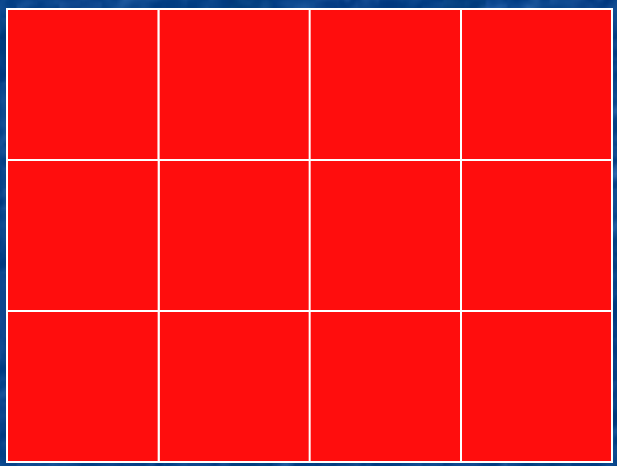


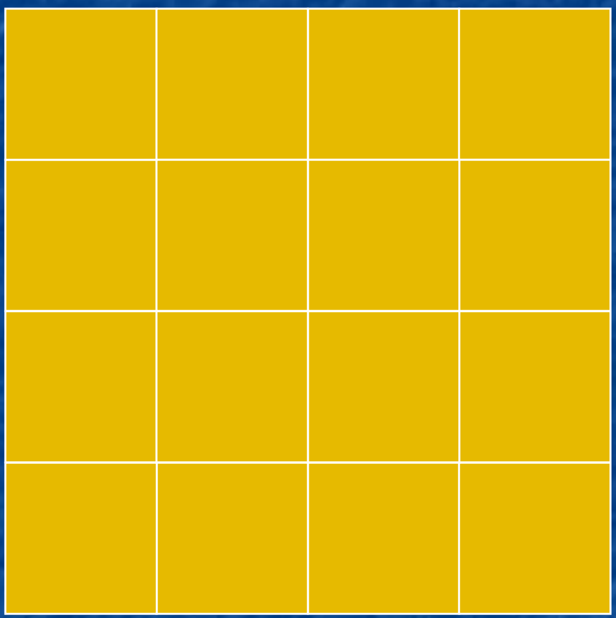
S = 8 кв.ед.

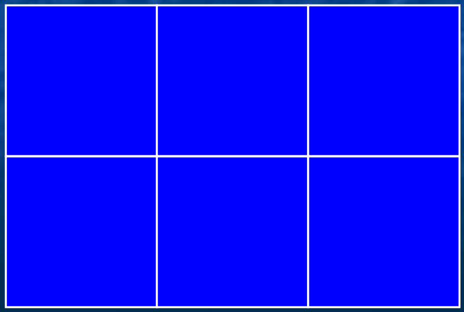


№ прямоугольника	длина	ширина	площадь	
1				
2				
3				
	a	***b***		

Найдите длины сторон представленных прямоугольников и их площади. Запишите полученные результаты в таблицу.







№ прямоугольника	длина	ширина	площадь	
1	4	3	12	
2	3	2	6	
3	4	4	16	

№ прямоугольника	длина	ширина	площадь	
1	4	3	12	$12 = 4 \cdot 3$
2	3	2	6	$6 = 3 \cdot 2$
3	4	4	16	$16 = 4 \cdot 4$
	a	***b***		

№ прямоугольника	длина	ширина	площадь	
1	4	3	12	$12 = 4 \cdot 3$
2	3	2	6	$6 = 3 \cdot 2$
3	4	4	16	$16 = 4 \cdot 4$
	a	b	$S = a \cdot b$	

$$S = a \cdot b$$

Формула площади прямоугольника

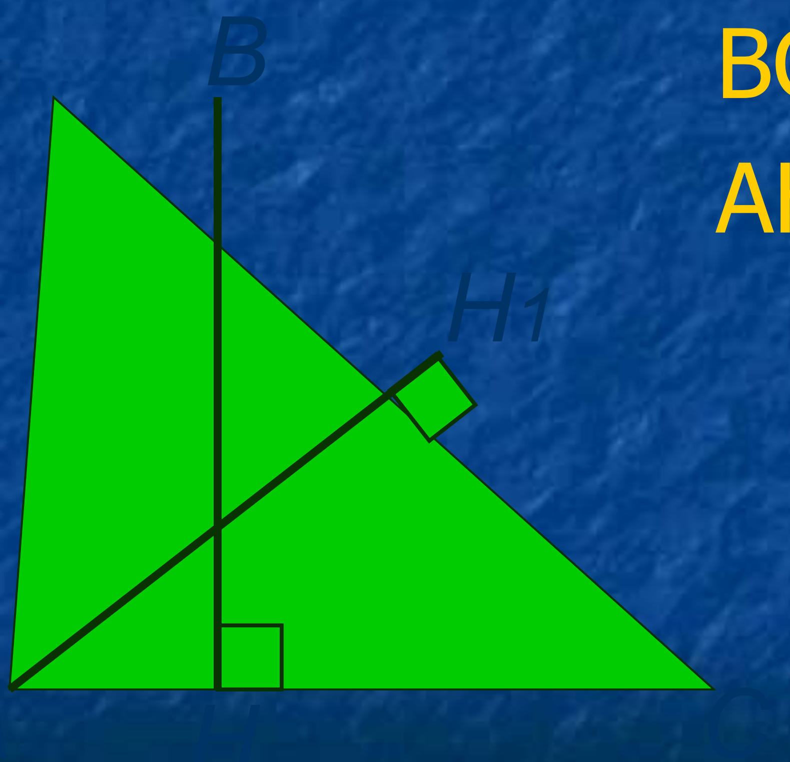

B
C
A
D

$$S_{\Delta} = S_{\square} : 2$$

- Согласны ли вы, что…

1. Равные фигуры имеют равные площади
2. Неравные фигуры имеют различные площади
3. Если фигуры равновеликие, то они равны
4. Если фигура состоит из двух частей, чтобы найти площадь всей фигуры, нужно сложить площади частей

Площадь треугольника



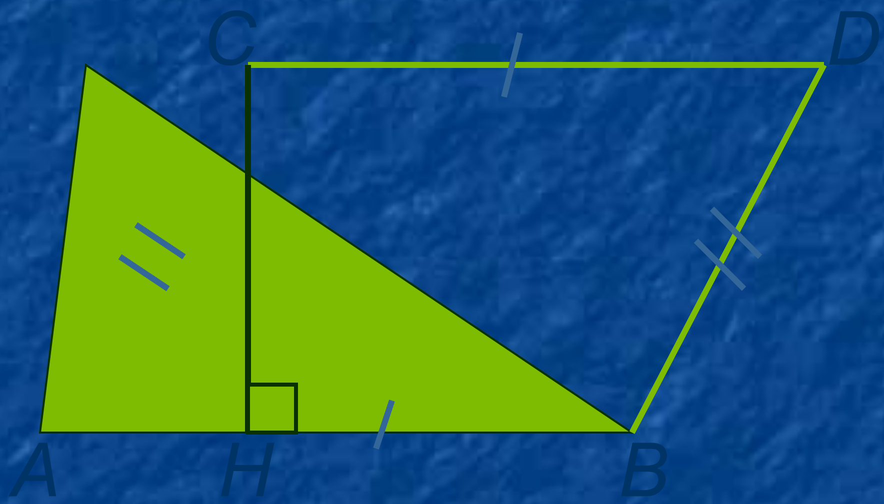
АС- основание

ВН- высота;

ВС- основание

АН1- высота

Теорема. *Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.*



Дано: Δ ABC;

CH- высота;

AB- основание.

Док-ть: S= ½ AB CH.

Док-во: ABC= DCB (по трем сторонам (СВ- общая, AB= СД,

АС= ВД)) $S_{ABC} = S_{DCB}$ S_{ABC}= ½ S A_{BCD}, т.е. S =

= ½ AB CH.

Теорема доказана.

