1.Обратные тригонометрические функции.

В этом пункте мы хотели бы рассмотреть несколько задач, связанных с вычислением значений выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

ЗАДАЧА 1.

Вычислите: arctg 1 + arctg 2 + arctg 3.

Решение. Стоит только нарисовать клеточный фон (рис. 1), как задание выполняется практически устно.

arctg 3 = $\angle$BAM, arctg 2 = $\angle CAN$, arctg 1 = $\angle$BAC ($\angle$ BAC — острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC

Ответ: π.

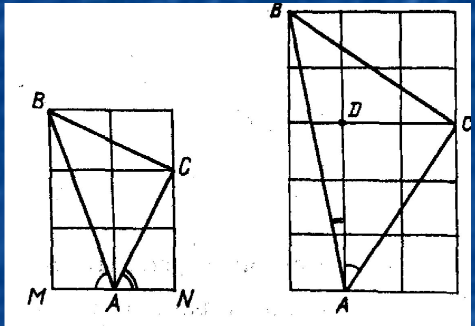

Рис. 1 *Рис. 2*

ЗАДАЧА 2.

Вычислите: $arctg\frac{2}{3}+arcctg5$

Решение. Поскольку arctg $\frac{2}{3}$ = $\angle$CAD (рис. 2), arcctg 5 = $\angle$BAD, а угол BAC — острый в прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC, то $arctg\frac{2}{3}+arcctg5=\frac{\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

ЗАДАЧА 3.

Вычислите: $ctg(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13})$

Решение. Если использовать понятия косинуса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника, теорему Пифагора и свойство биссектрисы треугольника, то задача решается почти мгновенно.

На рис. 3 изображен треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, BC = 5, AB = 13 и BM - биссектриса угла ABC. Следовательно, MC = 5x, AM= 13x и AC= 12, отсюда $x = \frac{2}{3}$. Тогда

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right) = \frac{BC}{MC} = \frac{5}{5x} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

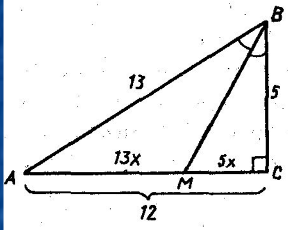

Рис. 3

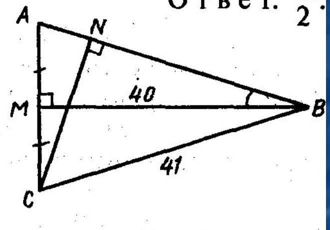

Рис. 4

ЗАДАЧА 4.

Вычислите $\sin(2\arccos\frac{40}{41})$

<u>Решение.</u>

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, где AB=BC=41, $BM \perp AC$, BM=40, $CN \perp AB$ (рис.4). Отрезок AM согласно теореме Пифагора имеет длину, равную 9.

Видно, что $\sin(2\arccos\frac{40}{41}) = \frac{CN}{BC}$. Воспользовавшись подобием прямоугольных треугольников ANC и AMB, найдем

$$CN = \frac{AC \cdot BM}{AB} = \frac{720}{41}.$$

Значит, $\sin\left(2\arccos\frac{40}{41}\right) = \frac{720}{1681}$.

Ответ: $\frac{720}{1681}$

2. Алгебраические выражения.

Часто в алгебре встречаются задания, в которых по заданным условиям на переменные, необходимо найти значение некоторого выражения, содержащего их.

ЗАДАЧА 5.

Из условий $x^2+y^2=9$, $y^2+z^2=16$ **и** $y^2=x\cdot z$ **для положительных x, y и z, не вычисляя их значений, указать значение выражения** $x\cdot y+y\cdot z.$

Решение. Привычное задание решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y^2+z^2=16 \\ y^2=xz \end{cases}$ у учащихся затруднений не вызывает. Однако в данном случае нужно, не решая систему, ответить на вопрос, чему равно значение выражения xy + yz. По теореме, обратной теореме Пифагора, числа x, y и z являются соответственно длинами катетов и гипотенузы треугольника ABD с прямым углом D. А, рассмотрев второе уравнение системы, можно сделать вывод, что y, z и 4 также есть соответственно длины катетов и гипотенузы треугольника BCD с прямым углом D (рис. 6).

Третье уравнение системы разрешает утверждать, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z, и по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, угол ABC — прямой.

Теперь рассмотрим выражение xy + yz.

$$xy+yz=(x+z)\cdot y=2S_{ABC}=3\cdot 4=12$$

Примечание. Для данной системы уравнений задания могут быть и другие. Например, найти значение выражения x + y + z или в каком отношении находятся числа x и y; z и y; x + z и y.

