

*Орлов Юрий Николаевич*

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, сектор кинетических уравнений  
МФТИ, кафедра высшей математики

---

Методы  
математической демографии:  
современное состояние, проблемы, точные результаты

# ВВЕДЕНИЕ В ПРОБЛЕМАТИКУ

# Цели демографического исследования

---

- Спрогнозировать численность людей определенной категории (возрастной, половой, социальной, этнической), которые будут находиться на некоторой территории (город, страна, мир) в заданный момент времени (год). Для этого необходимо:
  - определить вероятность смерти по всем причинам для представителей выбранной страны;
  - определить вероятности перехода из одной социальной страны в другую и миграционный поток в единицу времени (год);
  - определить вероятность рождения ребенка в данный год в данной социальной стране.

# Важность знания демографического положения и тенденций

---

- Численность трудоспособного населения определяет уровень использования производственных мощностей, потребность в будущих рабочих местах, желаемый уровень трудовой миграции.
- Изменение соотношения между численностью трудоспособного населения и пенсионеров приводит к изменению внутреннего социально-экономического уклада.
- Численность новорожденных определяет будущую численность ВС, потребность в детских садах, школах, ВУЗах, а также необходимую численность учителей, врачей и т.п.
- Внутренняя и внешняя миграции приводят к изменению этнического состава поселений и уровня заселенности территорий.

# Методы исследования

---

- Эмпирико-статистические методы:
  - перепись населения;
  - обработка текущих данных;
  - оценка точности проведенных измерений.
- Методы математического моделирования:
  - модель эволюции по возрасту распределения;
  - модель изменения коэффициента воспроизводства;
  - модель ассимиляции в полиэтничном сообществе;
  - модели нелинейной динамики для описания численности.

# Основные определения

---

- Возрастная когорта – численность людей в определенном возрастном промежутке
- Когортная рождаемость – среднее число детей, рожденных женщиной определенного года рождения в течение своей жизни
- Нетто-коэффициент воспроизводства – среднее число девочек от одной матери, доживающих до среднего возраста матери
- Фертильность – число рождений на 1000 женщин данного возраста в текущий год.
- Стандартизованный коэффициент смертности – число умерших в течение года на 1000 списочного состава людей данного возраста

# Демографический переход

«Демографический переход» (Ландри, Ноутстайн, 1945) – смена типа воспроизводства населения. Вместо высокой рождаемости при высокой смертности общество перешло к низкой рождаемости при низкой смертности.

Основные этапы перехода:

1. Прогресс в науках и технологиях —————→ успехи медицины —————→  
снижение смертности во всех возрастах.
2. Т.к. рождаемость осталась прежней, численность населения резко возрастает.
3. С запаздыванием на 40-50 лет рождаемость снижается, и еще через 40-50 лет население становится стабильным.

Фактически же рождаемость снизилась так, что воспроизводство стало отрицательным.

# Точность измерения в демографии

---

Ошибка в подсчете численности при переписи – 5%.

Искажение национальной принадлежности при самоидентификации.

Неточность определения причины и места смерти, недоучет долгосрочной трудовой миграции.

В разных странах различные подходы к определению младенческой смертности: «кого считать живым?»

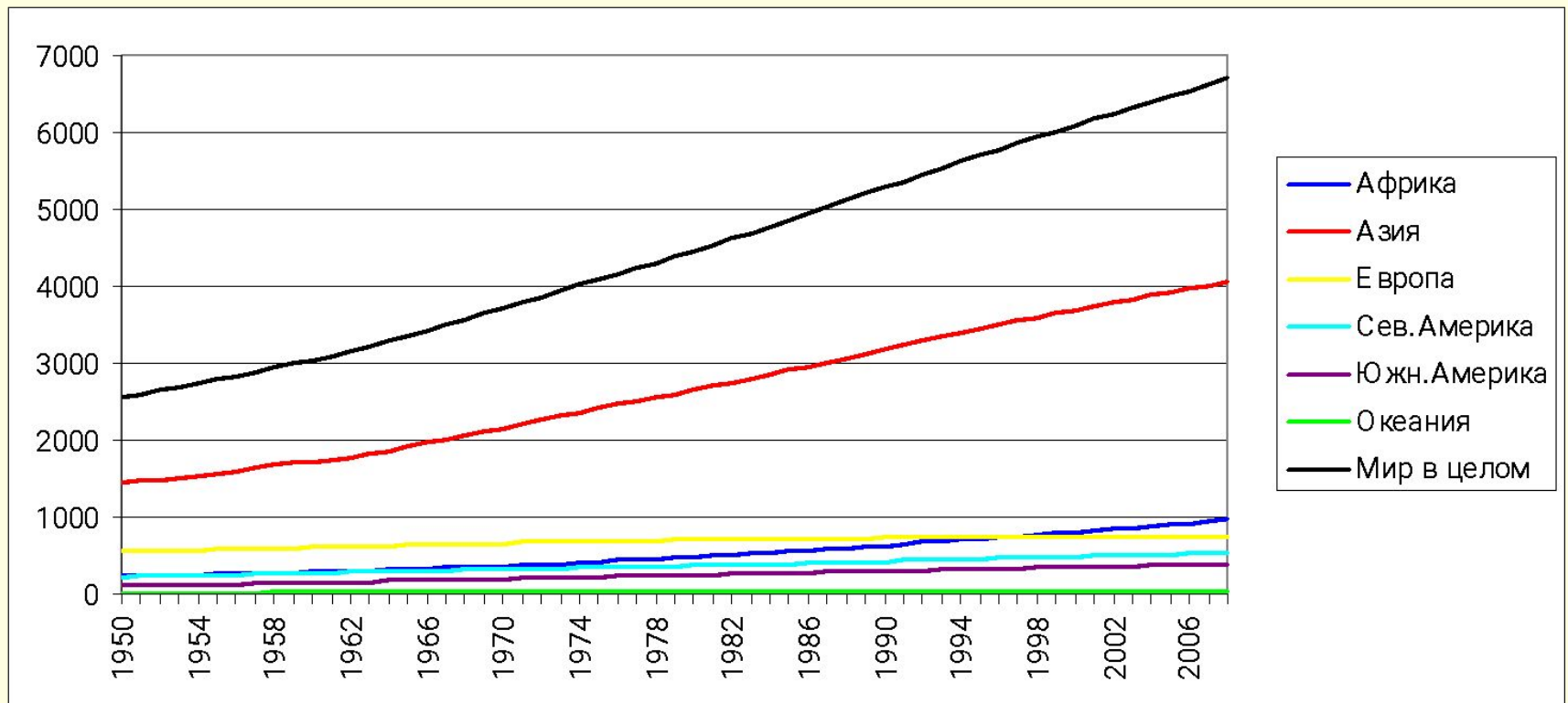
Ошибка в оценке миграции – до 500%.



---

# ДЕМОГРАФИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ В РОССИИ И В МИРЕ

# Динамика численности мирового населения

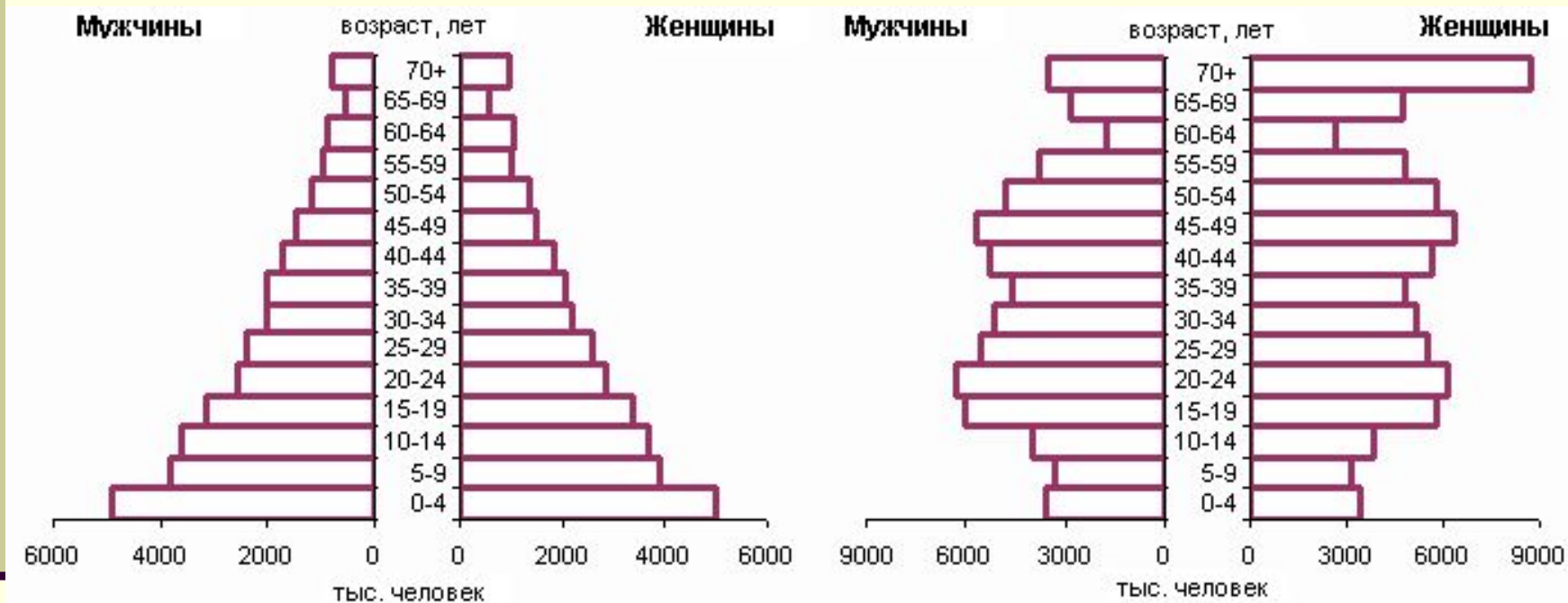


Рост населения мира по континентам, млн чел.

