«Теоремы о невозможности корректного агрегирования в экономике»

Зоркальцев Валерий Иванович

д.т.н., профессор

зав. отделом Прикладной математики Института систем энергетики имени Л.А. Мелентьева СО РАН

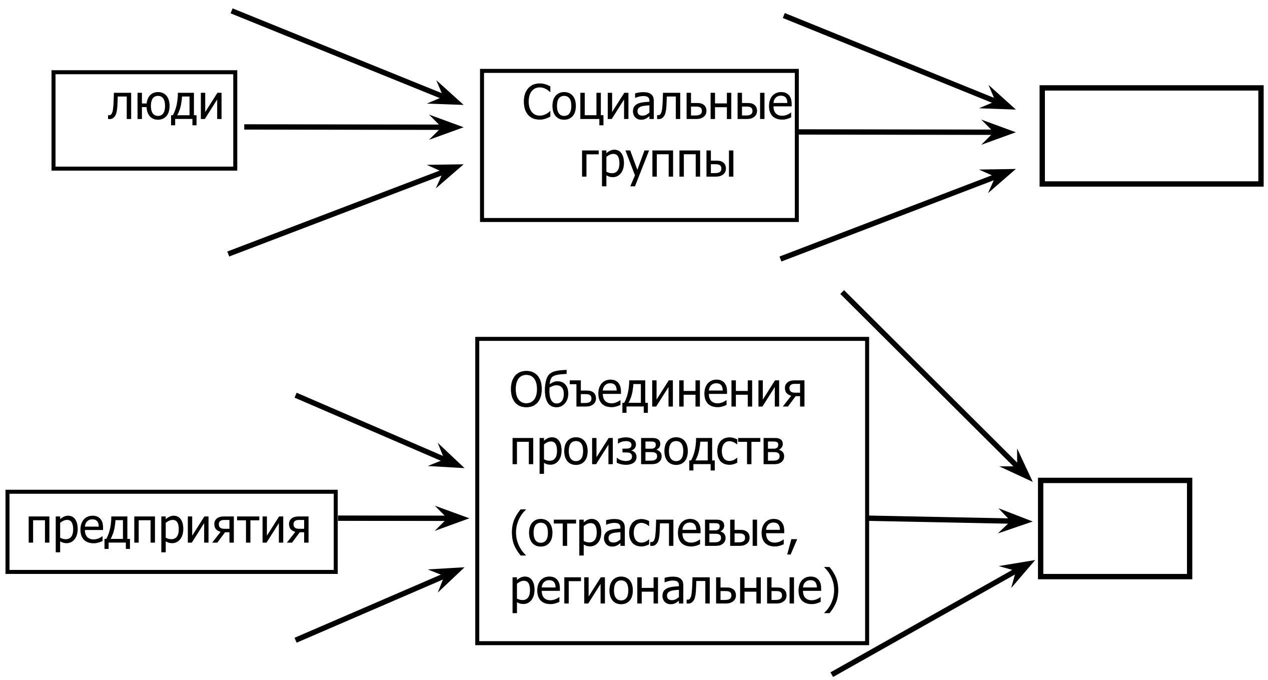
Экономика может считаться наукой в той мере, в какой она базируется на четко определенных показателях. Без этого она останется на уровне преднаучных и псевдонаучных рассуждений о неоднозначно воспринимаемых категориях.

ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕРЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

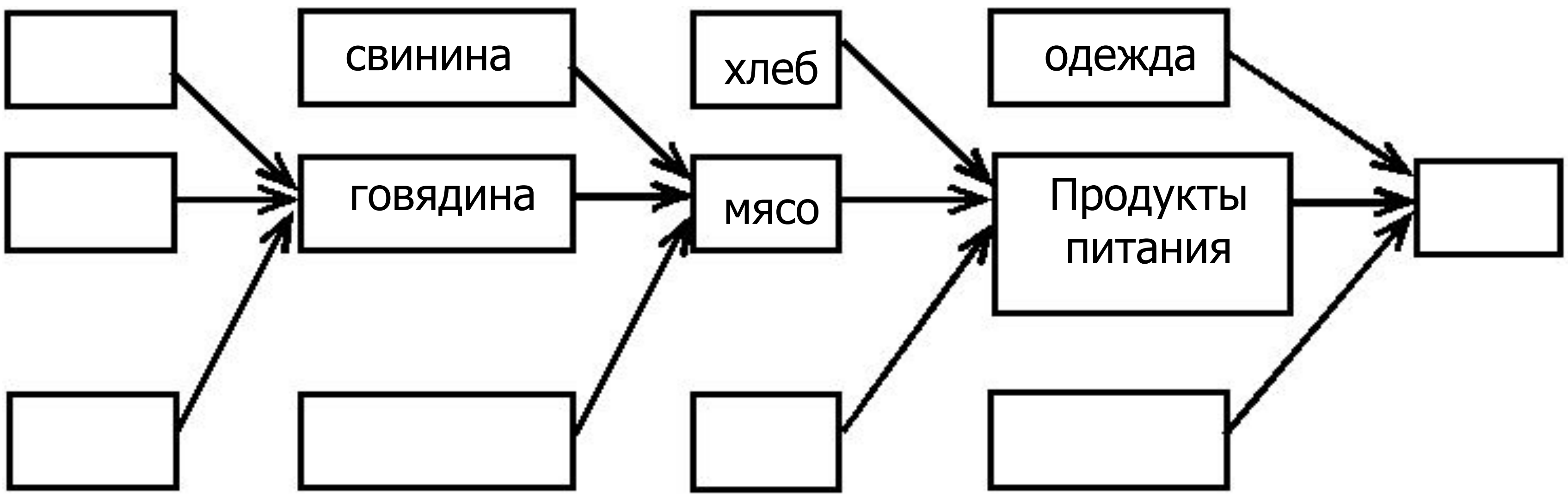
- Многие экономические показатели либо вовсе не измеряются (например, объемы услуг), либо измеряются плохо. Используемые физические единицы (метры, килограммы, штуки и т.д.) часто очень неточно отражают экономическую ценность благ.
- Первичные данные часто очень неточны (в т.ч. из-за сознательных искажений и сокрытий) и неполны.
- Из-за огромного количества предприятий и людей, видов благ, экономических операций необходимо агрегирование первичных данных в укрупненные показатели. Современная экономическая теория однотипно рассматривает исходные и агрегированные показатели. Корректно ли это?