Ответ: 12

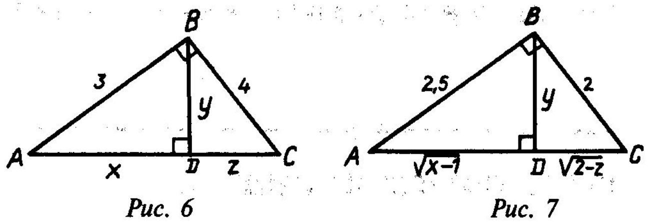

Рис. 6 Рис. 7

Задача 6.

Для положительных x, y и z из условий $x^2+xy+\frac{y^2}{2}=169,\ y^2+z^2=50,\ x^2+xz+\frac{z^2}{2}=144,$ **не находя значения x, y и z, вычислите значение выражения xy + yz + zx.**

Решение.

Запишем три условия задачи в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+\frac{y^2}{2}=169 \\ \frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=25 \\ x^2+xz+\frac{z^2}{2}=144. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме, Пифагора, числа $\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{z}{\sqrt{2}}$ и 5 являются длинами катетов и гипотенузы соответственно треугольника AOC с прямым углом AOC.

Числа x, $\frac{y}{\sqrt{2}}$ и 13 есть длины сторон треугольника AOB с углом AOB, равным 135°. Этот вывод можно сделать, используя теорему, обратную теореме косинусов.

Аналогично, x, $\frac{z}{\sqrt{2}}$ и 12 есть длины сторон треугольника BOC с углом BOC, равным 135°.

На рис. 8 изображены эти треугольники. Поскольку $5^2 + 12^2 = 13^2$, то в треугольнике ABC $\angle$ ACB = 90°. Теперь найдем площади треугольников AOB, AOC, BOC, ABC.

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\sin 135^\circ=\frac{1}{4}xy;$$

$$S_{AOC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}yz;$$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{z}{\sqrt{2}}\cdot\sin 135^\circ=\frac{1}{4}xz;$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30.$$

Видно, что значение выражения xy + yz +zx равно учетверенной площади треугольника ABC. Итак, xy+yz+zx =120

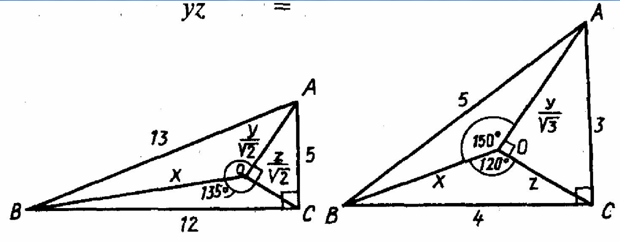

Рис. 8 *Рис. 9*

Ответ:120

ЗАДАЧА 7.

Для положительных x, y и z, не вычисляя их значения из системы уравнений определите величину xy + 2yz + 3xz.

$$x^2+xy+\frac{y^2}{3}=25,\ \frac{y^2}{3}+z^2=9,\ z^2+xz+x^2=16,$$

Рассуждая так же, как и в задаче 8, получаем (рис. 9):

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\sin 150^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z+\frac{1}{2}\cdot x\cdot z\cdot\sin 120^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z+\frac{1}{2}\cdot x\cdot z\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}(xy+2yz+3xz).$$

Так как площадь треугольника ABC равна 6, то $xy+2yz+3xz=24\sqrt{3}.$

Ответ: $24\sqrt{3}$

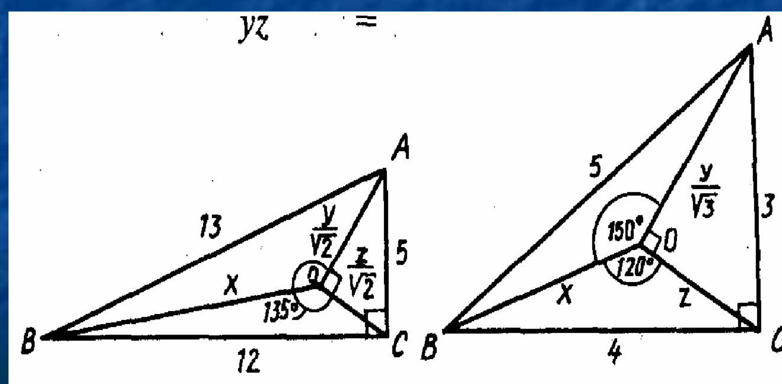

Рис. 8 Рис. 9

3. Системы уравнений.