# Динамика численности населения России



# Изменение возрастной структуры населения России за 100 лет

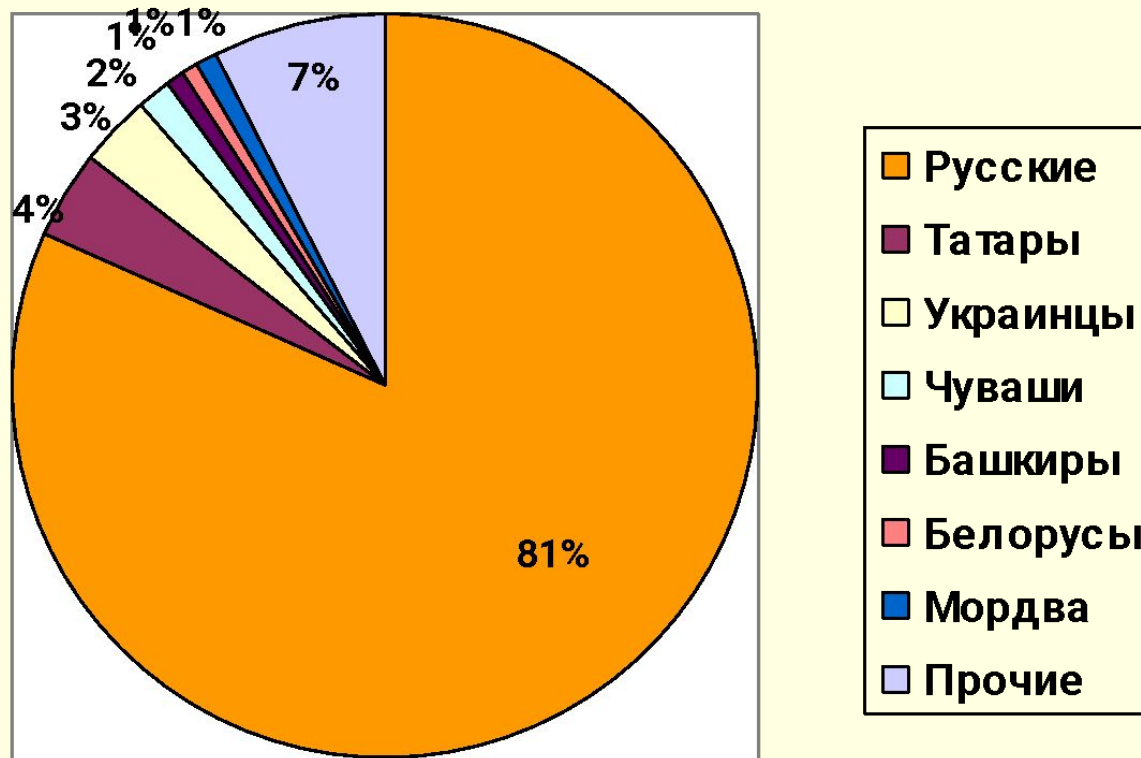


1897 г. (первая перепись)

2007 г. (расчет на основе переписи 2002 г.)

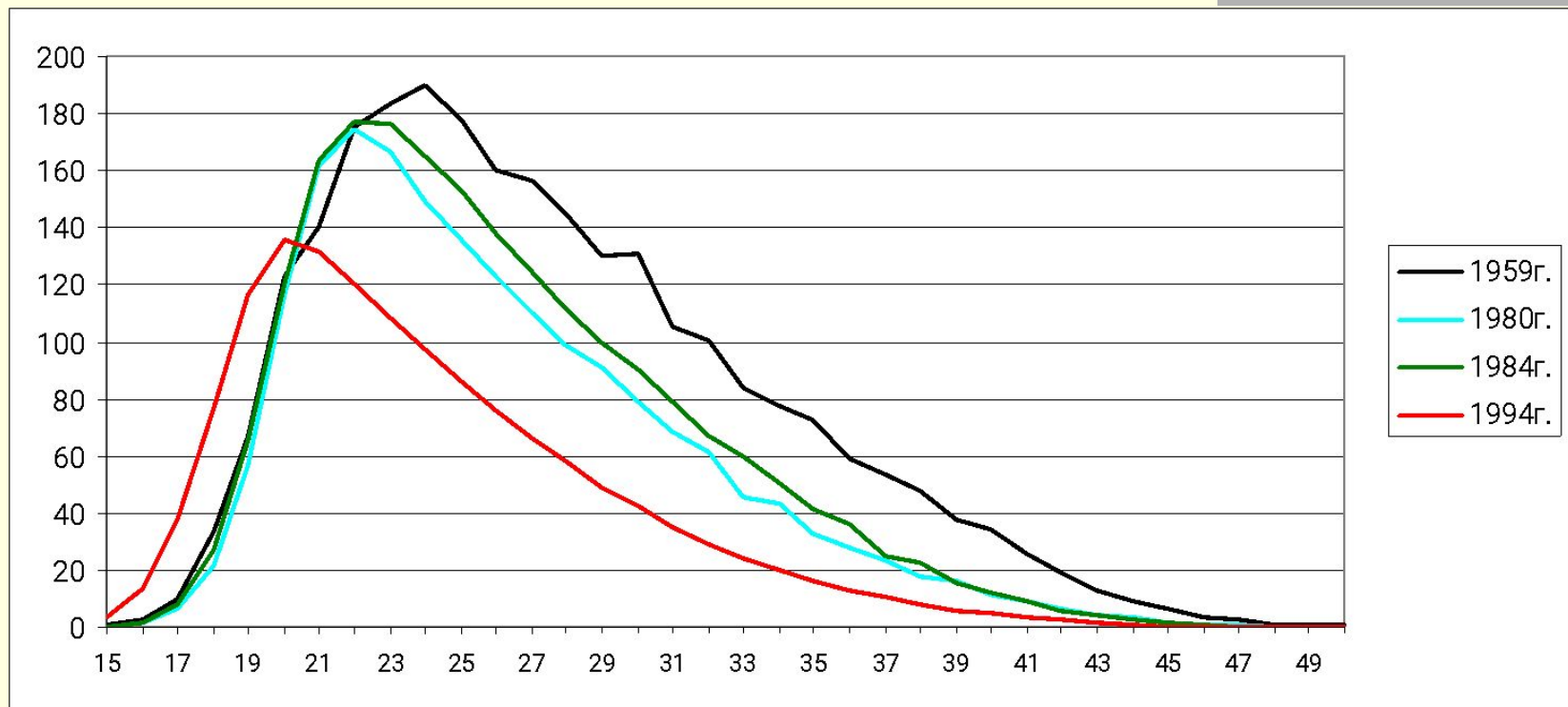
# Этнический состав России

(на основе самоидентификации по переписи 2002 г.)