ТРИ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕССА УКРУПНЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ДАННЫХ

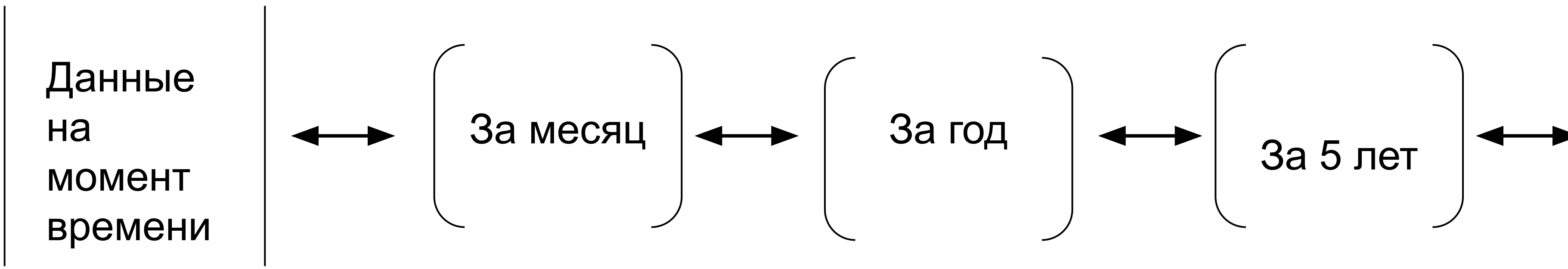
1. **Агрегирование субъектов** (действующих лиц) экономического механизма



2. **Агрегирование показателей**, в т.ч. объемов и цен конкретных товаров в обобщающие показатели объема и цены товара данной группы



3. Агрегирование данных во времени



Центральная проблема – сохранение логических взаимосвязей экономических параметров между собой на разных временных этапах.

Имеется два типа данных:

1) априори моментные (например, цены) – их агрегирование на период сводится к усреднению;

2) объемные (например, количества товаров) – агрегирование во времени сводится к суммированию.

1. ПРОБЛЕМА АГРЕГИРОВАНИЯ СУБЪЕКТОВ

НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ПОКУПАТЕЛЕЙ

Заданы: $U(Q)$ - функция полезности от набора благ $Q \in R_{+}^{n}$; $P \in R_{\oplus}^{n}$ - вектор цен;

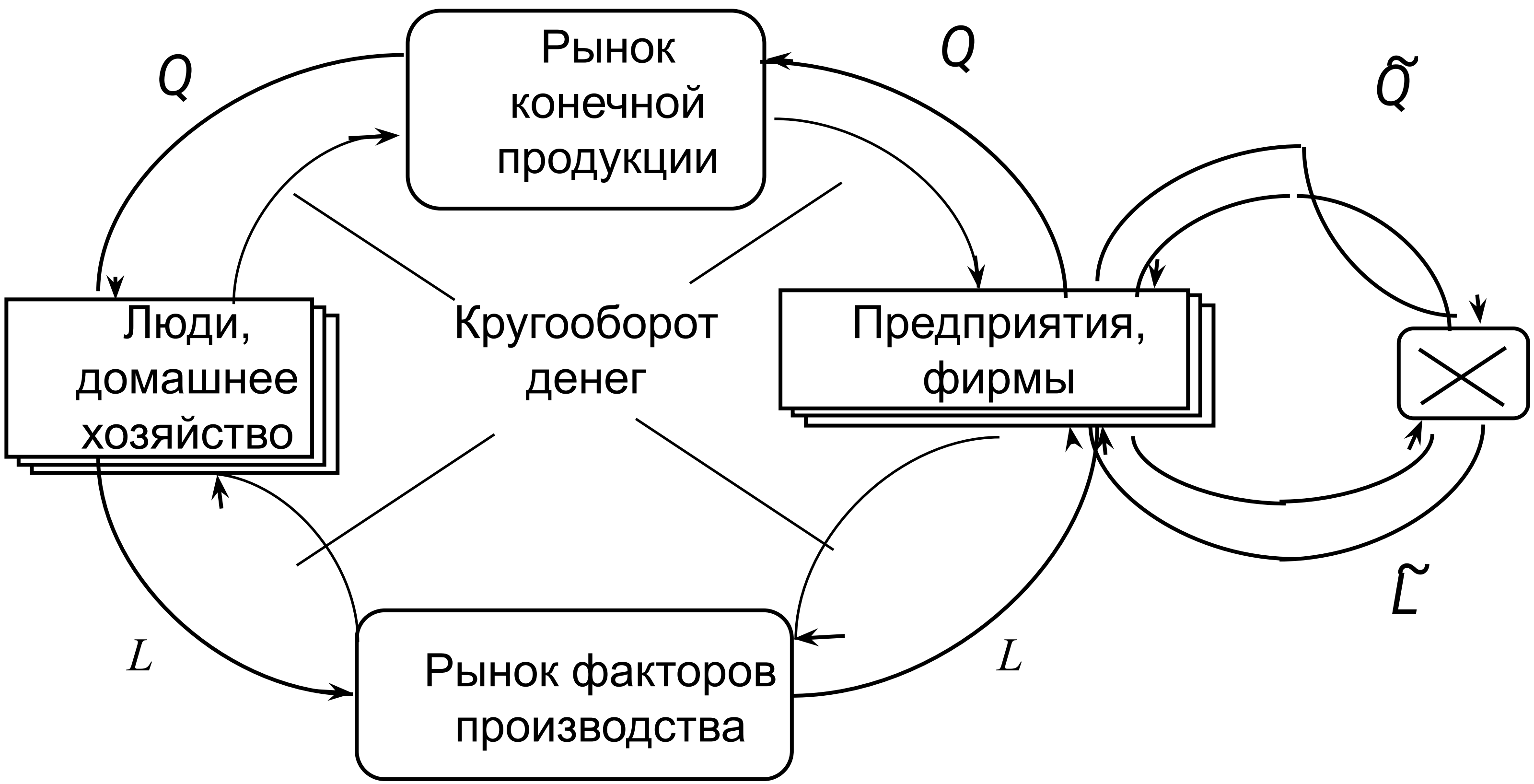
v - располагаемые для приобретения благ $j = 1,\ldots,n$ денежные средства.

Объемы выбираемых благ составляют вектор-функцию

$$Q(P, v, U) = \arg\max\left\{U(Q) \colon Q \in R_{+}^{n}, \sum P_j Q_j \le v\right\}.$$

Рассматриваемый класс функций полезности Ψ - множество функций U от векторов R_{+}^{n}, таких, что при любых $P \in R_{\oplus}^{n}$, $v \ge 0$ вектор $Q(P, v, U)$ существует и единственен, непрерывен по $v \ge 0$ и не тождественен нулевому вектору, $U(Q) > U(\mathbf{0})$ при некотором $Q \in R_{+}^{n}$.