Следствие 1.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

BC- гипотенуза;

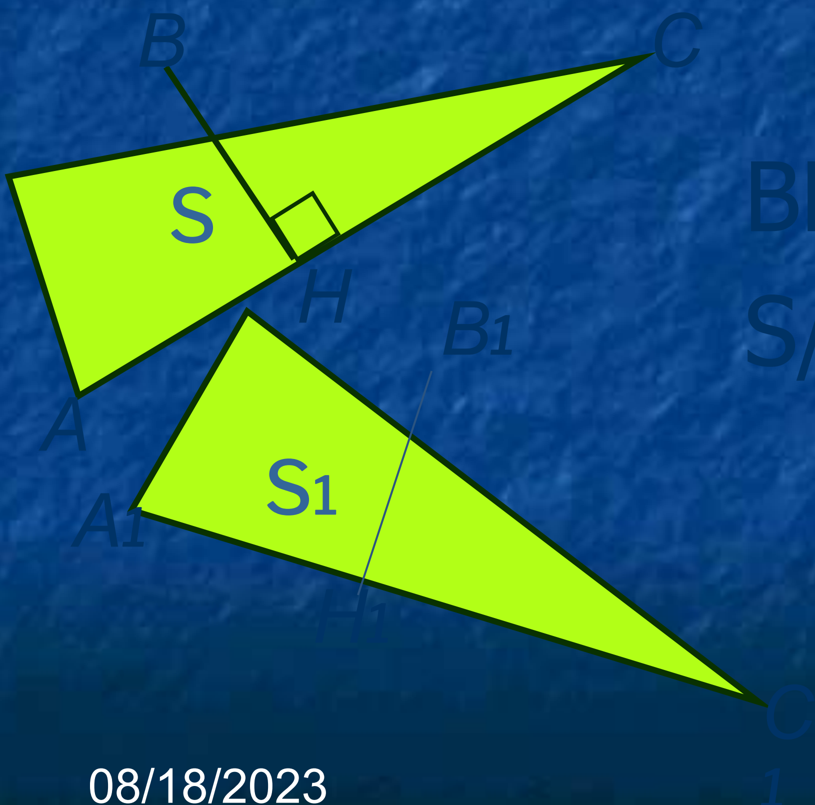
AB и AC- катеты.

∆ABC- прямоугольный;

$S_{ABC}= \frac{1}{2} AB \cdot AC$.

Следствие 2.

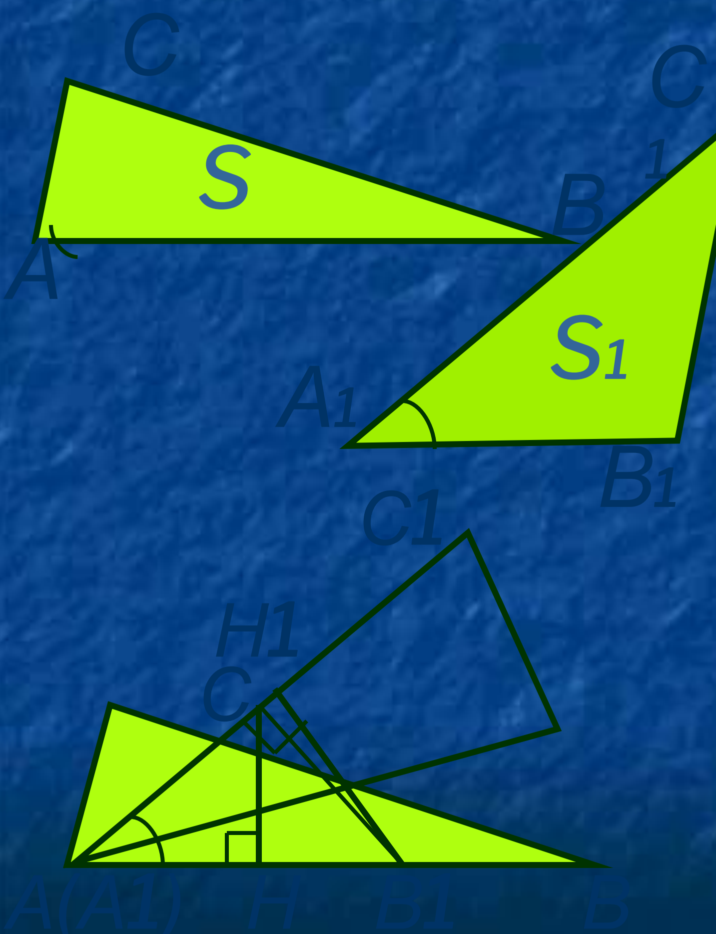
Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.



$BH = B_1H_1$

$S/S_1 = AC/A_1C_1$

Теорема. *Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.*



Дано: ABC и $A_1B_1C_1$; LA=L A_1.

Док-ть: *S/S_1= AC AB/A_1C_1 A_1B_1*

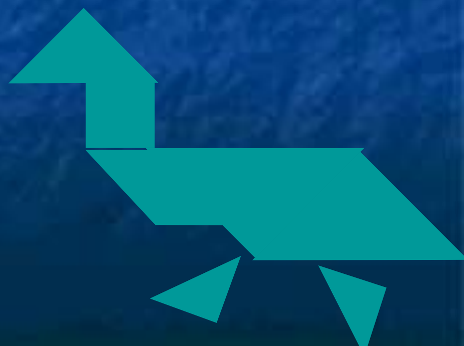
Док-во: Наложим $A_1B_1C_1$

на ABC,. ABC и AB1C имеют общую высоту CH, $S/S_{AB_1C_1}$= AB/ AB_1; AB_1C и AB_1C_1 имеют общую высоту B_1H_1,

$S/S_{AB_1C_1}$= AC/AC_1;

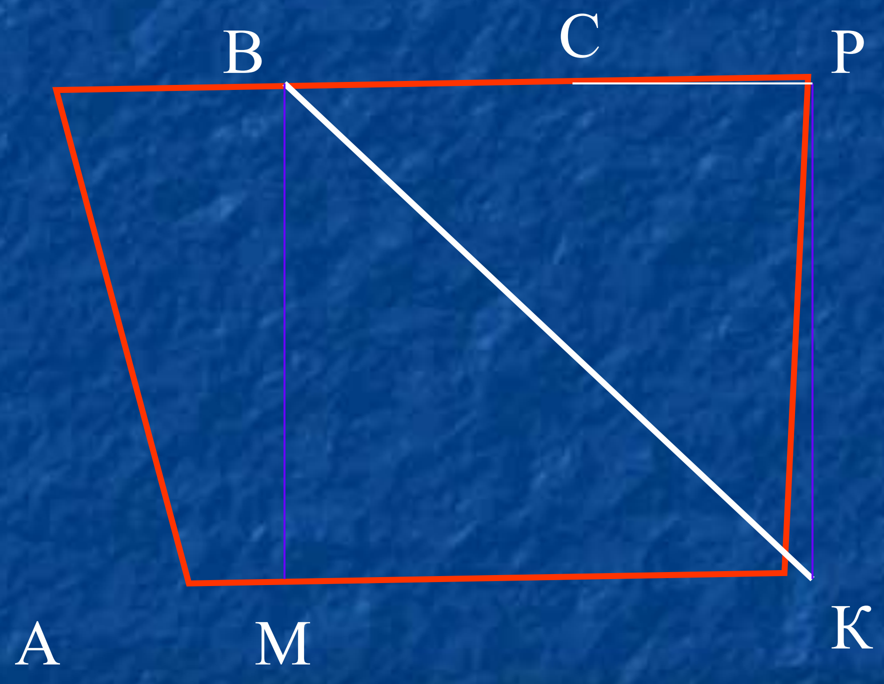
$S/S_{AB_1C_1}$= AB AC /AB_1 AC_1 или

S/S_1= AB AC/A_1B_1 A_1C_1.