# РОЖДАЕМОСТЬ

# Возрастной коэффициент рождаемости, Россия

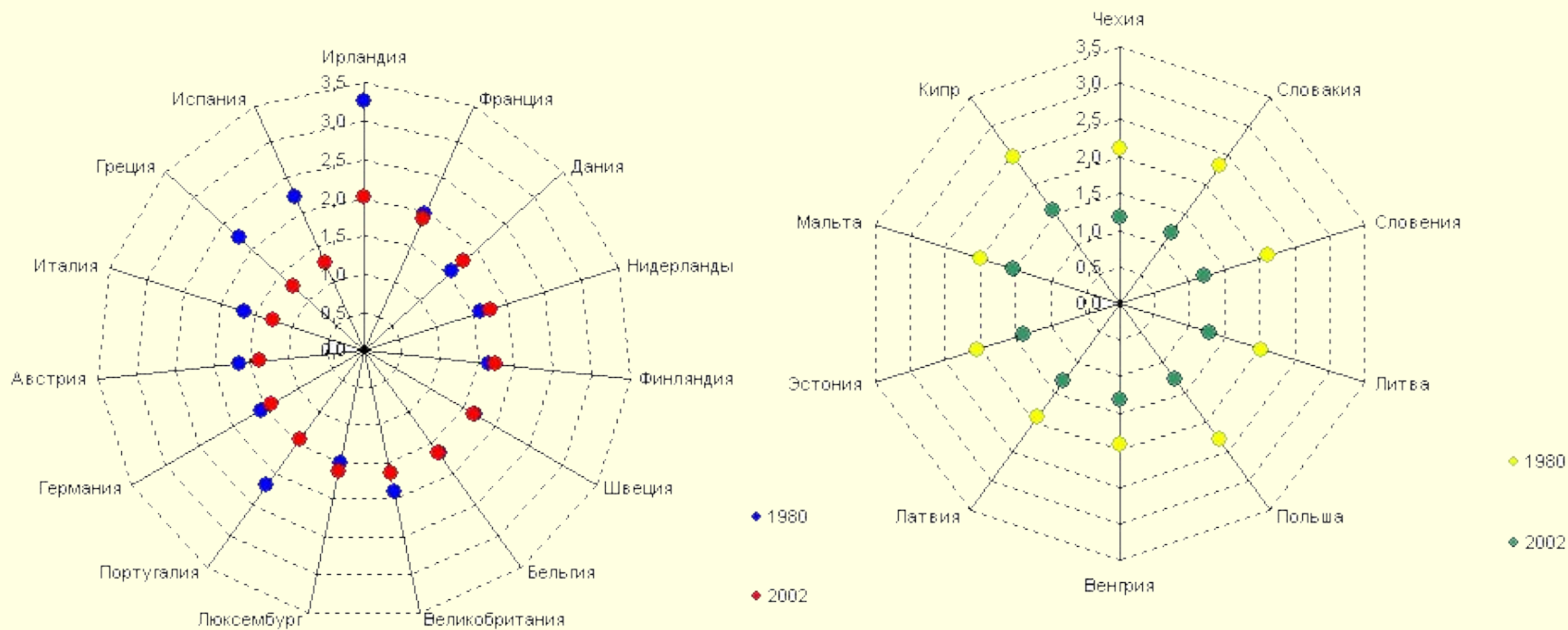


Число рождений на 1000 женщин данного возраста.

Коэффициент рождаемости (интеграл) на 1 женщину:

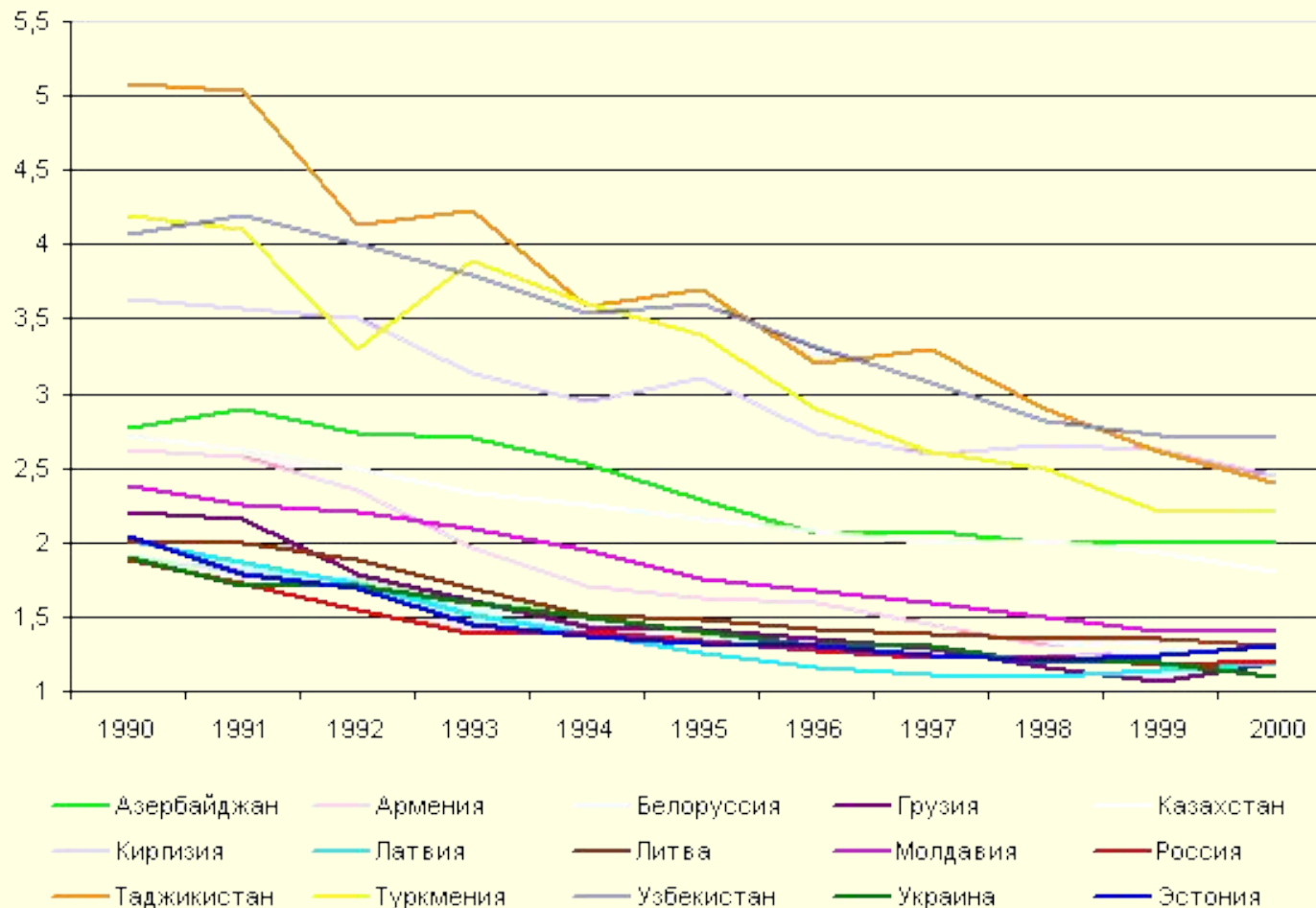
2,58 (1959г.), 1,86 (1980г.), 2,05 (1984г.), 1,38 (1998-2006гг.).