СХЕМА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ



Q - набор благ конечного потребления;

L - первичные факторы производства: труд, права собственности на капитал и природные ресурсы;

$\widetilde{Q} = \widetilde{L}$ - промежуточная продукция.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛИ ВЫБОРА ПОКУПАТЕЛЯ

(при числе благ n=2)

Заданы: $P \in R_{\oplus}^{n}$ - вектор цен, $v > 0$ - располагаемые денежные средства, $U(Q)$ - функция полезности.

Выбираемый набор благ

$$\overline{Q} = \arg\max \left\{ U(Q): \quad Q \geq \mathbf{0}, \ \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j \leq v \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. **Множество эффективных наборов благ** для данной функции полезности $U \in \Psi$

$$C(U) = \left\{ Q(P, v, U): \;\; P \in R^n_{\oplus}, \; v \geq 0 \right\}.$$

2. Функции полезности U, $\tilde{U}$ из Ψ **квазиэквивалентные**, если при любых $P \in R^n_{\oplus}$, $v \geq 0$

$$Q(P, v, U) = Q\left(P, v, \tilde{U}\right).$$

3. Функция полезности U из Ψ **квазиоднородная**, если при любых $P \in R^n_{\oplus}$, $v \geq 0$, $\lambda \geq 0$

$$Q(P, \lambda v, U) = \lambda Q(P, v, U).$$

АГРЕГИРОВАНИЕ ПОКУПАТЕЛЕЙ

Пусть $i = 1, \ldots, k$ - номера исходных покупателей при $k \geq 2$, $i = 0$ - агрегированный из них покупатель.

Обозначим U^i - функции из Ψ, составляющие при $i = 1, \ldots, k$ **индивидуальные функции полезности**, при $i = 0$ - **коллективную функцию полезности**.

Условие согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности: при любых $P \in R^n_{\oplus}$, $v^i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$ должно выполняться равенство

$$Q\left(P, \sum_{i=1}^{k} v^i, U^0\right) = \sum_{i=1}^{k} Q\left(P, v^i, U^i\right).$$

Теорема 1. *Условие согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности выполняется в том и только в том случае, если все индивидуальные и коллективная функции полезности квазиэквивалентны и квазиоднородны.*

ПРОТИВОРЕЧИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИМ ВОЗЗРЕНИЯМ СВОЙСТВ СОГЛАСОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ

I. **Квазиоднородность:** 1) кривые Энгеля (зависимость объема приобретения блага от располагаемых средств) являются прямыми;

2) при изменениях величины располагаемых средств не меняются соотношения объемов приобретаемых благ;

3) отсутствует насыщение потребностей в данном благе.

II. **Квазиэквивалентность** функций U^i, $i = 0, \dots, k$ противоречит **условию существования различий в потребностях**, согласно которому при некоторых $i, r \in \{1, \dots, k\}$, $P \in R^n_{\oplus}$, $v > 0$

$$Q\left(P, v, U^i\right) \neq Q\left(P, v, U^r\right).$$

Теорема 2. *Условие согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности противоречит условию существования различий в потребностях - в классе Ψ не существует функций U^i, $i = 0, \dots, k$, удовлетворяющих обоим этим условиям.*

III. **Следствие из обоих свойств квазиэквивалентности и квазиоднородности** индивидуальных и коллективной функций полезности – возможность суммирования полезностей нескольких субъектов.

Теорема 3. *Условие согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности выполняется в том и только в том случае, если существует функция* $\tilde{U}$ *из* Ψ, *такая, что при любых* $P \in R^n_{\oplus}$, $v^i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, $v^0 = \sum v^i$

$$Q\left(P, v^i, U^i\right) = Q\left(P, v^i, \tilde{U}\right), \qquad i = 0, \ldots, k;$$

$$\tilde{U}\left(Q\left(P, v^0, \tilde{U}\right)\right) = \sum \tilde{U}\left(Q\left(P, v^i, \tilde{U}\right)\right).$$

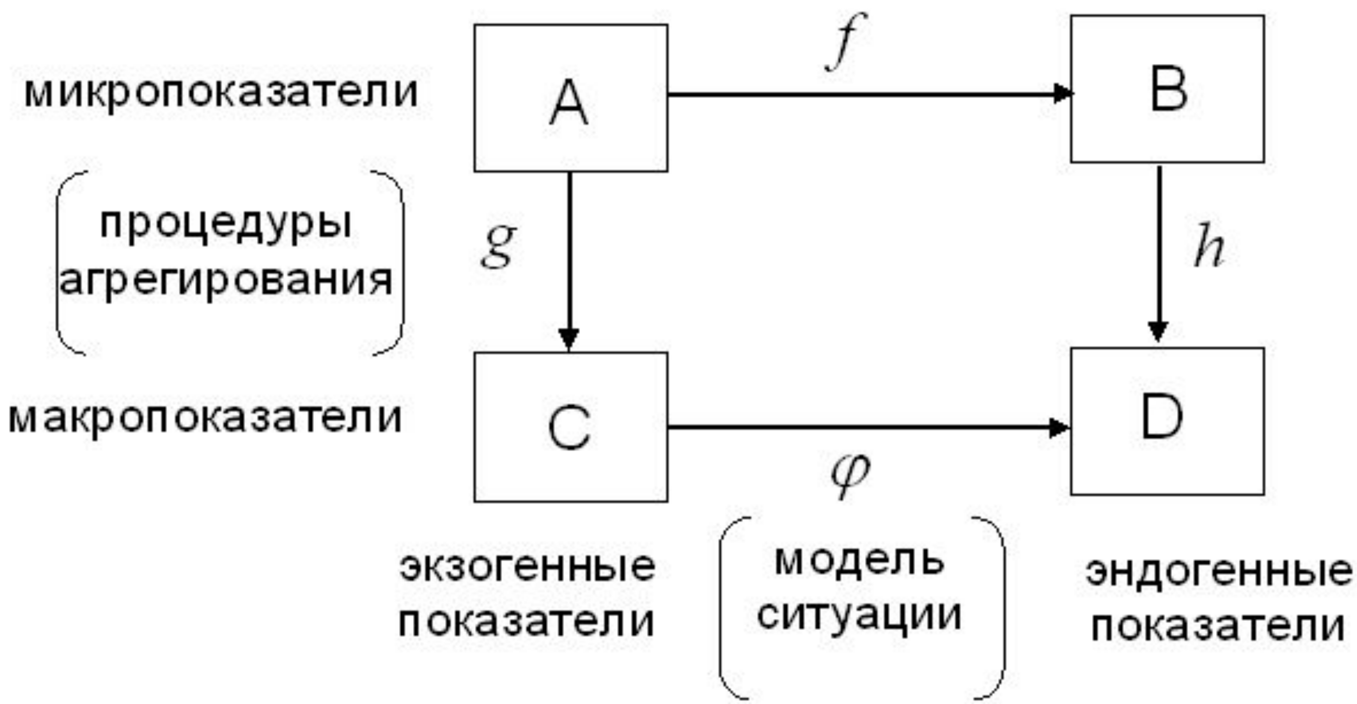
СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