Площадь трапеции

Теорема



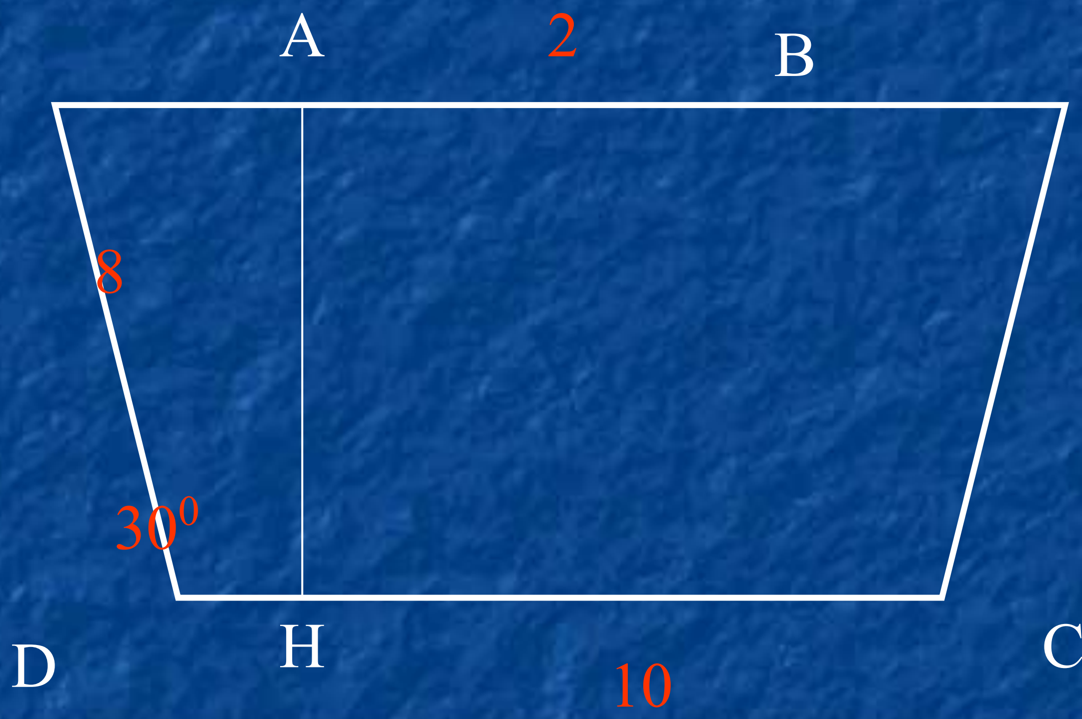
Дано: АВСК – трапеция

АК= а, ВС= в, ВМ = h

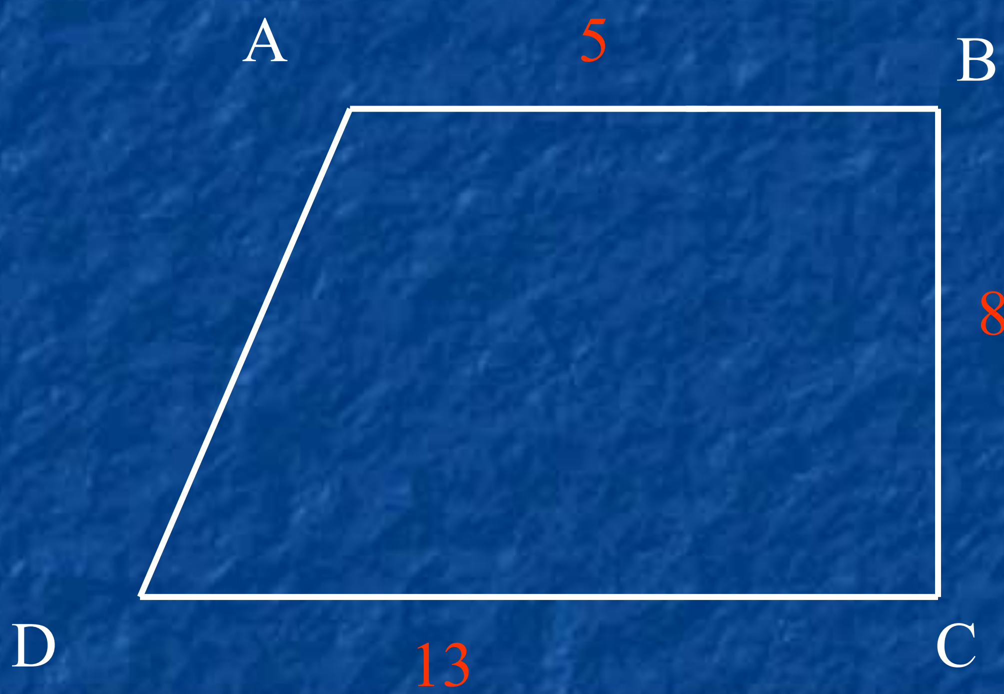
Доказать: S= 0,5h(а+в)