# Динамика коэффициента рождаемости в странах Европы

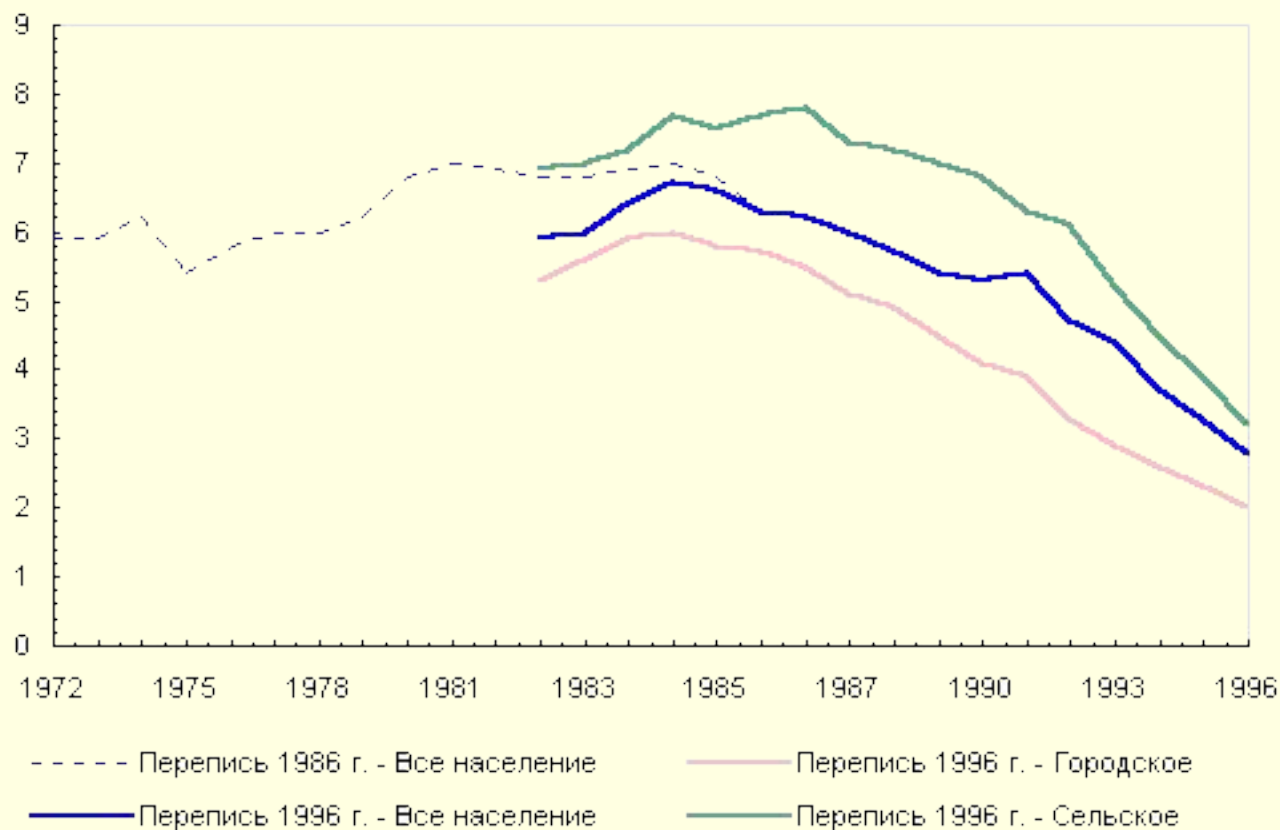




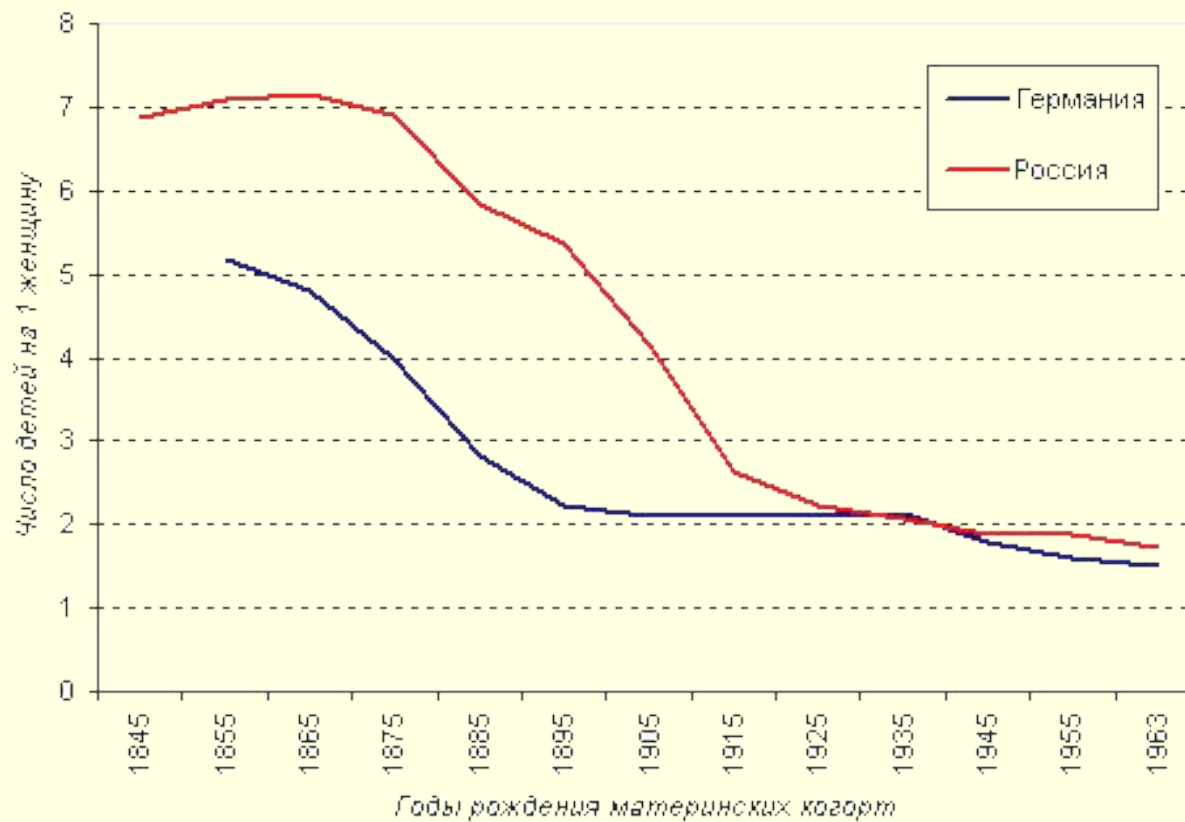
# Динамика коэффициента рождаемости в странах СНГ



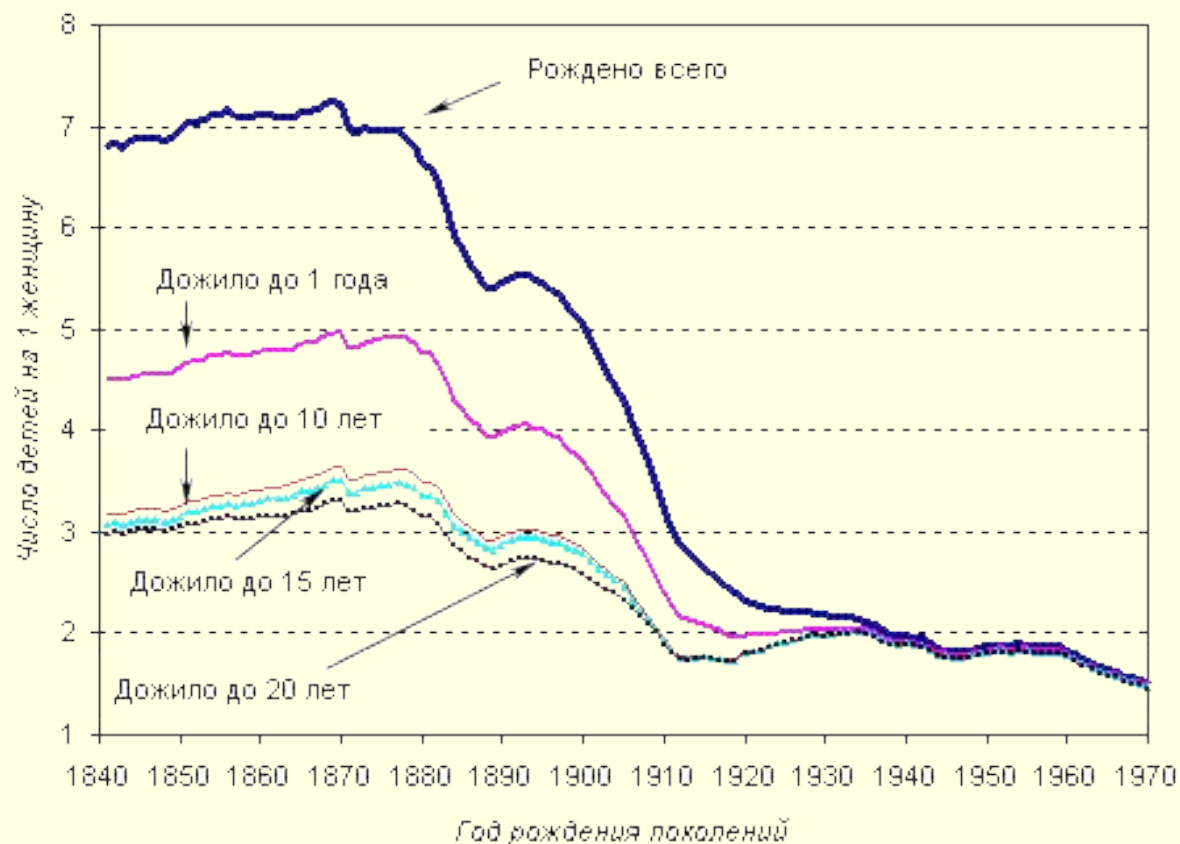
# Динамика коэффициента рождаемости в Иране