1. Корректное агрегирование отдельных «чистых» предприятий с производственной функцией Леонтьева в «чистую» отрасль возможно только в том случае, если векторы коэффициентов удельных затрат у этих предприятий пропорциональны, что невозможно по общеэкономическим соображениям. Отсюда, невозможность корректного формирования отчетного МОБ даже если абстрагироваться от проблемы выделения «чистых» (монопродуктовых) предприятий.
2. Корректное агрегирование моделей МОБ (например, с 200 отраслевой до 30 отраслевой) возможно в том и только том случае, если укрупненный в одну отрасль набор исходных отраслей имеет пропорциональные коэффициенты удельных затрат, что противоречит априорному различию этих отраслей.

Общие требования логической непротиворечивости методов агрегирования (Фельс Э.. Тинтнер Т. Методы экономического анализа. –М.: Прогресс, 1971).

Два пути перехода от исходных микропоказателей (A) к макровыводам (D) должны давать одинаковые результаты:

$$f(h(A)) = h(B) = D = \varphi(C) = \varphi(g(A)).$$



2. ПРОБЛЕМА АГРЕГИРОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ АГРЕГИРОВАННЫХ ИНДЕКСОВ ЦЕН И ОБЪЕМОВ ТОВАРОВ

2.1. Проблема построения индексов в статической постановке (опираясь только на располагаемые исходные данные). Теорема о невозможности построения идеальных методов расчета индексов (противоречивость общепринятых требований к методам расчета индексов).

2.2. Индексы в непрерывном времени Девизиа. Их странности.

2.3. Аналитические индексы, использующие не существующие в явном виде категории (функции полезности, производственные функции). Теорема о невозможности корректного построения аналитических индексов в непрерывном времени.

2. 1. ИСХОДНАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА МЕТОДА РАСЧЕТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ

R_{+}^{n}, $R_{\oplus}^{n}$ - множества n-мерных векторов с неотрицательными и положительными всеми компонентами.

Заданы: $n \geq 2$ число видов товаров; P^t, Q^t, V^t - векторы $R_{\oplus}^{n}$ цен, объемов и стоимостей отдельных товаров в периоде времени t,

$$V_i^t = P_i^t Q_i^t, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Расчетные показатели: темпы роста цен, объемов и стоимости отдельных товаров в периоде t по сравнению к периоду τ -

$$p_i^{\tau t} = \frac{P_i^t}{P_i^\tau}, \ \ q_i^{\tau t} = \frac{Q_i^t}{Q_i^\tau}, \ \ v_i^{\tau t} = \frac{V_i^t}{V_i^\tau}, \ \ i = 1, \ldots, n;$$

индекс роста стоимости всех товаров -

$$I_v^{\tau t} = \frac{V_\Sigma^t}{V_\Sigma^\tau}, \quad \text{где} \quad V_\Sigma^t = \sum_{i=1}^{n} V_i^t.$$

Необходимо построить индексы цен и объемов

$$I_p^{\tau t} = f\left(P^\tau, Q^\tau, P^t, Q^t\right),$$

$$I_q^{\tau t} = \varphi\left(Q^\tau, P^\tau, Q^t, P^t\right),$$

f ,φ - искомые функции, определяющие метод расчета индексов.

Численное значение индекса может сильно зависеть от выбора метода его расчета при одних и тех же исходных данных

ИНДЕКСЫ ЦЕН ДЛЯ ПРОДУКТОВ ПИТАНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КОРЗИНЫ Г. ИРКУТСКА

	Индекс потреб. корзины	Средне-геометр. индекс	Индекс Пааше по пост. базе	Индекс Пааше по пер. базе	Индекс Ласпейреса по пост. базе	Индекс Ласпейреса по пер. базе	Индекс Фишера по пост. базе	Индекс Фишера по пер. базе
янв. ‘92	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
июнь ‘92	1.82	1.47	1.31	1.26	1.82	1.79	1.54	1.50
янв.‘93	5.27	4.21	3.73	3.36	5.27	5.56	4.43	4.32
июнь ‘93	12.73	9.50	7.33	**7.16**	12.73	**13.33**	9.66	9.77

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ИНДЕКСОВ

Представление методов расчета индексов в виде отображений исходных данных

$$I_p^{\tau t} = f\left(P^{\tau}, Q^{\tau}, P^{t}, Q^{t}\right), \quad I_q^{\tau t} = \varphi\left(Q^{\tau}, P^{\tau}, Q^{t}, P^{t}\right),$$

где $f \in \Phi^4$, $\varphi \in \Phi^4$

$$\Phi^4 = \left\{ f: \; R_{\oplus}^n \times R_{\oplus}^n \times R_{\oplus}^n \times R_{\oplus}^n \to R_{\oplus}^1 \right\}.$$

Требования к индексам (к функциям f и φ)

1. Тест стоимости

$$I_p^{\tau t} \times I_q^{\tau t} = I_v^{\tau t}$$

(при любых $P^{\tau}, Q^{\tau}, P^{t}, Q^{t}$ из $R_{\oplus}^n$).

2. Транзитивность

$$I_p^{\tau r} \times I_p^{r t} = I_p^{\tau t}; \qquad I_q^{\tau r} \times I_q^{r t} = I_q^{\tau t}.$$

3. Среднего значения

$$\hat{p}^{\tau t} \geq I_p^{\tau t} \geq \breve{p}^{\tau t}, \quad \hat{q}^{\tau t} \geq I_q^{\tau t} \geq \breve{q}^{\tau t}.$$

ПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ИСХОДНЫХ ТРЕБОВАНИЙ

Пусть: $\Phi^2 = \left\{f\colon\ R^n_\oplus \times R^n_\oplus \to R^1_\oplus\right\}$; $\Phi^1 = \left\{f\colon\ R^n_\oplus \to R^1_\oplus\right\}$;

F - множество непрерывных функций $f \in \Phi^1$, таких, что при любых P^τ, P^t из $R^n_\oplus$

$$\hat{p}^{\tau t} \equiv \max P^t_j / P^\tau_j \geq f\left(P^t\right) / f\left(P^\tau\right) \geq \breve{p}^{\tau t} \equiv \min P^t_j / P^\tau_j \,;$$