Задача

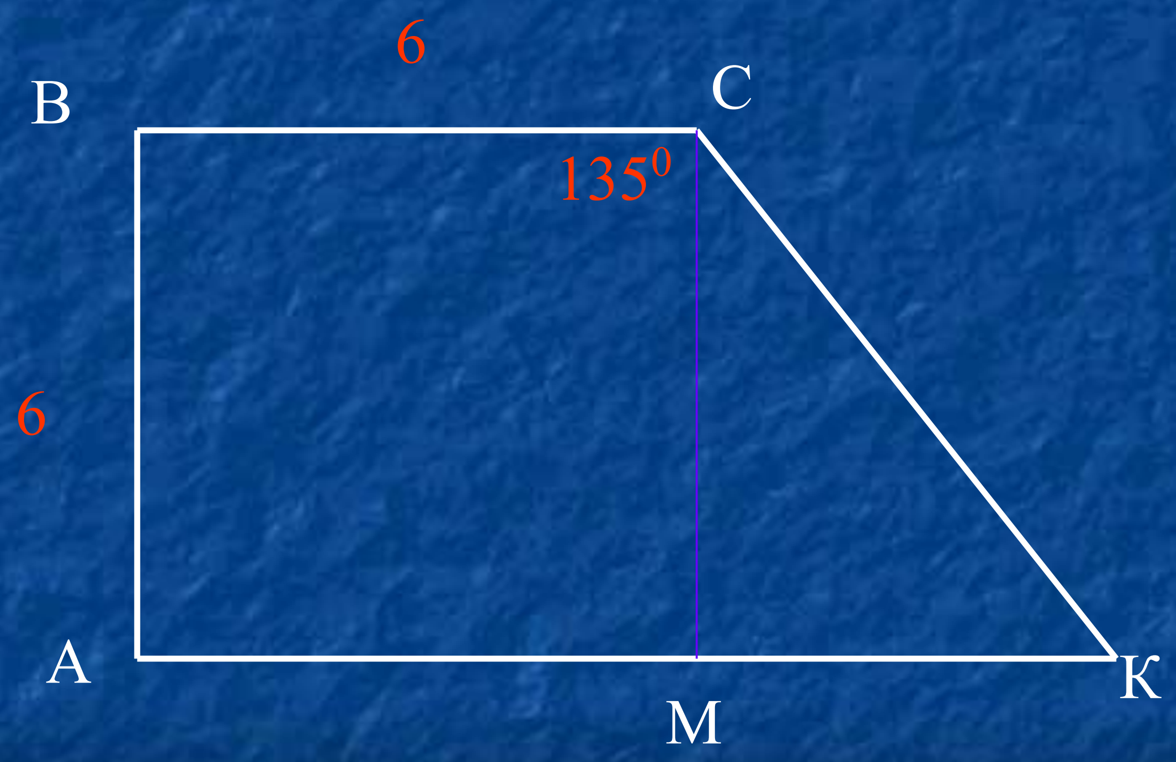
Задача



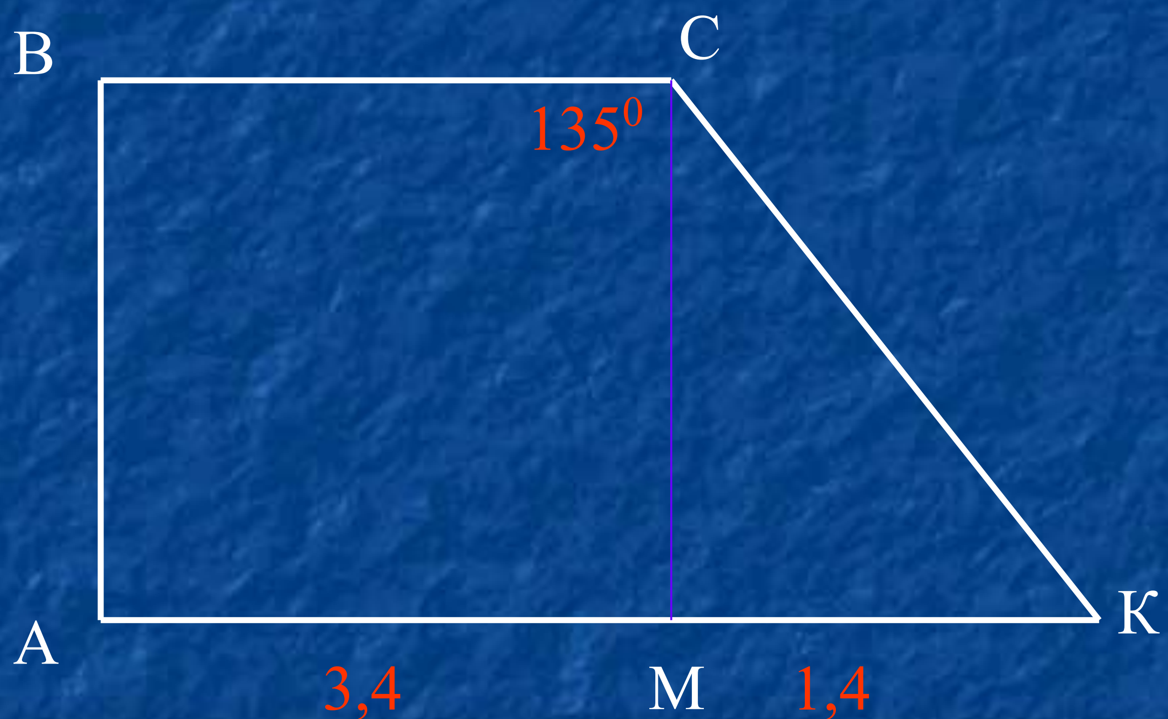
Задача



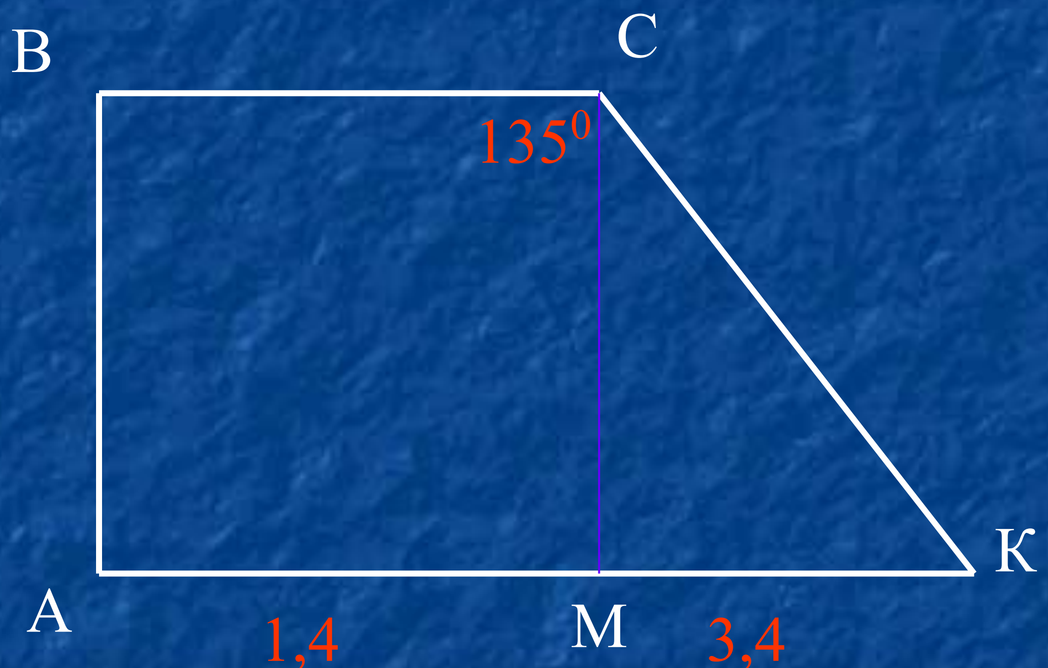
Задача



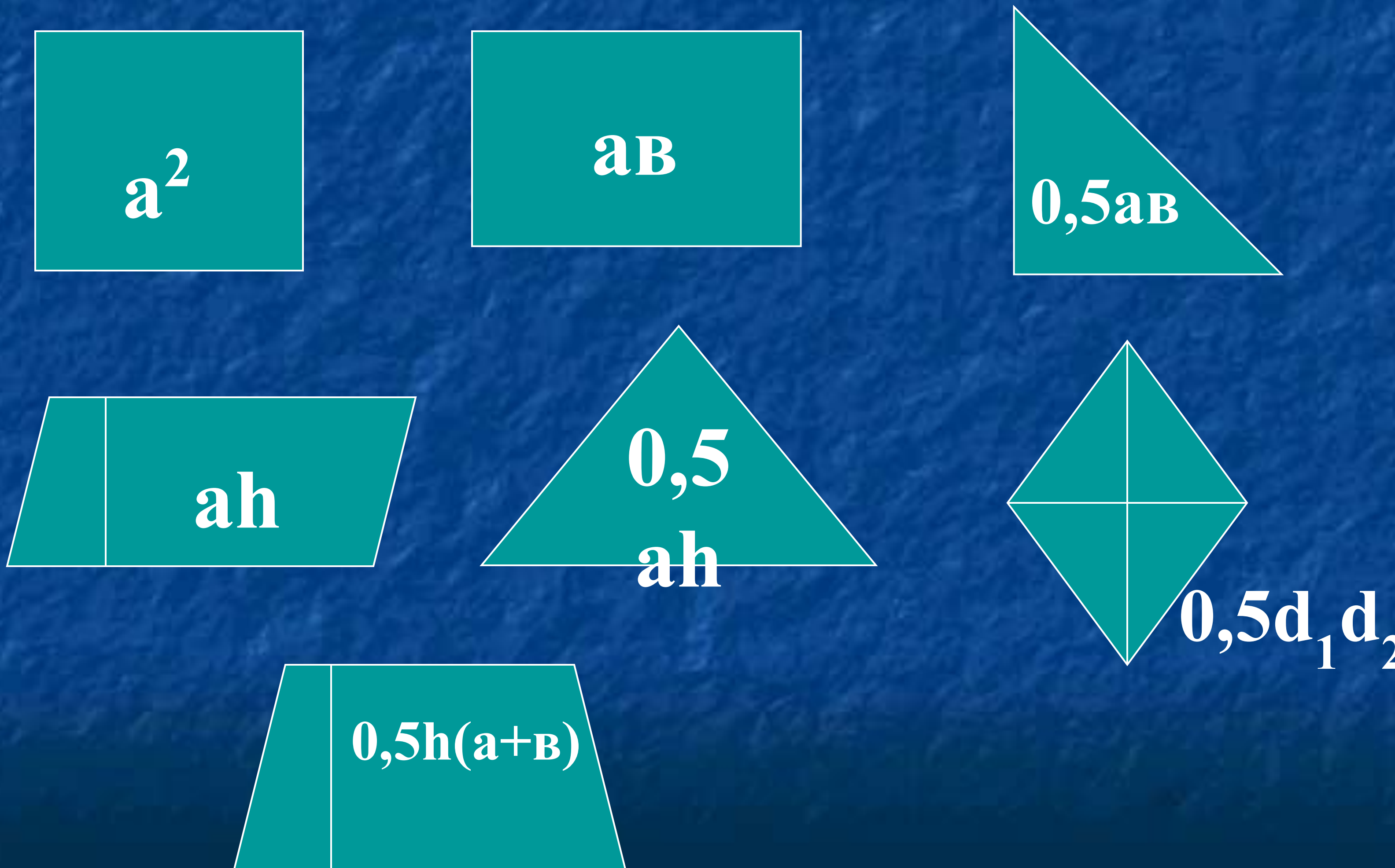
Задача



Задача



Площади многоугольников.



Самостоятельная работа

- Высота и основания трапеции относятся как 5:6:4. Найдите меньшее основание трапеции,если её площадь равна 88 $см^2$.
- Высота трапеции равна меньшему основанию и в два раза меньше большего основания. Найдите высоту трапеции, если её площадь равна 54 $см^2$.

Теорема Пифагора

Пребудет вечной истина, как скоро
Её познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора
Верна, как и в его далёкий век.

Содержание

- Формулировка теоремы
- Доказательства теоремы
- Значение теоремы Пифагора

Формулировка теоремы

Во времена Пифагора теорема звучала так:

- « Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах»

или

- « Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах».

Современная формулировка

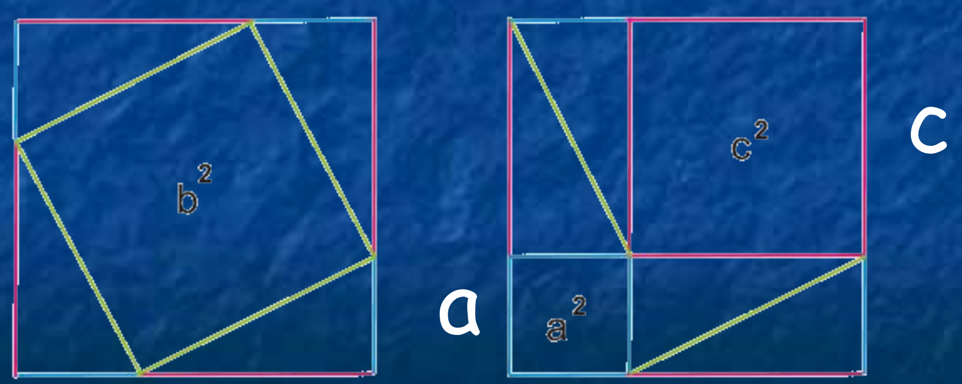
- « В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