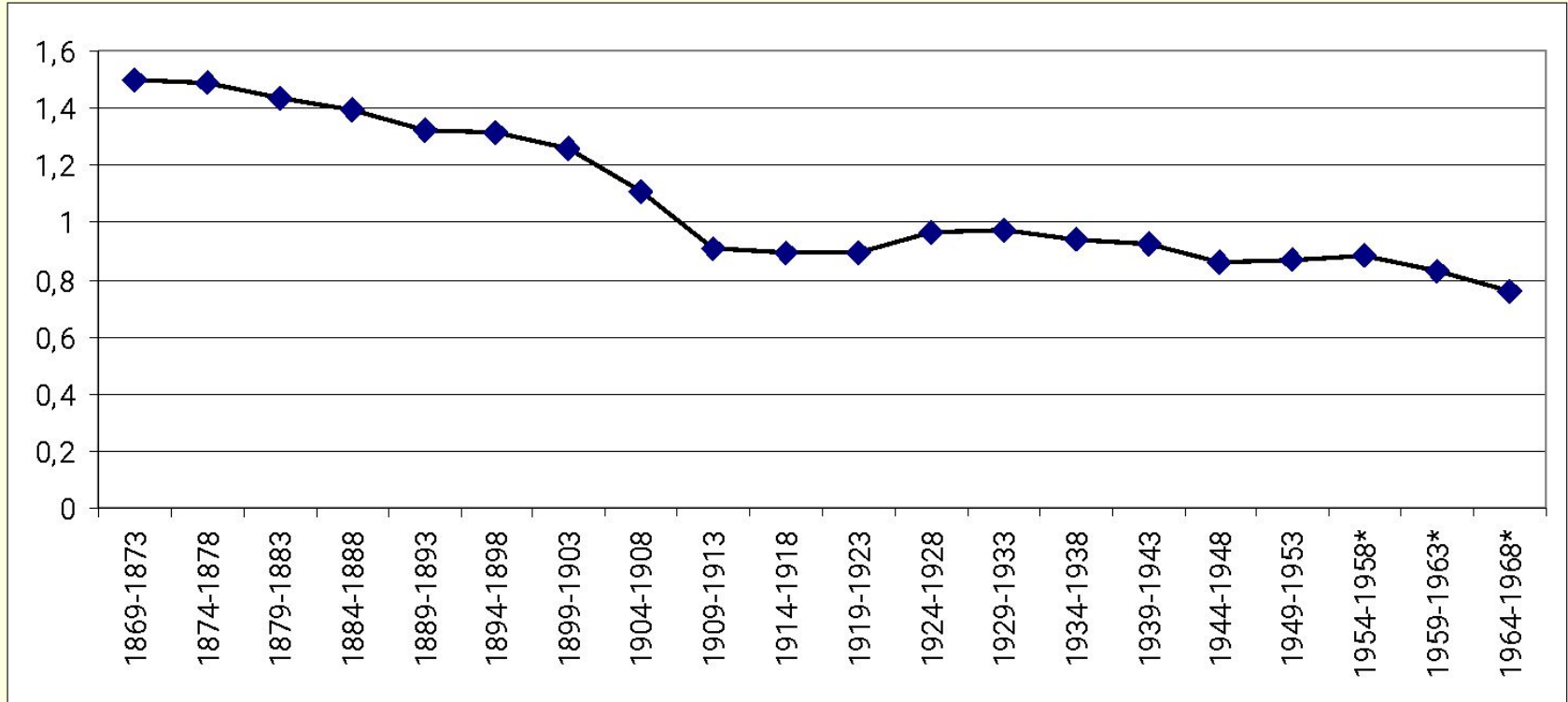
# Когортная рождаемость



# Детализация когортной рождаемости в России



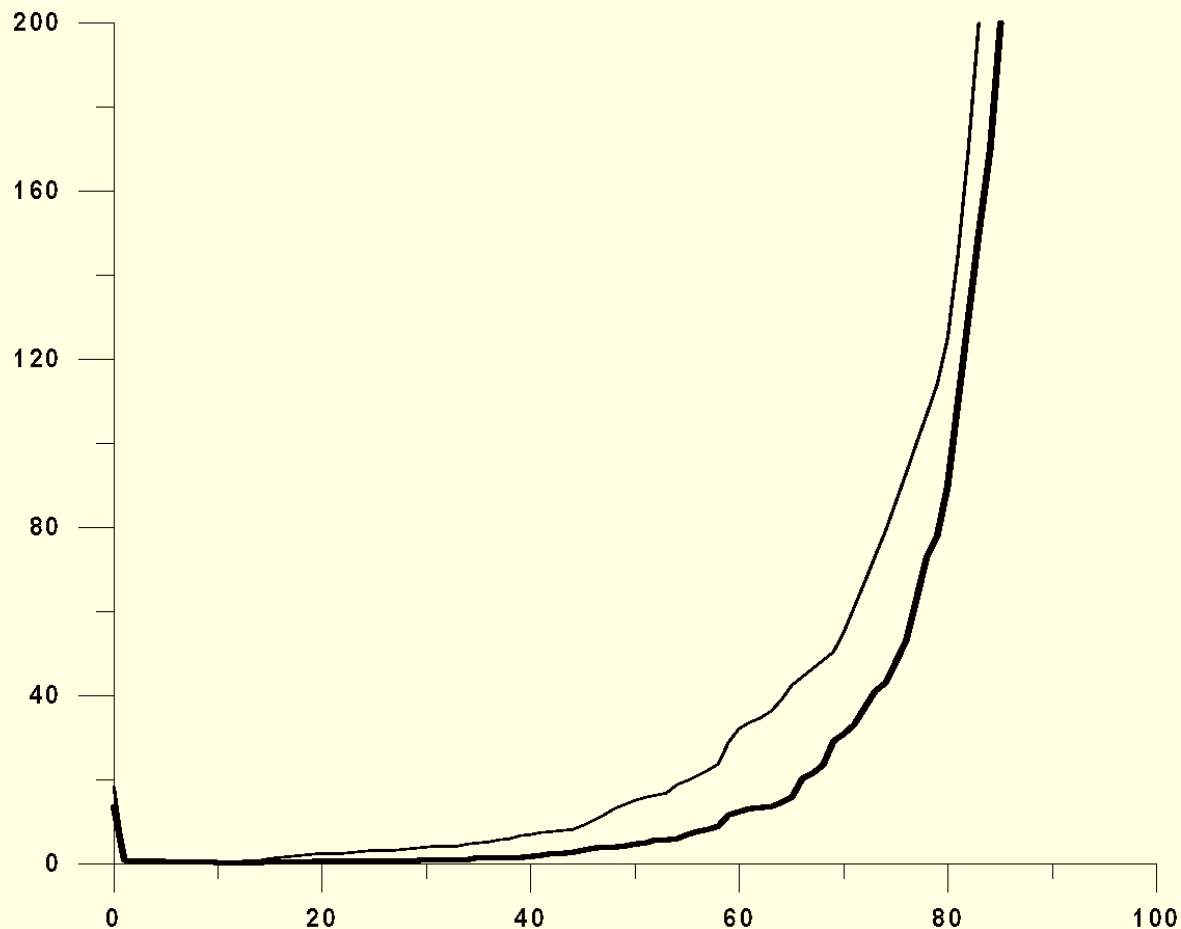
# Нетто-коэффициент воспроизводства в России



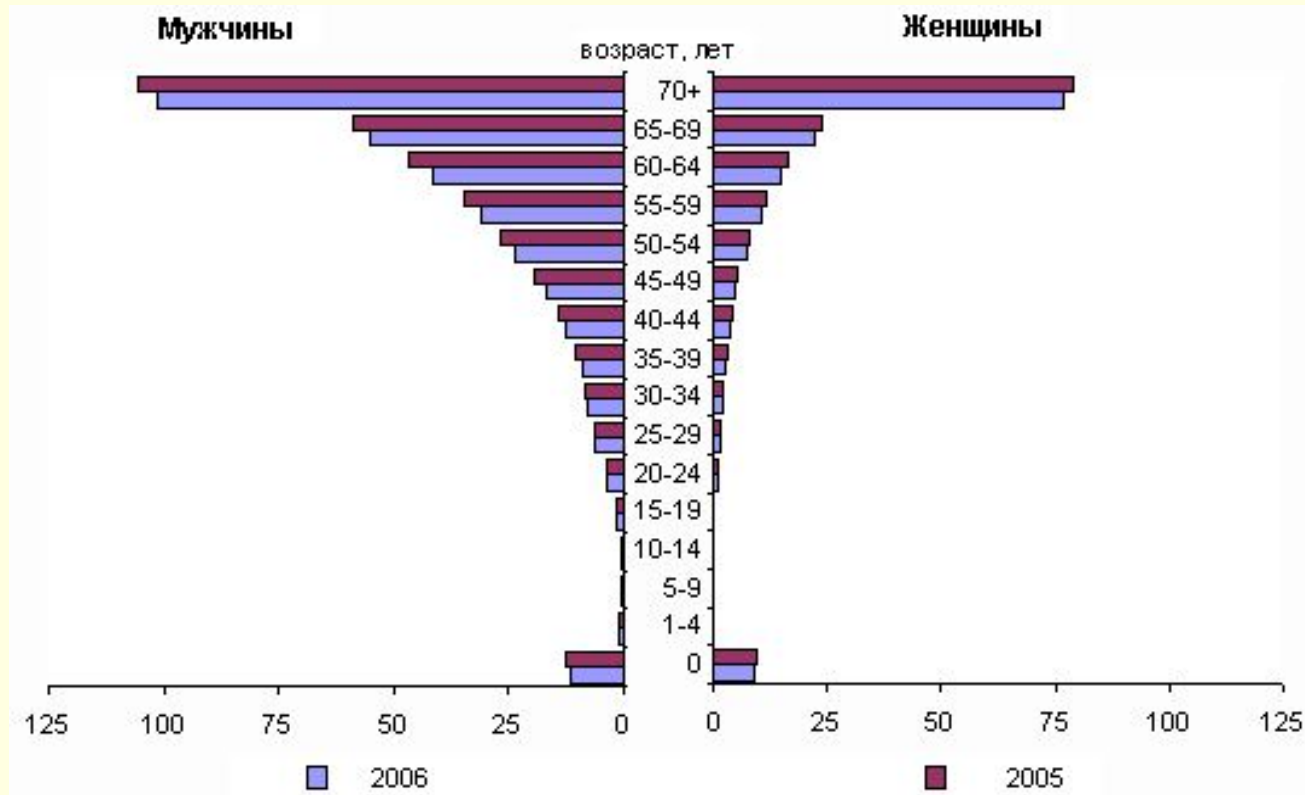
Число девочек, рожденных женщиной данной возрастной когорты в течение жизни, и доживших до среднего возраста матери