Теорема 1. *В классе* Φ^2 *нет функций* $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}$, *таких, что при любых* P^τ, Q^τ, P^t, Q^t *из* $R^n_\oplus$

$$\tilde{f}\left(P^\tau, P^t\right) \times \tilde{\varphi}\left(Q^\tau, Q^t\right) = \sum P^t_j Q^t_j \Big/ \sum P^\tau_j Q^\tau_j \,.$$

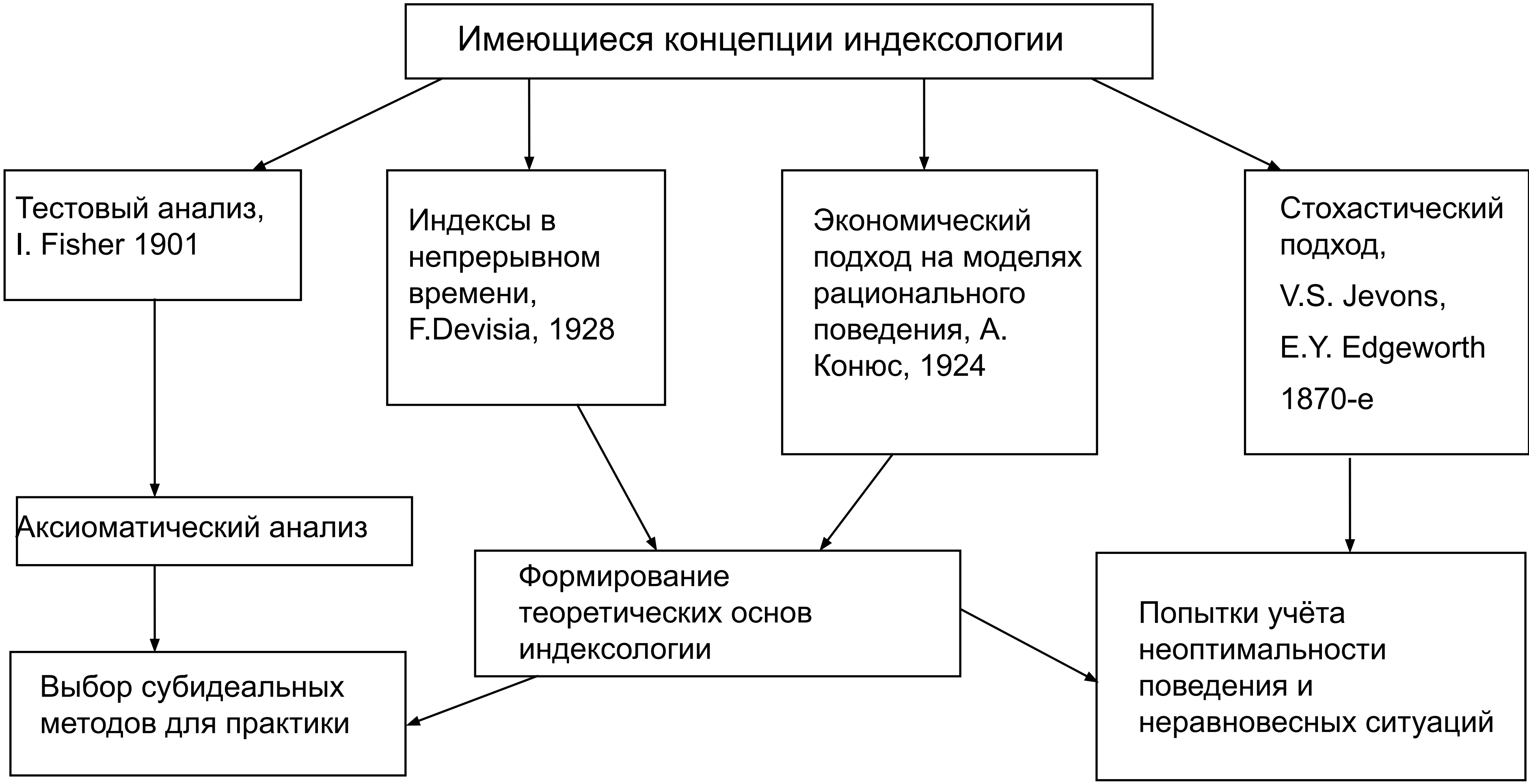
Теорема 2. *Функции* f, φ *из* Φ^4 *удовлетворяют требованиям транзитивности и среднего значения в том и только в том случае, если для некоторых функций* h *и* ψ *из* F

$$f\left(P^\tau, Q^\tau, P^t, Q^t\right) = h\left(P^t\right) / h\left(P^\tau\right),$$

$$\varphi\left(Q^\tau, P^\tau, Q^t, P^t\right) = \psi\left(Q^t\right) / \psi\left(Q^\tau\right).$$

Теорема 3 *(следствие из теорем 1 и 2). Требования транзитивности, среднего значения и тест стоимости противоречивые - в классе* Φ^4 *нет функций, удовлетворяющих всем этим требованиям*

Гипотеза. Противоречивость общепринятых, безусловно необходимых требований к методам расчета экономических индексов есть следствие дискретности используемого времени. Например, невозможно записать корректно законы Ньютона в дискретном времени.



Направления исследований методов построения экономических индексов

2.2. ИНДЕКСЫ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

Исходные определения:

$A(t)$ - изменяющийся в непрерывном времени t параметр (дифференцируемый по t, имеющий положительные значения);

$a(\tau, t) = A(t)/A(\tau)$ - индекс, сопоставляющий два момента времени;

$a(t) = \lim\limits_{\tau \to 0} \left(A(t)/A(t-\tau) \right)^{1/\tau}$ -

моментный темп роста (какой был бы темп роста за единицу времени, если в течении него параметр A изменялся также, как в момент t);

Свойства:

$$a(t) = \exp\left(d \ln A(t)/dt\right),$$

$$a(\tau, t) = \exp \int_{\tau}^{t} \ln a(x) dx.$$

Изменения в непрерывном времени цен P_j, потоков объема Q_j и стоимости V_j.

Исходные уравнения

$$V_j(t) = P_j(t)Q_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

$V(t) = \sum V_j(t)$ - поток стоимости всех товаров в момент времени t.

Следовательно

$$dV(t) = \sum Q_j(t)dP_j(t) + \sum P_j(t)dQ_j(t).$$

Отсюда для моментного индекса потока стоимости получаем выражение

$$v(t) = p(t) \cdot q(t),$$

где

$$p(t) = \prod \left(p_j(t)\right)^{\alpha_j(t)}, \;\; q(t) = \prod \left(q_j(t)\right)^{\alpha_j(t)}$$

- моментные индексы цен и объемов;

$\alpha_j(t) = V_j(t)/V(t)$ - удельные веса отдельных товаров в потоке стоимости всех товаров.