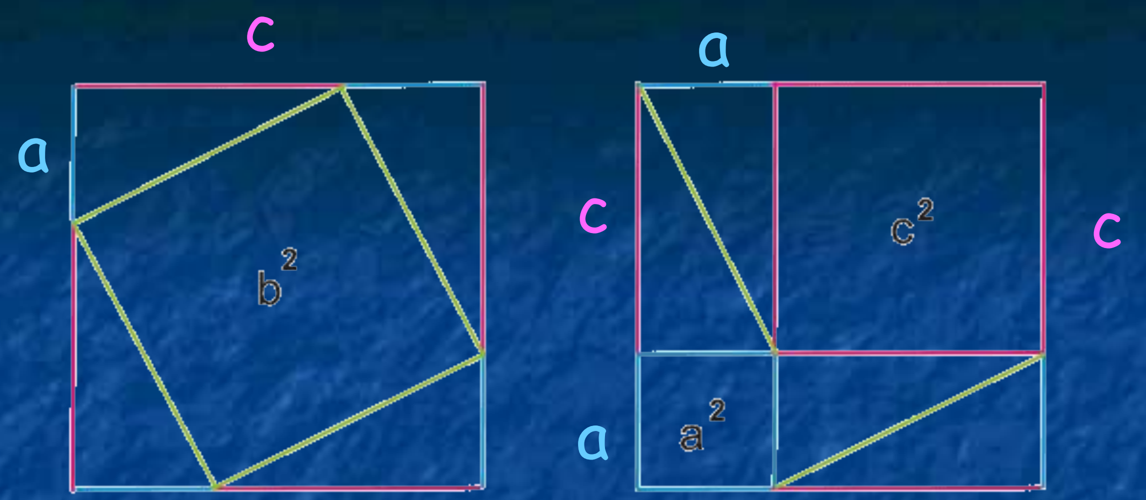
Доказательства теоремы

Существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.).

I. Самое простое доказательство

Рассмотрим квадрат, показанный на рисунке. Сторона квадрата равна **a + c**.



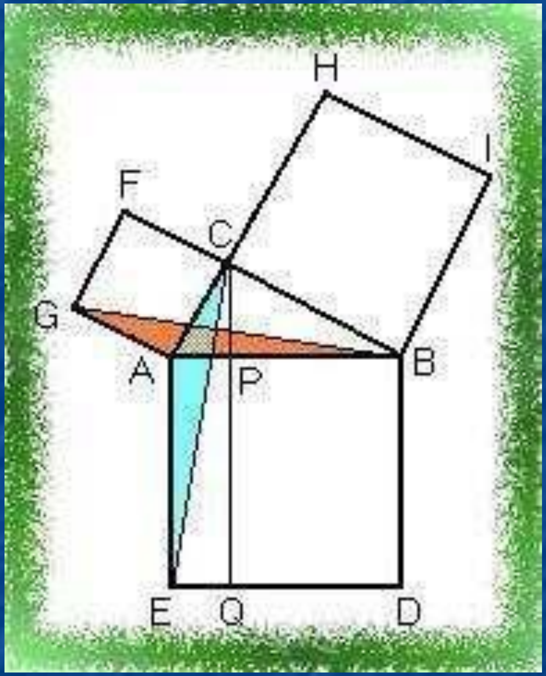


В одном случае (слева) квадрат разбит на квадрат со стороной **b** и четыре прямоугольных треугольника с катетами **a** и **c**.

В другом случае (справа) квадрат разбит на два квадрата со сторонами **a** и **c** и четыре прямоугольных треугольника с катетами **a** и **c**.

Таким образом, получаем, что площадь квадрата со стороной b равна сумме площадей квадратов со сторонами a и c.

II.Доказательство Евклида

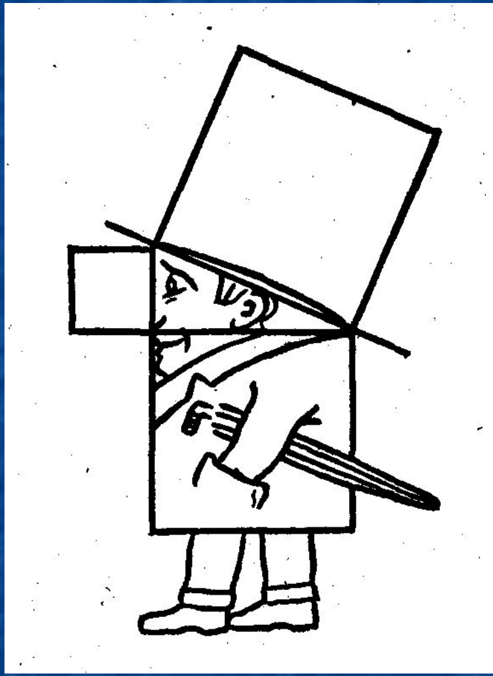


Дано:

ABC-прямоугольный треугольник

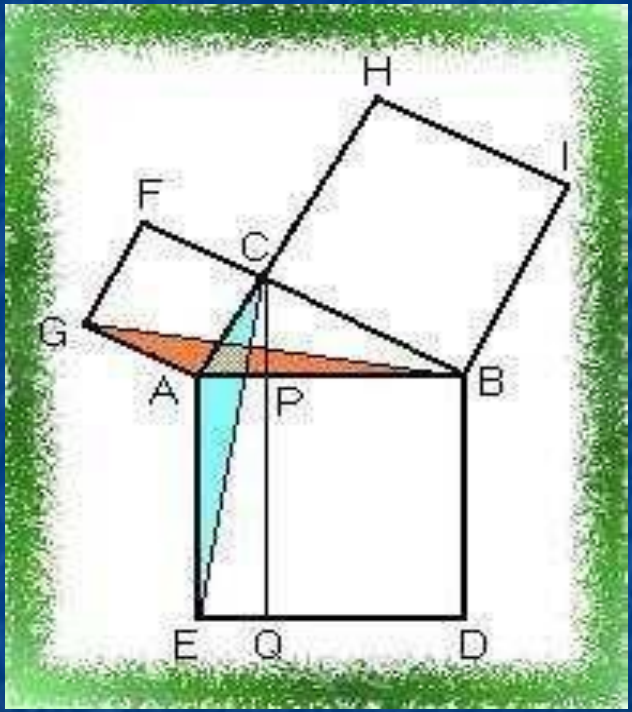
Доказать:

$S_{ABDE}=S_{ACFG}+S_{BCHI}$



Доказательство:

Пусть *ABDE*-квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника *ABC*, а *ACFG* и *BCHI*-квадраты, построенные на его катетах. Опустим из вершины *C* прямого угла перпендикуляр *CP* на гипотенузу и продолжим его до пересечения со стороной *DE* квадрата *ABDE* в точке *Q*; соединим точки *C* и *E*, *B* и *G*.

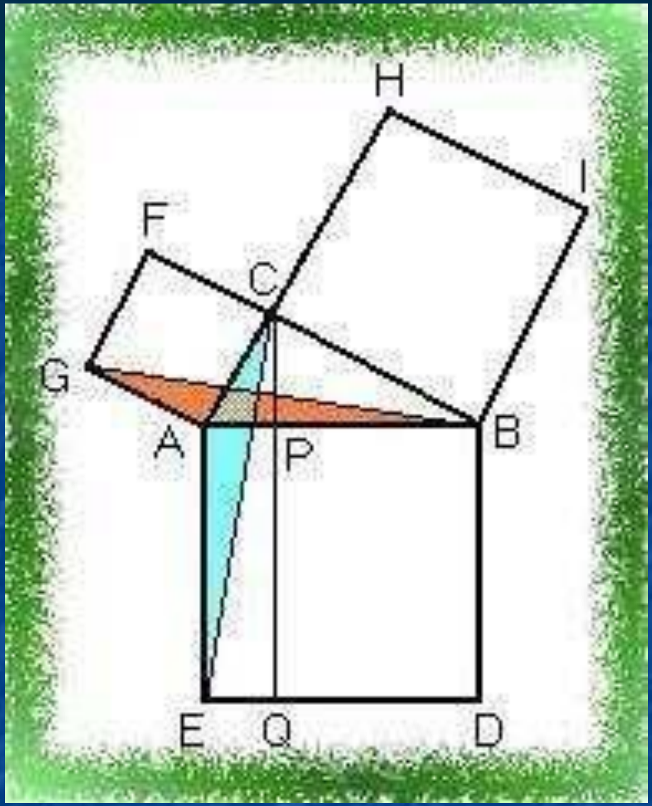


очевидно, что углы *CAE=GAB(=A+90°)*; отсюда следует, что треугольники *ACE* и *AGB*(закрашенные на рисунке) равны между собой (по двум сторонам и углу, заключённому между ними). Сравним далее треугольник *ACE* и прямоугольник *PQEA*; они имеют общее основание *AE* и высоту *AP*, опущенную на это основание, следовательно