# СМЕРТНОСТЬ

# Возрастные коэффициенты смертности на 1000 чел., Россия



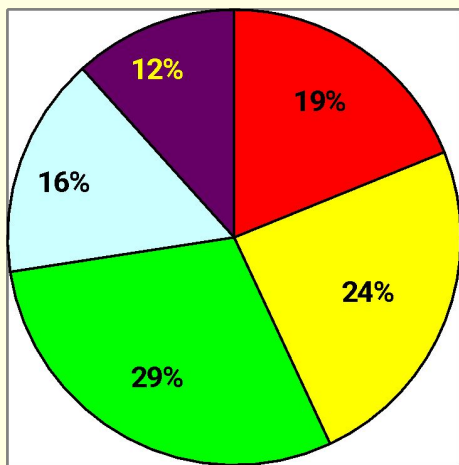
# Снижение смертности в 2005/2006 гг.



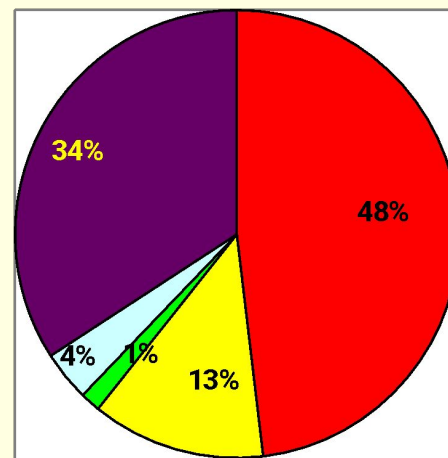
Ожидаемая продолжительность жизни (средний возраст смерти) составила: у мужчин 60,4 года (+1,5 года), у женщин 73,2 года (+0,8)



# Причины смертности



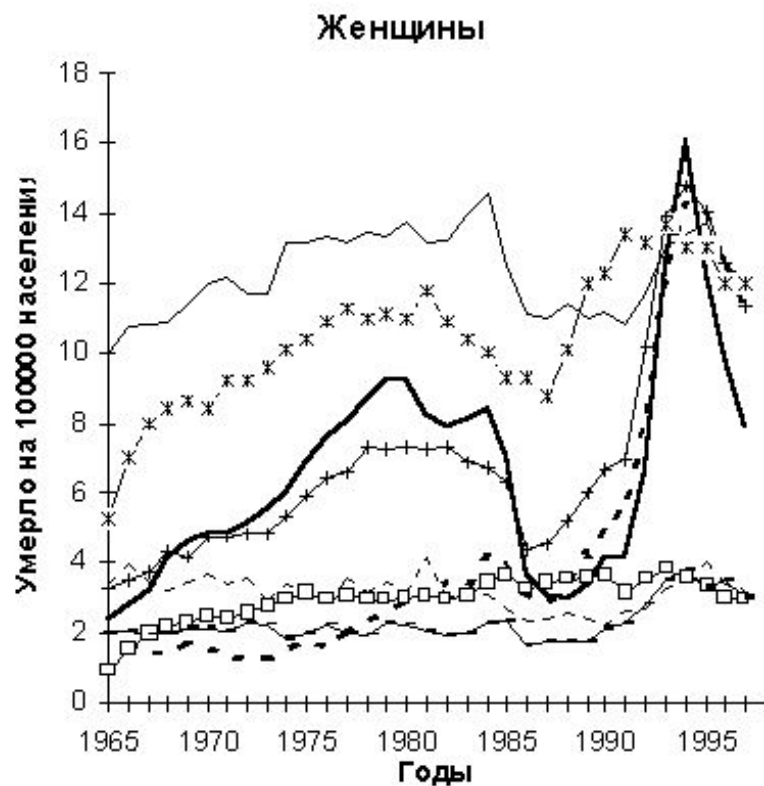
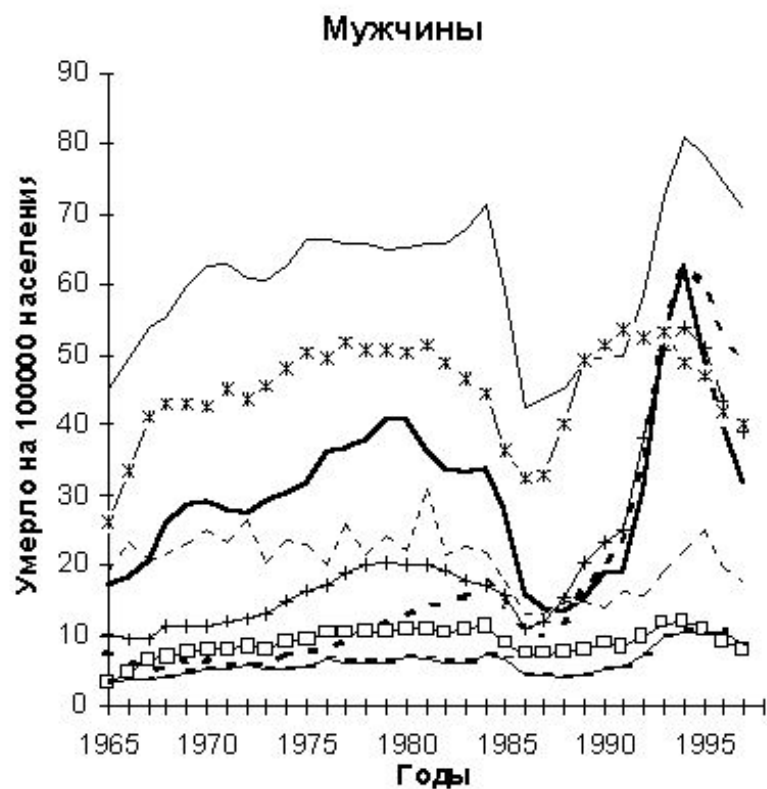
Мир



Россия

1 – болезни сердечно-сосудистой системы, 2 – новообразования, 3 – инфекции, 4 – болезни органов дыхания, 5 – внешние причины