Индексы цен и объемов Девизиа:

$$p(\tau, t) = \exp\int_{\tau}^{t} \ln p(x)dx, \;\; q(\tau, t) = \exp\int_{\tau}^{t} \ln q(x)dx.$$

Вывод моментных индексов цен и объемов из моментного индекса стоимости

$$v(t) = \exp\left(\frac{d\ln V(t)}{dt}\right) = \exp\frac{1}{V(t)}\frac{dV(t)}{dt} =$$

$$= \exp\frac{1}{V(t)}\sum\left(Q_j(t)\frac{dP_j(t)}{dt} + P_j(t)\frac{dQ_j(t)}{dt}\right) =$$

$$= \exp\sum\frac{V_i(t)}{V(t)}\left(\frac{Q_i(t)}{V_i(t)}\frac{dP_i(t)}{dt} + \frac{P_i(t)}{V_i(t)}\frac{dQ_i(t)}{dt}\right) =$$

$$= \exp\sum\alpha_i(t)\left(\frac{1}{P_i(t)}\frac{dP_i(t)}{dt} + \frac{1}{Q_i(t)}\frac{dQ_i(t)}{dt}\right) =$$

$$= \exp\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\left(\frac{d\ln P_i(t)}{dt} + \frac{d\ln Q_i(t)}{dt}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\exp\frac{d\ln P_i(t)}{dt}\right)^{\alpha_i(t)} \times \left(\exp\frac{d\ln Q_i(t)}{dt}\right)^{\alpha_i(t)} =$$

$$= \prod\left(p_i(t)\right)^{\alpha_i(t)} \times \prod\left(q_i(t)\right)^{\alpha_i(t)} = p(t)q(t).$$

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНДЕКСОВ ДЕВИЗИА

1. **Зависимость от траектории перехода:** значения $p(\tau,t)$, $q(\tau,t)$ зависят от векторов цен $P(x)$ и потока объемов товаров $Q(x)$ не только в моменты $x=\tau$, $x=t$, но и в другие моменты времени $x\in(\tau,t)$.

2. **Нарушение требования среднего значения:** существуют случаи, когда

$$p(\tau,t)\notin\left[\min\frac{P_j(t)}{P_j(\tau)},\ \max\frac{P_j(t)}{P_j(\tau)}\right],$$

$$q(\tau,t)\notin\left[\min\frac{Q_j(t)}{Q_j(\tau)},\ \max\frac{Q_j(t)}{Q_j(\tau)}\right].$$

3. **Нарушение требования идентичности:** есть числовые примеры, в которых

$$P(t)=P(\tau),\qquad Q(t)=Q(\tau)$$

и при этом

$$p(\tau,t)\neq 1,\qquad q(\tau,t)\neq 1.$$

ИТОГИ АНАЛИЗА ИНДЕКСОВ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

1. Из уравнения стоимости $\sum P_j(t) Q_j(t) = V_\Sigma(t)$ вытекают единственные формулы определения индексов цен и объемов в непрерывном времени - индексы Девизиа.

2. Индексы Девизиа выводятся только на основе математических преобразований. Необходима их экономическая интерпретация.

3. Численные значения индексов Девизиа зависят от траекторий изменения цен и объемов за весь период между сопоставляемыми моментами времени, что делает их:

а) только теоретическими конструкциями, непригодными для практических расчетов;

б) сомнительными с экономических позиций (в т.ч. из-за нарушения условий "среднего значения" и "идентичности").

Гипотеза. Следует рассматривать не произвольные, а экономически взаимосвязанные траектории изменений цен и объемов товаров.

2.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ПОКУПАТЕЛЯ

Заданы: цены $P \in R_{\oplus}^n$, функция полезности $U(Q)$, желаемый уровень полезности

$$u \in [\underline{u}, \overline{u}], \text{ где } \underline{u} = U(\mathbf{0}),\ \overline{u} = \sup_{Q \in R_+^n} U(Q).$$

Выбираемый набор благ имеет наименьшую стоимость среди наборов с полезностью, не меньшей u:

$$\hat{Q}(P,u,U) = \arg\min\left\{\sum P_j Q_j : U(Q) \geq u,\ Q \in R_+^n\right\}.$$

Рассматриваемый класс функций полезности $\hat{\Psi}$ состоит из функций $U: R_+^n \to R$ таких, что при любых $P \in R_{\oplus}^n$, $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ вектор $Q(P,u,U)$ существует и единственен, его компоненты - непрерывные и дифференцируемые функции от u и P_j, $j = 1,\ldots,n$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ПОКУПАТЕЛЯ

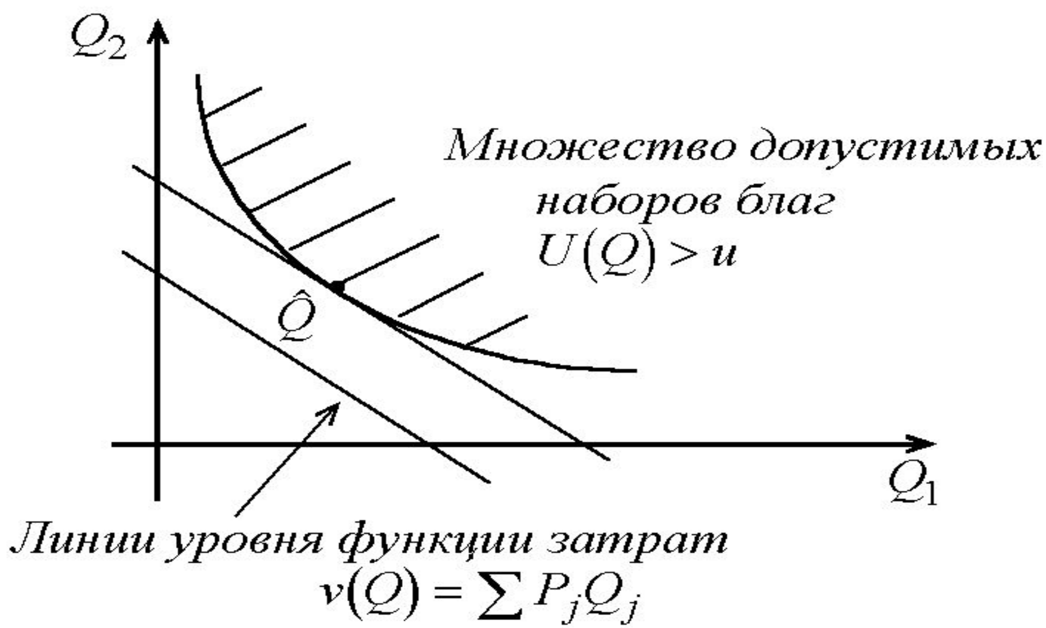
(минимизация затрат на приобретение благ заданного уровня полезности)