$S_{PQEA}=2S_{ACE}$

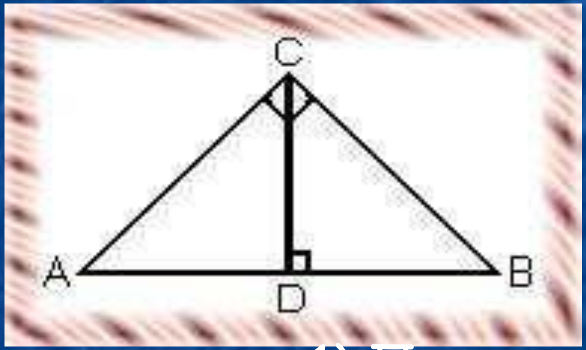
очно так же квадрат FCAG и треугольник BAG имеют общее основание GA и высоту AC; значит,

$S_{FCAG}=2S_{GAB}$



Отсюда и из равенства треугольников ACE и GBA вытекает равновеликость прямоугольника QPBD и квадрата CFGA; аналогично доказывается и равновеликость прямоугольника QPAE и квадрата CHIB. А отсюда, следует, что квадрат ABDE равновелик сумме квадратов ACFG и BCHI, т.е. теорема Пифагора.

III. Алгебраическое доказательство



Дано: *ABC*-прямоугольный треугольник

Доказать: $AB^2=AC^2+BC^2$

Доказательство:

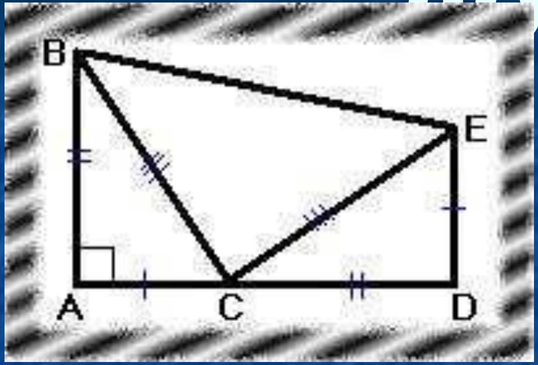
1) Проведем высоту **CD** из вершины прямого угла **C**.
2) По определению косинуса угла **cosA=AD/AC=AC/AB**, отсюда следует **$AB*AD=AC^2$.**
3) Аналогично **cosB=BD/BC=BC/AB**, значит **$AB*BD=BC^2$.**
4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$$AC^2+BC^2=AB*(AD + DB)$$

$$AB^2=AC^2+BC^2.$$

Что и требовалось доказать.

IV.Геометрическое доказательство



Дано: *ABC*-прямоугольный треугольник

Доказать: $BC^2=AB^2+AC^2$

Доказательство:

1) Построим отрезок *CD* равный отрезку *AB* на продолжении катета *AC* прямоугольного треугольника *ABC*. Затем опустим перпендикуляр *ED* к отрезку *AD*, равный отрезку *AC*, соединим точки *B* и *E*.

2) Площадь фигуры *ABED* можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED}=2*AB*AC/2+BC^2/2$$

3) Фигура *ABED* является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED}=(DE+AB)*AD/2.$$

4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$AB*AC+BC^2/2=(DE+AB)(CD+AC)/2$

$AB*AC+BC^2/2=(AC+AB)^2/2$

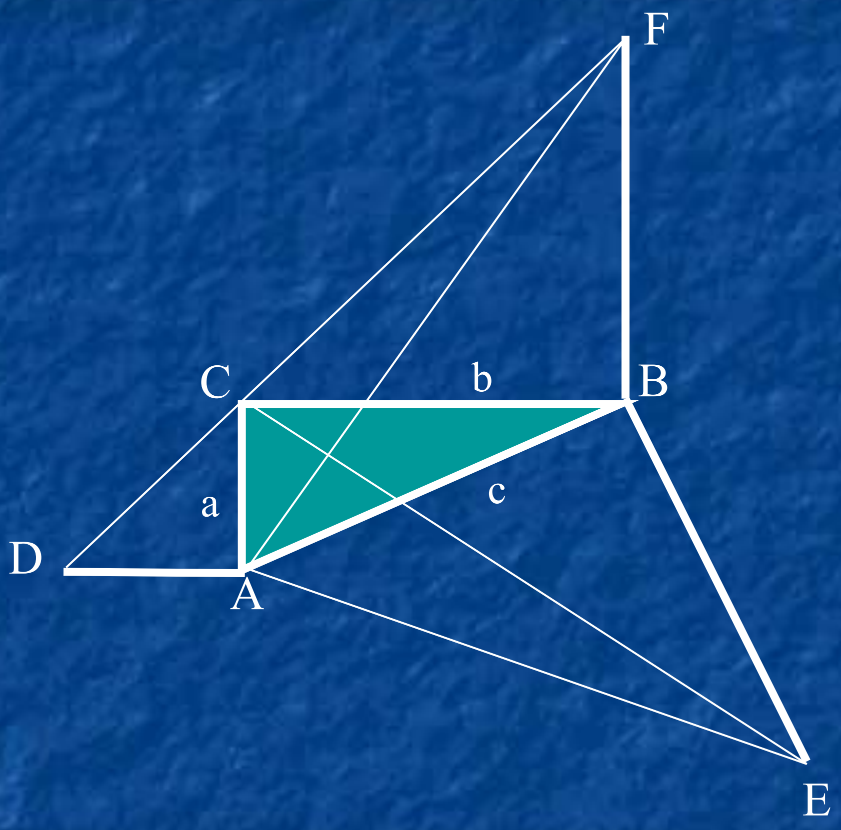
$AB*AC+BC^2/2=AC^2/2+AB^2/2+AB*AC$

$BC^2=AB^2+AC^2.$

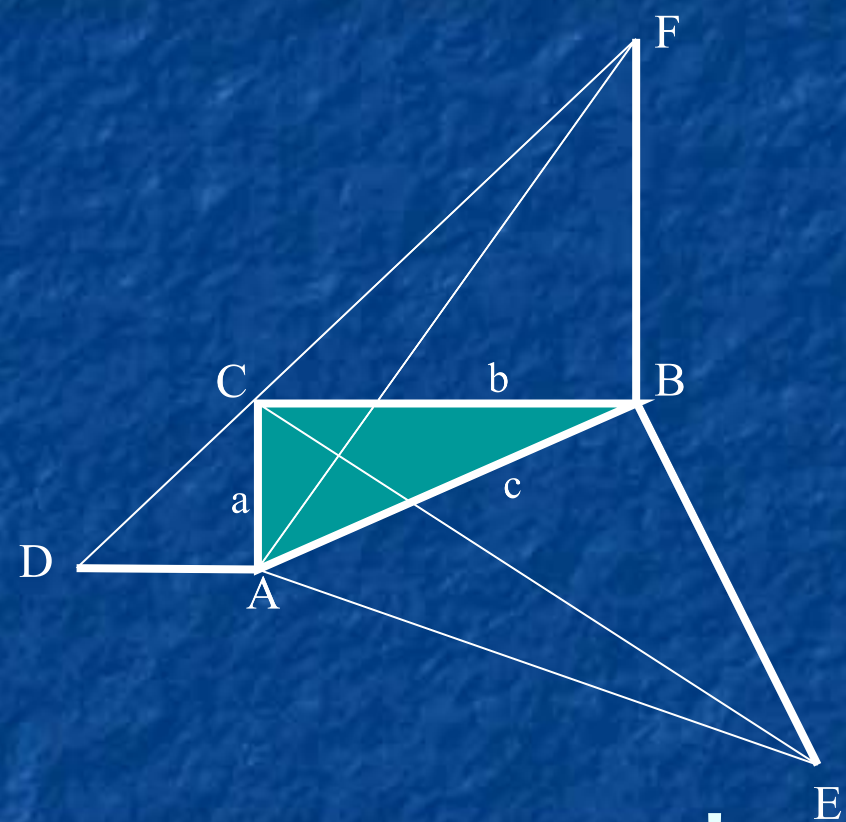
Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.

Начало доказательства

- Построим треугольник ABC с прямым углом C.
- Построим BF=CB, BF$\perp$CB
- Построим BE=AB, BE$\perp$AB
- Построим AD=AC, AD$\perp$AC
- Точки F, C, D принадлежат одной прямой.