# Смертность от внешних причин



—x— ДТП

— Алк. отравления

□ Падения

— Пожары

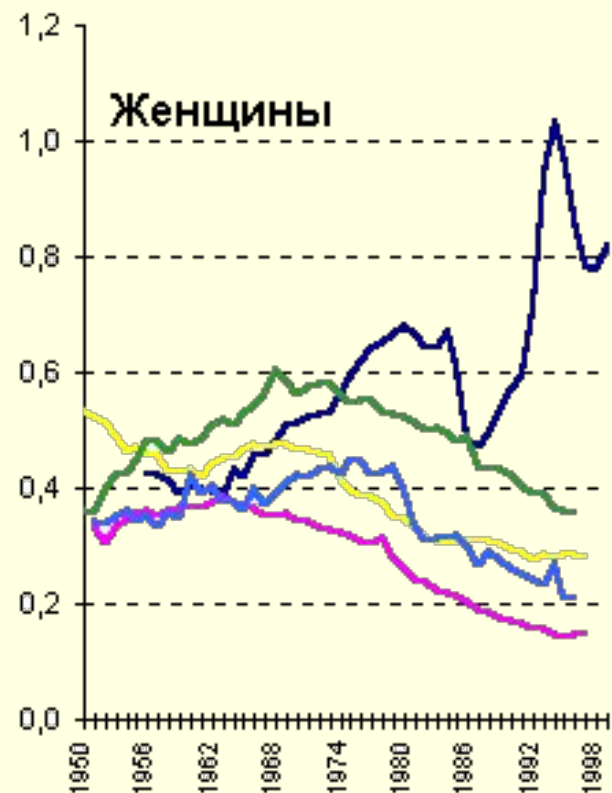
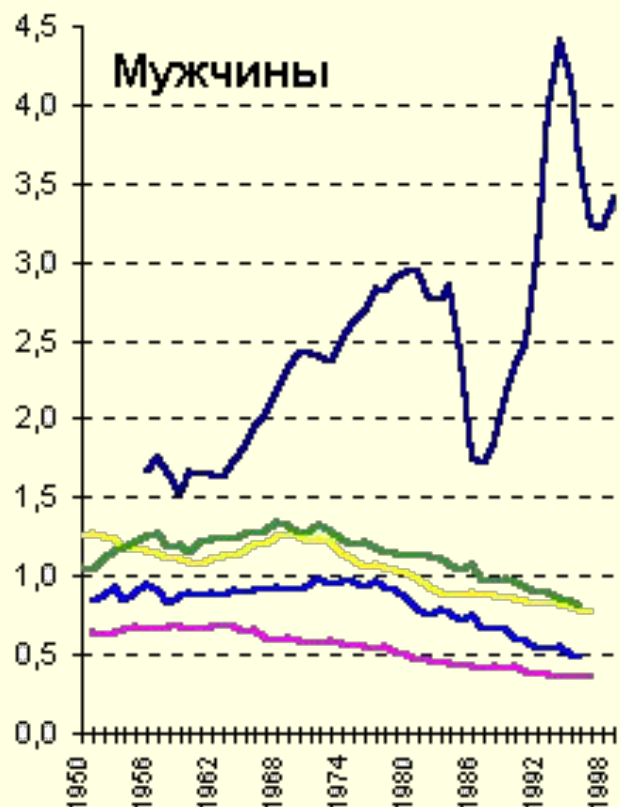
----- Утопления

— Самоубийства

+ Убийства

- - - - Неуст. насилие

# Сравнение смертности от внешних причин (на 1000 чел.)



— Россия — Великобритания — США — Франция — Швеция

---

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

# Обозначения

- Пусть  $N^{M,F}(x,t)$  – численность мужчин « $M$ » и женщин « $F$ » возраста  $x$  (лет) в момент времени  $t$ .
- $B(x)$  – возрастной коэффициент рождаемости, так что  $\int B(x)N^F(x,t)dx$  есть число детей, рождаемых в год  $t$ ;
- $q^{M,F}(x)$  – возрастной коэффициент смертности;
- $p^{M,F}(x,t)$  – миграционный поток.

# Демографическое уравнение

$$\frac{\partial N^{M,F}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial N^{M,F}(x,t)}{\partial x} = -q^{M,F}(x)N^{M,F}(x,t), \quad x > 0, t > 0;$$

$$N^M(0,t) = 0,512 \int_0^{\infty} B(x)N^F(x,t)dx; \quad N^F(0,t) = 0,488 \int_0^{\infty} B(x)N^F(x,t)dx;$$

$$N^{M,F}(x,0) = N_0^{M,F}(x).$$

Уравнение описывает движение вдоль оси времени и смертность, граничные условия отвечают рождению, а в начальный момент задается некоторое известное распределение.

# Общее решение

Общее решение демографического уравнения имеет вид

$$N^{M,F}(x,t) = f^{M,F}(t-x)Q^{M,F}(x)$$

где  $f$  есть произвольная функция, а  $Q$  – функция дожития, которая показывает долю людей, доживших до возраста  $x$ :

$$Q^{M,F}(x) = \exp\left(-\int_0^x q^{M,F}(y)dy\right)$$

# Решение уравнения для $f^F(x, t)$

Функция  $f^F(x)$  определяется из начального и граничного условий демографического уравнения.

Поскольку начальное условие имеет вид  $N_0^F(x) = f^F(-x)Q^F(x)$ , то при отрицательных аргументах функции  $f$  ее значения определяются формулой

$$f^F(-x) = N_0^F(x) / Q^F(x).$$

При положительных аргументах из граничного условия следует

$$f^F(x) = \int_0^x K^F(x-y)f^F(y)dy + \int_{-\infty}^0 K^F(x-y)f^F(y)dy, \quad x \geq 0;$$

$$K^F(x) = Q^F(x)B^F(x).$$



# Решение уравнения для $f^F(x, t)$

В результате для  $f^F(x)$  получилось интегральное уравнение второго рода с разностным ядром и переменным верхним пределом (уравнение Вольтерра или уравнение восстановления):

$$f^F(x) = \varphi^F(x) + \int_0^x K^F(x-y)f^F(y)dy,$$

$$\varphi^F(x) = \int_0^{\infty} K^F(x+y) \frac{N_0^F(y)}{Q^F(y)} dy.$$

Решение этого уравнения получается с помощью преобразования Лапласа. Введем лапласовский образ ядра

$$\tilde{K}^F(s) = \int_0^{\infty} K^F(x)e^{-sx} dx.$$

# Решение уравнения для $f^F(x, t)$

Решение уравнения восстановления в образах имеет вид

$$\tilde{f}^F(s) = \frac{\tilde{\varphi}^F(s)}{1 - \tilde{K}^F(s)}.$$

Тогда 
$$f^F(x) = \varphi^F(x) + \int_0^x R^F(x-y)\varphi^F(y)dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\tilde{\varphi}^F(s)e^{sx}}{1 - \tilde{K}^F(s)} ds,$$

$$R^F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{R}^F(s)e^{sx} ds,$$

где лапласовский образ резольвенты  $\tilde{R}^F(s)$  определяется через образ ядра исходного уравнения по формуле

$$\tilde{R}^F(s) = \frac{\tilde{K}^F(s)}{1 - \tilde{K}^F(s)}.$$

# Решение уравнения для $N^F(x, t)$

Собственные значения ядра уравнения восстановления являются решениями уравнения

$$\tilde{K}^F(s) = 1.$$

Пусть эти корни  $s_k$  простые. Тогда собственные функции имеют вид

$$f_k(x) = e^{s_k x},$$

и решение уравнения восстановления представляет их линейную комбинацию:

$$f^F(x) = \sum_k r_k e^{s_k x}, \quad r_k = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{(s - s_k) \tilde{\varphi}^F(s)}{1 - \tilde{K}^F(s)}.$$

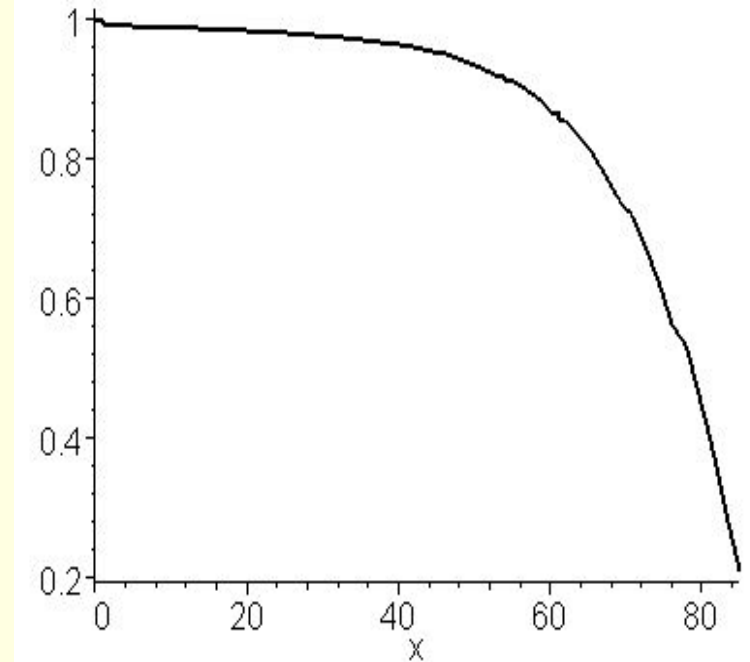
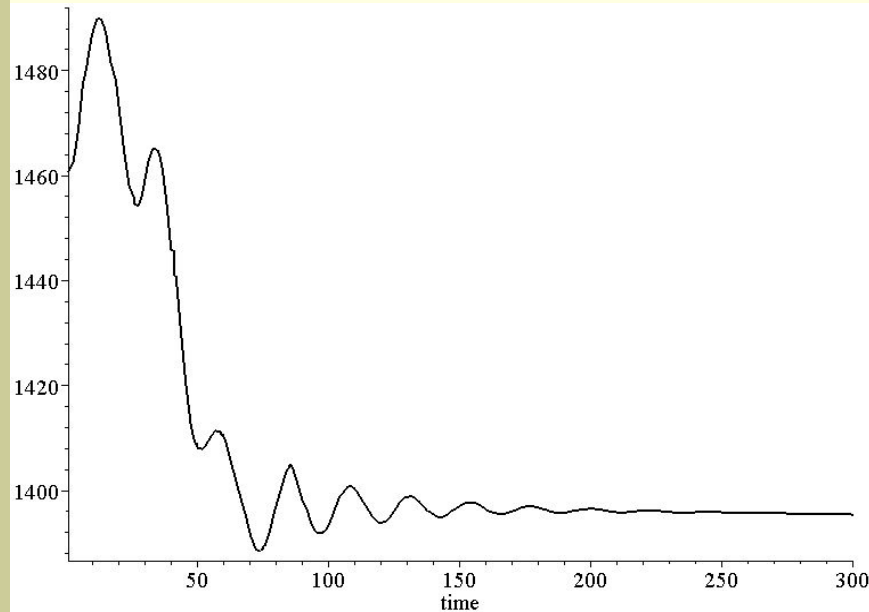
Решение исходного уравнения имеет вид:

$$N^F(x, t) = Q^F(x) \sum_k r_k e^{s_k(t-x)}.$$

Оценка корня: 
$$\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{T_{mother}} \frac{k_{netto} - 1}{k_{netto}}.$$