Решению систем уравнений в алгебре отводится достаточно большое внимание. Они встречаются и в вариантах ЕГЭ. Поэтому, тем более, интересен такой нестандартный подход к решению некоторых систем уравнений, рассмотренных в этом пункте.

ЗАДАЧА 8.

Имеет ли система уравнений $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x^2+xz+z^2=9 \\ y^2+yz+z^2=36 \end{cases}$ **решения для x > 0, y > 0 и z> 0?**

Допустим, что есть такая тройка положительных чисел x, y и z, удовлетворяющая каждому уравнению данной системы.

Тогда возможна ее геометрическая интерпретация, как в задаче 8 (рис.10).

Но такого треугольника ABC не может быть, так как не выполняется неравенство треугольника. Значит, система не имеет решений.

Примечание. Для положительных x,y и z данная система имеет решение, если в правой части третьего уравнения поставить число из промежутка (1; 25).

Ответ: **нет решений.**

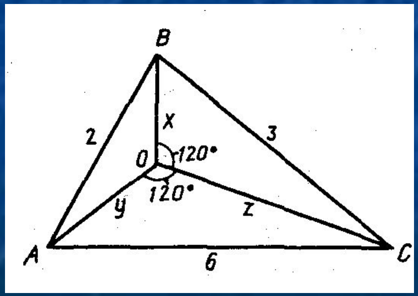

рис.10

ЗАДАЧА 9.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=48 \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24. \end{cases}$$

Решение. Нетрудно убедиться, что x и y положительны. Поскольку $y^2+(\sqrt{x^2-y^2})^2=x^2$, то числа y, $\sqrt{x^2-y^2}$ и x являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника ABC с прямым углом ACB (рис. 11).

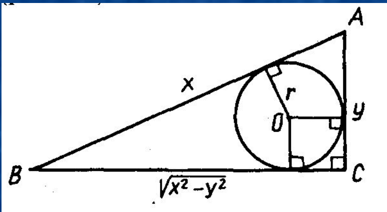

Рис. 11

Площадь этого треугольника 24 кв. ед., а его периметр 24 ед. Поэтому радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен 2.

Так как длина гипотенузы AB равна сумме длин катетов AC и BC без удвоенной длины радиуса вписанной в треугольник окружности, то $x=y+\sqrt{x^2-y^2}-4.$

Из второго уравнения системы получаем x = 10. Значит, y = 6 или y = 8.

Ответ: **(10; 6), (10; 8).**

ЗАДАЧА 10.

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{3} \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$

Решение.

Первое уравнение системы задает плоскость, второе — сферу. Если их изобразить, то очевидно, что $0<x<1$, $0 < y < 1$, $0<z<1$.

Согласно первому уравнению $z=\sqrt{3}-(x+y)$. $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Тогда второе уравнение принимает вид $x^2+y^2+3-2\sqrt{3}(x+y)+(x+y)^2=1.$ (*)

Преобразовав его, получаем квадратное уравнение относительно x:

$$x^2+(y-\sqrt{3})\cdot x+(y^2-y\sqrt{3}+1)=0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $-(y\sqrt{3}-1)^2$. Следовательно, $-(y\sqrt{3}-1)^2 \geq 0$. Это неравенство выполняется при $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Уравнение (*) можно было преобразовать в квадратное относительно y с решением $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Значение $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ находится из первого уравнения.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Примечание. Задачу можно переформулировать, например, так: «Определите вид треугольника, периметр которого равен $\sqrt{3}$, а сумма квадратов длин его сторон равна 1».

ЗАДАЧА 11.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$$

Решение.

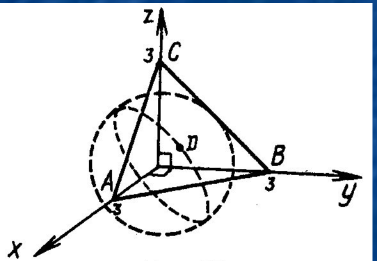

Рис. 12

Уравнение x+y+z=3 - есть уравнение плоскости (рис. 12), пересекающей оси прямоугольной декартовой системы координат в , A(3;0;0), B(0;3;0), C(0; 0; 3).