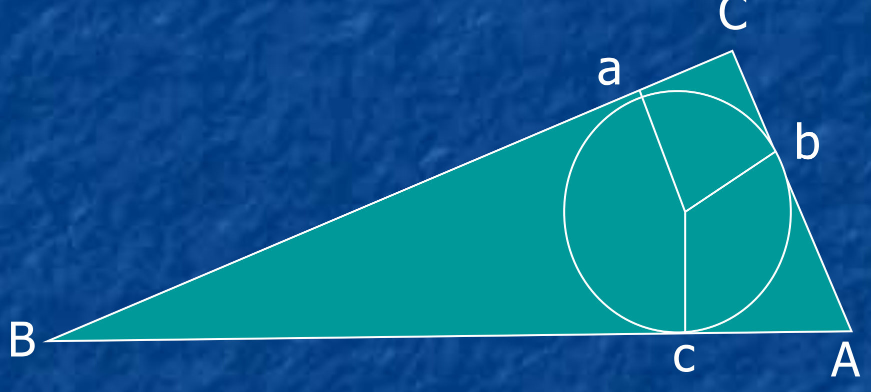
- Как мы видим, четырёхугольники ADFB и ACBE равновелики, т.к. ABF=ECB. Треугольники ADF и ACE равновелики.
- Отнимем от обоих равновеликих четырёхугольников общий для них треугольник ABC, получим:
  $1/2a^2+1/2b^2=1/2c^2$
- Соответственно:
  $a^2+b^2=c^2$



Что и требовалось доказать!

Начало доказательства

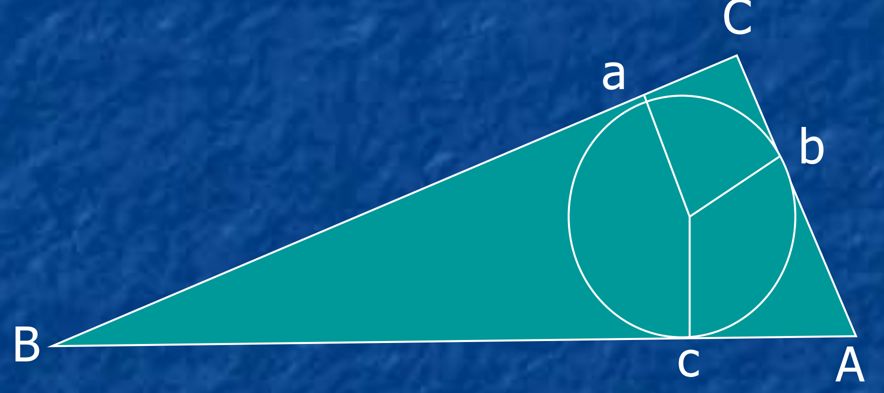
- Площадь данного прямоугольника с одной стороны равна 0.5ab, с другой 0.5pr, где p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной в него окружности (r=0.5(a+b-c)).



- Имеем:

0.5ab=0.5pr=0.5(a+b+c)*0.5(a+b-c)

- Отсюда следует, что $c^2= a^2+b^2$

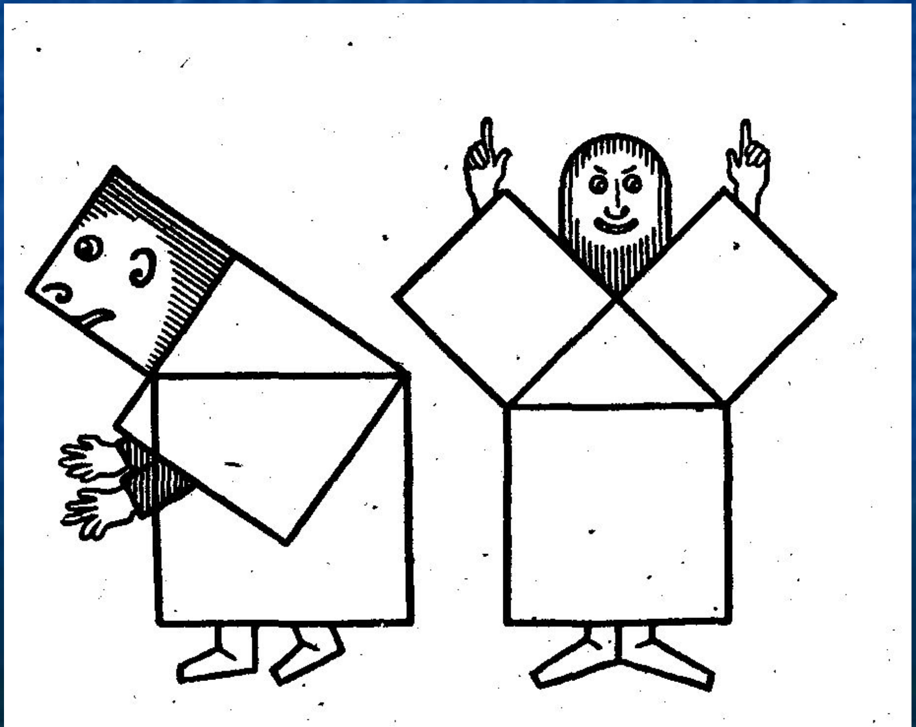


Что и требовалось доказать!

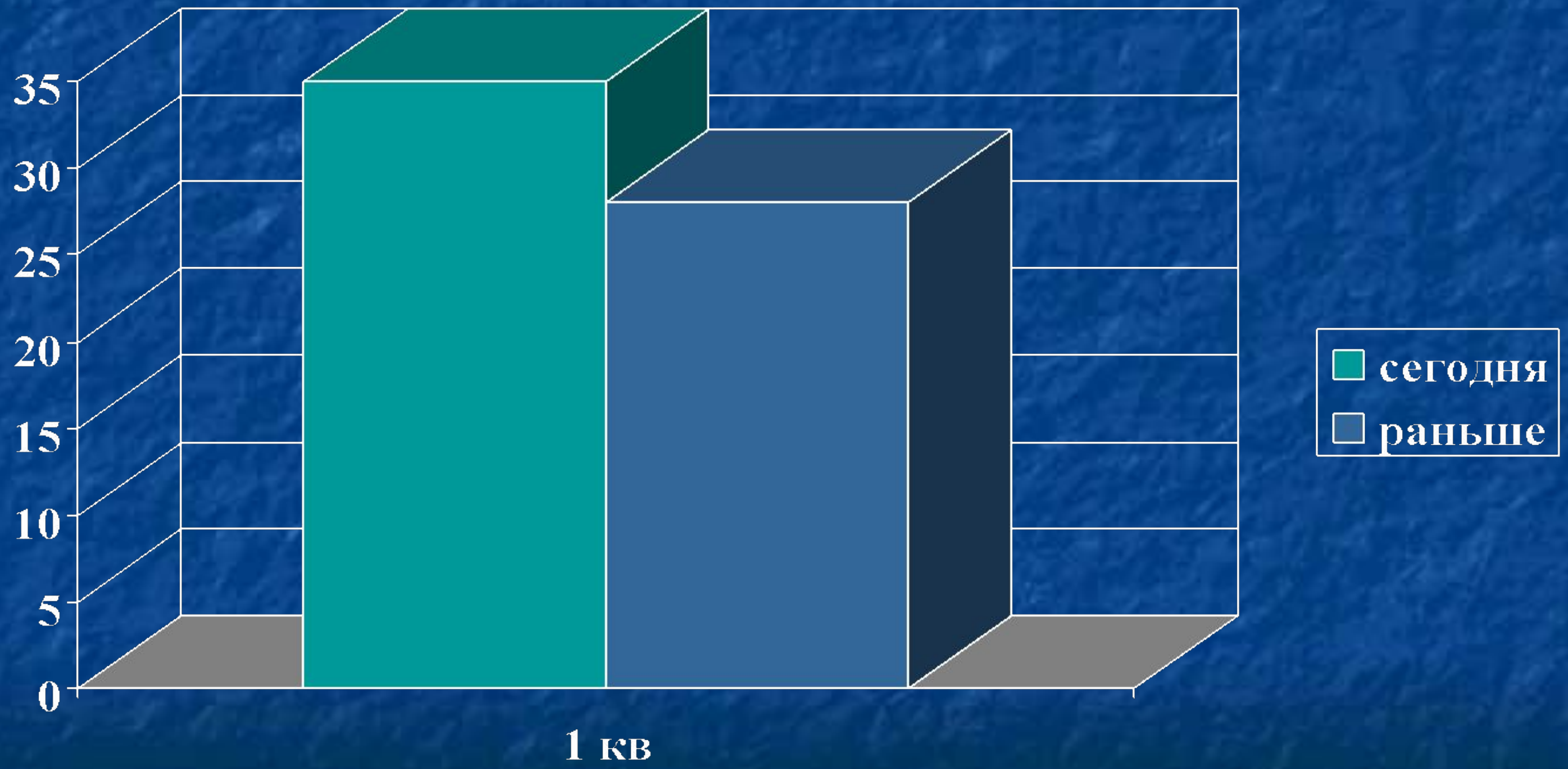
Значение теоремы Пифагора

Теорема Пифагора- это одна из самых важных теорем геометрии. Значение её состоит в том, что из неё или с её помощью можно вывести большинство теорем геометрии.