# ПРОГНОЗЫ И СЦЕНАРИИ

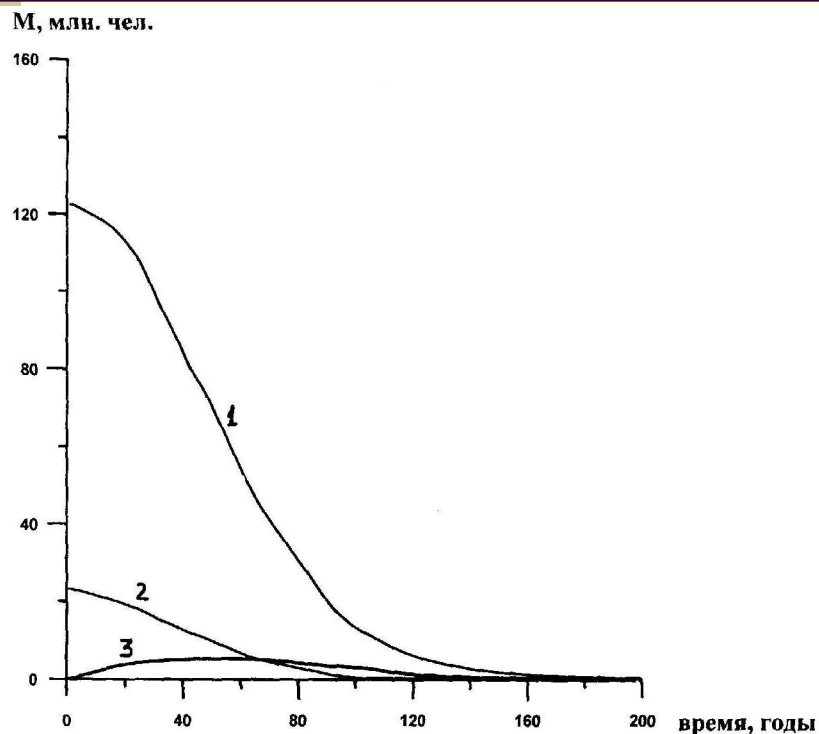
# Модель стабильного населения



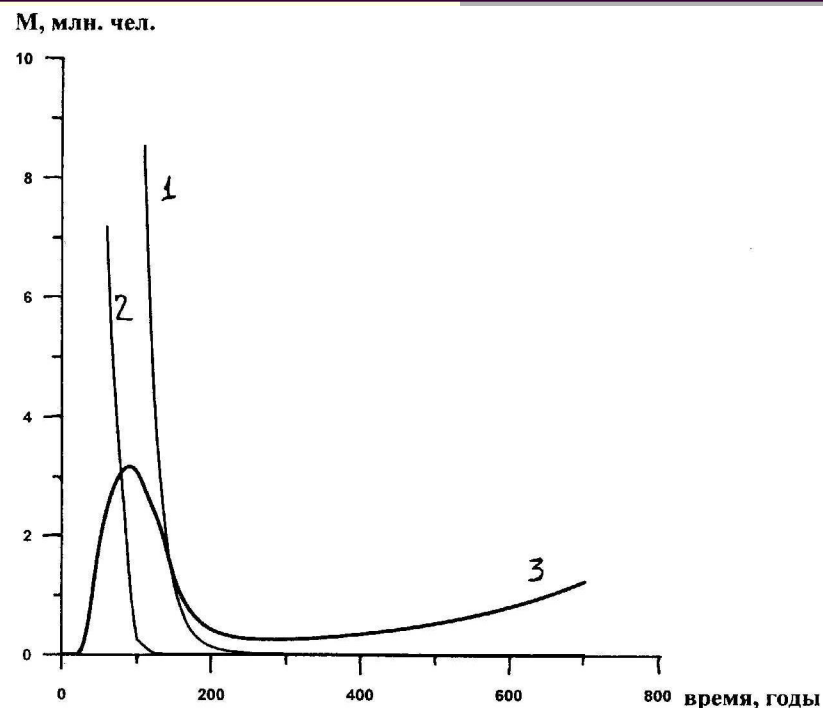
Динамика полной численности населения по годам на 100 тыс. чел. при увеличении рождаемости в когорте 19-24 года в 2,12 раз (слева) и распределение населения по возрастам для этого стационарного режима (справа).

$$\int_0^{\infty} B^{M,F}(x)Q^{M,F}(x)dx \equiv \int_0^{\infty} K^{M,F}(x)dx = 1 \Rightarrow N(x) = N(0)Q(x)$$

# Сценарий выживания (1-аборигены, 2-пришельцы, 3-метисы)

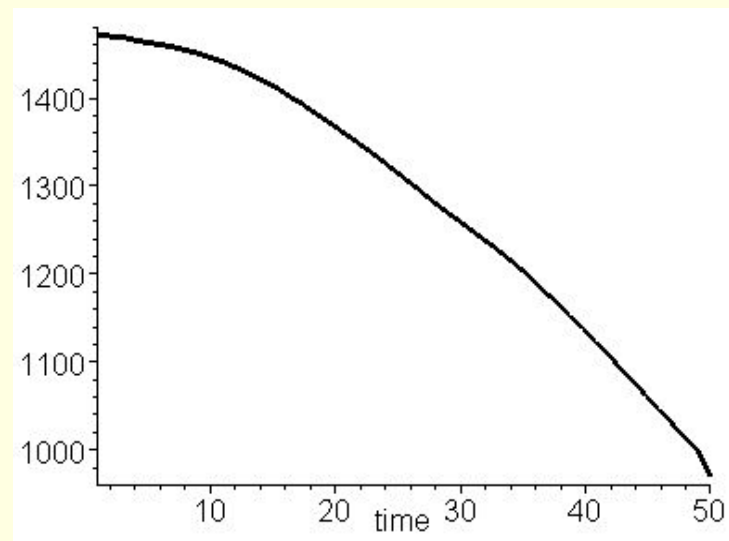
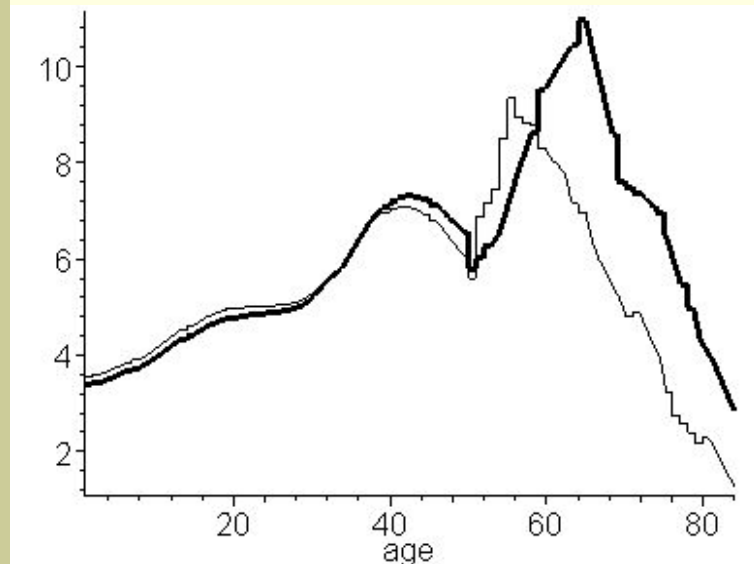


Трех-групповая модель ассимиляции без брачных предпочтений и без учета миграции.



Пяти-групповая модель ассимиляции без брачных предпочтений и без учета миграции. Выживают левые метисы, если рождаемость пришельцев повысить в 1,5 раза.

# Среднесрочный прогноз численности населения России



Повозрастное распределение (слева) и полная численность (справа) населения России к 2050 г., 100 тыс. чел.  
«Наивный прогноз» по состоянию на 2000 г.