Заданы: цены $P \in R^n_{\oplus}$, функция полезности $U(Q)$, желательный уровень полезности $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$, где

$$\underline{u} = U(0), \qquad \overline{u} = \sup_{Q \in R^n_+} U(Q).$$

Выбираемый набор благ

$$\hat{Q} = \arg\min \left\{ \sum P_j Q_j : Q \geq 0, U(Q) \geq u \right\}.$$



ВЗАИМОСВЯЗИ ИСХОДНОЙ И МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧ ВЫБОРА ПОКУПАТЕЛЯ

Теорема: 1) $\hat{\Psi} \subset \Psi$;

2) для $U \in \hat{\Psi}$ эффективные наборы благ составляют множество

$$C(U) = \left\{Q(P,u,U):\ P \in R^n_{\oplus},\ u \in [\underline{u},\overline{u}]\right\};$$

3) функции $U, \widetilde{U} \in \hat{\Psi}$ квазиэквивалентны, если и только если существует дифференцируемая, монотонно возрастающая функция

$$f:\quad [\underline{u},\overline{u}] \to \left[\widetilde{U}(\mathbf{0}),\ \sup_{Q \in R^n_+} \widetilde{U}(Q)\right],$$

для которой при любых $P \in R^n_+$, $u \in [\underline{u},\overline{u}]$

$$\hat{Q}(P,u,U) = \hat{Q}\left(P, f(u), \widetilde{U}\right);$$

4) функция $U \in \hat{\Psi}$ квазиоднородная, если и только если при любом $P \in R^n_+$ и любых $u, \widetilde{u} \in [\underline{u},\overline{u}]$

$$Q(P,u,U) = \lambda \hat{Q}(P,\widetilde{u},U)$$

для некоторого $\lambda \geq 0$, зависящего от $P, u, \widetilde{u}$.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ ИЗ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ПОКУПАТЕЛЯ (ИНДЕКСЫ А.КОНЮСА)

Заданы функции полезности $U \in \hat{\Psi}$.

Представление стоимости товаров в виде функции от цен и уровня полезности

$$V(P,u) = \sum P_j Q_j (P,u,U).$$

Отсюда теоретическое представление индекса стоимости:

$$I_v^{\tau t} = V\left(P^t, u^t\right) \Big/ V\left(P^\tau, u^\tau\right).$$

Два способа разложения индекса стоимости на аналитические индексы цен и объемов: справедливы равенства

$$I_v^{\tau t} = A_p^{\tau t} A_q^{\tau t} = \tilde{A}_p^{\tau t} \tilde{A}_q^{\tau t},$$

где

$$A_p^{\tau t} = \frac{V\left(P^t, u^\tau\right)}{V\left(P^\tau, u^\tau\right)}, \qquad A_q^{\tau t} = \frac{V\left(P^t, u^t\right)}{V\left(P^t, u^\tau\right)},$$

$$\tilde{A}_p^{\tau t} = \frac{V\left(P^t, u^t\right)}{V\left(P^\tau, u^t\right)}, \qquad \tilde{A}_q^{\tau t} = \frac{V\left(P^\tau, u^t\right)}{V\left(P^\tau, u^\tau\right)}$$

ОСОБЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ

1. Они основаны на базовых понятиях современной экономической теории, в т.ч. на функции полезности при всех ее недостатках и удобствах.

2. Они представляются в виде отношений двух типов величин:

$$A_p^{\tau t} = V\left(P^t, u^\tau\right)/V^\tau, \quad A_q^{\tau t} = V^t/V(P^t, u^\tau);$$

$$\tilde{A}_p^{\tau t} = V^t/V\left(P^\tau, u^t\right), \quad \tilde{A}_q^{\tau t} = V\left(P^\tau, u^t\right)/V^\tau.$$

Непосредственно наблюдаемые, получающие экономическую интерпретацию

$$V^t = V\left(P^t, u^t\right), \quad V^\tau = V\left(P^\tau, u^\tau\right).$$

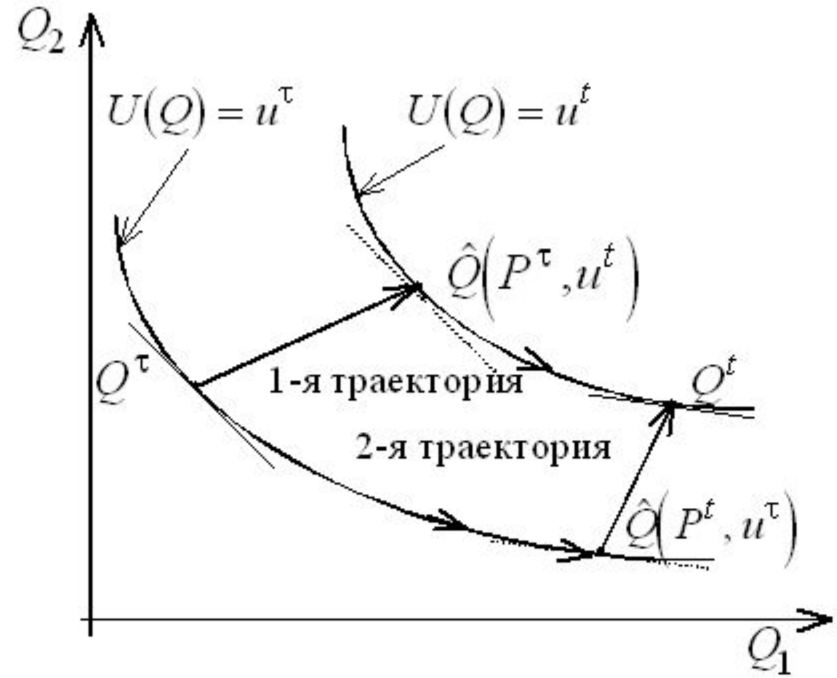
Гипотетические, чисто теоретические величины

$$V\left(P^t, u^\tau\right), \quad V\left(P^\tau, u^t\right).$$

3. Введенные два правила определения аналитических индексов могут давать разные численные значения. Возможен случай

$$A_p^{\tau t} \neq \tilde{A}_p^{\tau t}, \quad A_q^{\tau t} \neq \tilde{A}_q^{\tau t}.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗНАЧАЛЬНО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ ДВУХ ТРАЕКТОРИЙ ИЗМЕНЕНИЙ ЦЕН И ОБЪЕМОВ ТОВАРОВ