Доказательство теоремы Пифагора учащиеся средних веков считали очень трудным и называли его Dons asinorum - ослиный мост, или elefuga - бегство «убогих», так как некоторые «убогие» ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть, без понимания, и прозванные поэтому «ослами», были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста. Из-за чертежей, сопровождающих теорему Пифагора, учащиеся называли ее также «ветряной мельницей», составляли стихи, вроде «Пифагоровы штаны на все стороны равны», рисовали карикатуры.



Здесь показано на сколько больше доказательств стало в наше время



Подведём итоги

Доказательств теоремы Пифагора очень много и они открываются до сих пор ,так что не унывайте ,может вы найдёте ещё доказательство :)

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

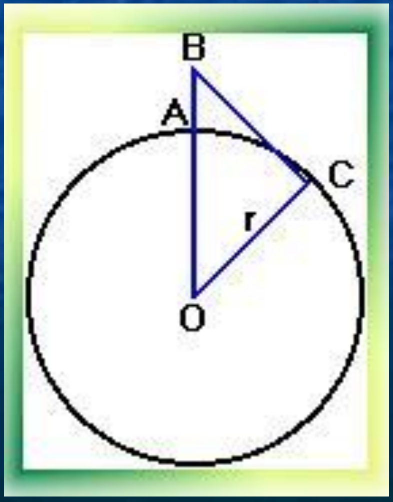
ПРИМЕНЕНИЕ

ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

- Строительство
- Астрономия
- Мобильная связь

Мобильная связь

- Какую наибольшую высоту должна иметь антенна мобильного оператора, чтобы передачу можно было принимать в радиусе R=200 км? (радиус Земли равен 6380 км.)
- **Решение:**
- Пусть ***AB= x, BC=R=200 км, OC= r =6380 км.***
- ***OB=OA+AB***
  OB=r + x.
- Используя теорему Пифагора, получим **Ответ: 2,3 км.**

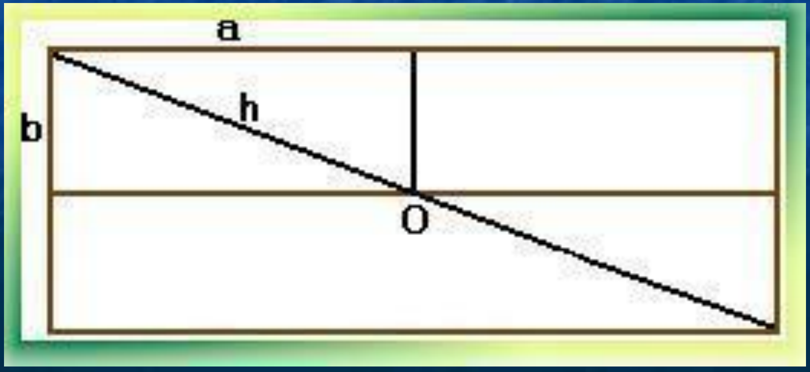


Строительство

- Окна
- Крыши
- Молниеотводы

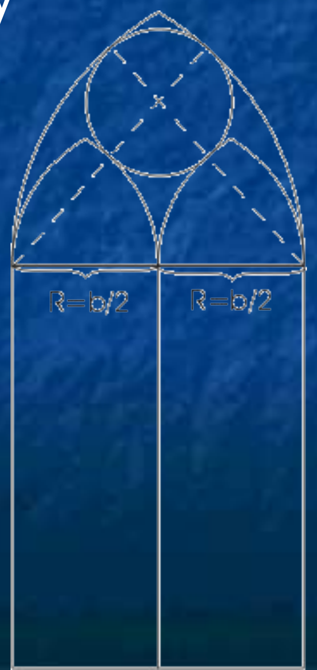
Молниеотвод

- Известно, что молниеотвод защищает от молнии все предметы, расстояние которых от его основания не превышает его удвоенной высоты. Необходимо определить оптимальное положение молниеотвода на двускатной крыше, обеспечивающее наименьшую его доступную высоту.
- **Решение:**
- По теореме Пифагора ***h2≥ a2+b2***, значит ***h≥(a2+b2)1/2***.



Окна

- В зданиях **готического и романского стиля** верхние части окон расчленяются каменными ребрами, которые не только играют роль орнамента, но и способствуют прочности окон. На рисунке представлен простой пример такого окна в готическом стиле. Способ построения его очень прост: Из рисунка легко найти центры шести дуг окружностей, радиусы которых равны
- ширине окна (b) для наружных дуг
- половине ширины, (b/2) для внутренних дуг
- Остается еще полная окружность, касающаяся четырех дуг. Т. к. она заключена между двумя концентрическими окружностями, то ее диаметр равен расстоянию между
- этими окружностями, т. е. b/2 и, следовательно,
- радиус равен b/4. А тогда становится ясным и
- положение ее центра.

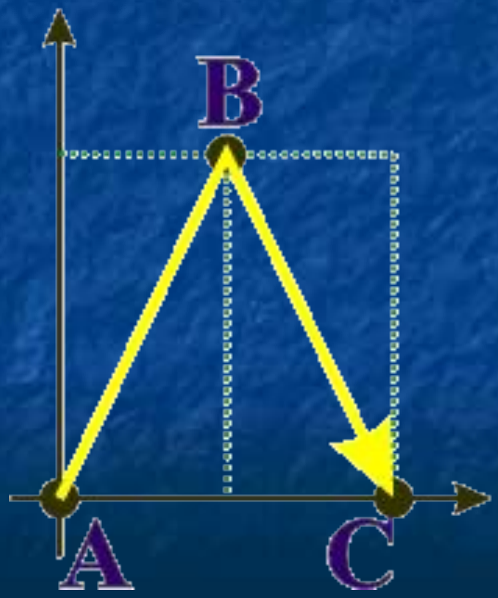


- В **романской архитектуре** часто встречается мотив, представленный на рисунке. Если b по-прежнему обозначает ширину окна, то радиусы полуокружностей будут равны $R = b / 2$ и $r = b / 4$. Радиус p внутренней окружности можно вычислить из прямоугольного треугольника, изображенного на рис. пунктиром. Гипотенуза этого треугольника, проходящая через точку касания окружностей, равна $b/4+p$, один катет равен $b/4$, а другой $b/2-p$. По теореме Пифагора имеем:
- $(b/4+p)=(b/4)+(b/4-p)$
- или
- $b/16+ bp/2+p=b/16+b/4-bp+p$,
- откуда
- $bp/2=b/4-bp$.
- Разделив на b и приводя подобные члены, получим:
- $(3/2)p=b/4$, $p=b/6$.

Астрономия

- На этом рисунке показаны точки А и В и путь светового луча от А к В и обратно. Путь луча показан изогнутой стрелкой для наглядности, на самом деле, световой луч - прямой.
- Какой путь проходит луч? Поскольку свет идет туда и обратно одинаковый путь, спросим сразу: чему равно расстояние между точками?

- На этом рисунке показан путь светового луча только с другой точки зрения, например из космического корабля. Предположим, что корабль движется влево. Тогда две точки, между которыми движется световой луч, станут двигаться вправо с той же скоростью. Причем, в то время, пока луч пробегает свой путь, исходная точка А смещается и луч возвращается уже в новую точку С.



- В конце девятнадцатого века высказывались разнообразные предположения о существовании обитателей Марса подобных человеку. В шутку, хотя и не совсем безосновательно , было решено п**ередать обитателям Марса сигнал в виде теоремы Пифагора**. Неизвестно, как это сделать; но для всех очевидно, что математический факт, выражаемый теоремой Пифагора имеет место всюду и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал.

Строительство крыши

При строительстве домов и коттеджей часто встает вопрос о длине стропил для крыши, если уже изготовлены балки. Например: в доме задумано построить двускатную крышу (форма в сечении). Какой длины должны быть стропила, если изготовлены балки AC=8 м., и AB=BF.

Решение:

Треугольник ADC - равнобедренный AB=BC=4 м., BF=4 м. Если предположить, что FD=1,5 м., тогда:

А) Из треугольника DBC: DB=2,5 м.,

Б) Из треугольника ABF:

$$AF=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}\approx 5{,}7$$