Возможно и множество других траекторий перехода из состояния P^τ, Q^τ в состояние P^t, Q^t, для которых могут быть другие численные значения индексов цен и объемов.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ МОГУТ СЛУЖИТЬ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИНДЕКСОВ ДЕВИЗИА

Теорема. Пусть: 1) $U \in \hat{\Psi}$;

2) цены P_j^t, $j = 1,\ldots,n$ и достигаемый уровень полезности u^t являются непрерывными дифференцируемыми функциями от времени t,

3) объемы товаров изменяются согласно модифицированной задаче выбора покупателя

$$Q^t = \hat{Q}\left(P^t, u^t\right).$$

Тогда: приводимые ниже пределы существуют и совпадают с моментными темпами цен и объемов:

$$\lim_{\tau \to 0}\left(A_p^{t,t+\tau}\right)^{1/\tau} = \lim_{\tau \to 0}\left(A_p^{t-\tau,t}\right)^{1/\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0}\left(\widetilde{A}_p^{t,t+\tau}\right)^{1/\tau} = \lim_{\tau \to 0}\left(\widetilde{A}_p^{t-\tau,t}\right)^{1/\tau} = p(t);$$

$$\lim_{\tau \to 0}\left(A_q^{t,t+\tau}\right)^{1/\tau} = \lim_{\tau \to 0}\left(A_q^{t-\tau,t}\right)^{1/\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0}\left(\widetilde{A}_q^{t,t+\tau}\right)^{1/\tau} = \lim_{\tau \to 0}\left(\widetilde{A}_q^{t-\tau,t}\right)^{1/\tau} = q(t),$$

где

$$p(t) = \prod_{j=1}^{n} (p_j(t))^{\alpha_j(t)}, \quad q(t) = \prod_{j=1}^{n} \left(q_j(t)\right)^{\alpha_j(t)},$$

$$\alpha_j(t) = V_j(t) / \sum V_j(t).$$

ОБЪЯСНЕНИЕ ВОЗМОЖНЫХ ЧИСЛЕННЫХ РАЗЛИЧИЙ ДВУХ ТИПОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ ИЗ ЗАВИСИМОСТИ ИНДЕКСОВ ДЕВИЗИА ОТ ТРАЕКТОРИЙ

Период $[\tau, t]$ разбивается на два подпериода:

Подпериод	**1**	**2**
Траектория 1 $A_p^{\tau t} = \frac{V(P^t, u^t)}{V(P^\tau, u^t)}$	цены: **не изменяются**; уровни полезности: **изменяются**	цены: **изменяются**; уровни полезности: **не изменяются**
Траектория 2 $A_q^{\tau t} = \frac{V(P^\tau, u^t)}{V(P^\tau, u^\tau)}$	цены: **изменяются**; уровни полезности: **не изменяются**	цены: **не изменяются**; уровни полезности: **изменяются**

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Траекторией изменения цен и потока объёма товаров будем называть пару **дифференцируемых** во времени вектор-функций $P(x), Q(x) \in R^n_{\oplus}$, где $x \in [\tau, t]$ - параметр времени, τ, t - начальный и конечный моменты времени траекторий, $\tau < t$.
2. Траектория изменения цен и потока объёмов товаров **обусловлена** функцией полезности $U \in \Psi$, если существует дифференцируемая функция

$$u(x) \in \left[U(0), \sup\{U(Q) : Q \in R^n_+ \right],$$

такая, что при любом $x \in [\tau, t]$

$$Q(x) = \hat{Q}(P(x), u(x), U).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ (продолжение)

3. Функция полезности $U \in \hat{\Psi}$ **порождает инвариантные к промежуточным состояниям траекторий индексы**, если для любых двух траекторий, обусловленных функцией U,

$$P(x),\ Q(x) \text{ и } \widetilde{P}(x),\ \widetilde{Q}(x), \qquad x \in [\tau, t],$$

из равенств

$$P(\tau) = \widetilde{P}(\tau), \qquad P(t) = \widetilde{P}(t),$$

$$Q(\tau) = \widetilde{Q}(\tau), \qquad Q(t) = \widetilde{Q}(t)$$

следует, что

$$p(\tau, t) = \widetilde{p}(\tau, t), \qquad q(\tau, t) = \widetilde{q}(\tau, t),$$

где

$p(\tau, t),\ q(\tau, t)$ - индексы Девизиа для траектории $P(x),\ Q(x)$,

$\widetilde{p}(\tau, t),\ \widetilde{q}(\tau, t)$ - индексы Девизиа для траектории $\widetilde{P}(x),\ \widetilde{Q}(x)$

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ИНДЕКСОВ ДЕВИЗИЯ-КОНЮСА К ПРОМЕЖУТОЧНЫМ СОСТОЯНИЯМ ТРАЕКТОРИЙ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН И ПОТОКА ОБЪЁМА ТОВАРОВ

Теорема: Функция полезности $U \in \Psi$ порождает инвариантные к промежуточным состояниям траекторий изменения цен и потока объёмов товаров индексы в том и только в том случае, если эта функция квазиоднородная.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ КВАЗИОДНОРОДНОСТИ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ ИНДЕКСОВ

Теорема. *Для траекторий изменения цен и потока объема товаров, порожденных квазиоднородной функцией полезности* $U \in \hat{\Psi}$*:*

1. Оба варианта определения аналитических индексов дают одинаковые результаты

$$I_p^{\tau t} = A_p^{\tau t} = \widetilde{A}_p^{\tau t} = p(\tau, t),$$

$$I_q^{\tau t} = A_q^{\tau t} = \widetilde{A}_q^{\tau t} = q(\tau, t);$$

2. Индексы Ласпейреса и Паше совпадают

$$I_p^{\tau t} = I_{pL}^{\tau t} = I_{pP}^{\tau t}, \qquad I_q^{\tau t} = I_{qL}^{\tau t} = I_{qP}^{\tau t};$$

3. Для индексов цен и объемов выполняются требования теста стоимости

$$I_p^{\tau t} \times I_q^{\tau t} = I_v^{\tau t},$$

транзитивности

$$I_p^{\tau s} \times I_p^{st} = I_p^{\tau t}, \qquad I_q^{\tau s} \times I_q^{st} = I_q^{\tau t}$$

и среднего значения

$$\hat{p}^{\tau t} \geq I_p^{\tau t} \geq \breve{p}^{\tau t}, \qquad \hat{q}^{\tau t} \geq I_q^{\tau t} \geq \breve{q}^{\tau t}$$

СПАСИБО ЗА…!