Уравнение $x^2+y^2+z^2=3$ есть уравнение сферы с центром в точке O(0; 0; 0) и радиусом R, равным $\sqrt{3}$

Вычислим расстояние от точки O до плоскости ABC. Для этого рассмотрим тетраэдр OABC. Объем V тетраэдра равен $\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H$

где H=OD (D — центр треугольника ABC). $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{3H\sqrt{3}}{2}.$

Этот объем можно найти иначе: $V=\frac{1}{3}S_{OAB}\cdot CO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot 3=\frac{9}{2}.$

Приравняв $\frac{3H\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{9}{2}$, получаем H= $\sqrt{3}$. Это означает, что расстояние от точки O до плоскости ABC равно радиусу сферы, а значит, плоскость касается сферы. Следовательно, точка касания является центром треугольника ABC. Поскольку D(x; y; z) — центр равностороннего треугольника ABC, где A(3; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0;0;3), то x=y=z.

Заменив y и z на x в уравнениях данной системы, получаем x=1.

Ответ: (1; 1; 1).

ЗАДАЧА 12.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+4y=26 \\ \sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=10. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим слагаемые левой части второго уравнения:

$$\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

Пусть это расстояние между точками M(x; y) и A(2;-1).

$$\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}.$$

Допустим, что это расстояние между точками M (x;y} и B(10; 5).

Найдем расстояние между точками A(2; -1) и B(10;5):

$$AB=\sqrt{(10-2)^2+(5+1)^2}=10$$

Итак, второе уравнение системы можно интерпретировать как равенство AM + BM = AB. Это дает нам право утверждать, что точка M принадлежит отрезку AB, т.е. $2 \le x \le 10$ и $-1 \le y \le 5$

Составим уравнение прямой AB, проходящей через точки A(2; -1) и B(10; 5).

$-1=k\cdot 2+b$ и $5=k\cdot 10+b.$ Отсюда $k=\frac{3}{4}; b=-\frac{5}{2},$ т.е. $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$, или 3x — 4y = 10.

Запишем новую систему:

$$\begin{cases} 3x+4y=26 \\ 3x-4y=10. \end{cases}$$

Значит, x = 6 и y = 2.

Ответ: **(6; 2).**

4. Аналитический способ решения.

Рассмотрим аналитический способ решения некоторых задач, рассмотренных выше, чтобы была возможность убедиться в том, что геометрический подход дает более быстрое, а главное, красивое решение этих задач.

ЗАДАЧА 1.

Рассмотрим аналитический способ решения.

Решение.

Обозначим: $\alpha = arctg1, \beta = arctg2, \gamma = arctg3,$ где $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2}\pi.$

Найдем $tg(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{tg\alpha + tg(\beta+\gamma)}{1 - tg\alpha \cdot tg(\beta+\gamma)} = \frac{1 + tg(\beta+\gamma)}{1 - tg(\beta+\gamma)} = \frac{1 + \frac{tg\beta + tg\gamma}{1 - tg\beta tg\gamma}}{1 - \frac{tg\beta + tg\gamma}{1 - tg\beta tg\gamma}} = \frac{1 + \frac{2+3}{1-2\cdot 3}}{1 - \frac{2+3}{1-2\cdot 3}} = \frac{1-1}{1+1} = 0$

Таким образом, $tg(\alpha+\beta+\gamma) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi k,$ учитывая условие, что $\alpha+\beta+\gamma \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi),$ получим, что k=1 и $\alpha+\beta+\gamma = \pi,$

т.е. $arctg1 + arctg2 + arctg3 = \pi.$

Ответ: π

ЗАДАЧА 2.

Решим систему аналитически:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

Решение:

Обозначим уравнение $3x + 4y = 26$ - (1), уравнение $\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=10$ - (2).

Заметим, что $\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$, а $\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=\sqrt{(x-10)^2+(y+5)^2}$.

Сделаем замену $x-2=a, y+1=b,$ тогда уравнение (2) системы запишется в виде:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-8)^2+(b-6)^2}=10, \sqrt{a^2+b^2}=10-\sqrt{(a-8)^2+(b-6)^2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$$a^2+b^2=100+(a-8)^2+(b-6)^2-20\sqrt{(a-8)^2+(b-6)^2},$$

$$20\sqrt{(a-8)^2+(b-6)^2}=100+(a-8)^2+(b-6)^2-a^2-b^2$$

$$20\sqrt{(a-8)^2+(b-6)^2}=200-16a-12b$$

$$5\sqrt{(a-8)^2+(b-6)^2}=50-4a-3b$$

$$25((a-8)^2+(b-6)^2)=2500+16a^2+9b^2-400a-300b+24ab$$

$$25a^2-400a+1600+25b^2-300b+900=2500+16a^2+9b^2-400a-300b+24ab$$

$$(3a-4b)^2=0$$

$$3a=4b$$

Сделаем обратную замену: $3(x-2)=4(y+1)$

$$3x-4y=10$$

Получим систему: $\begin{cases}3x+4y=26\\3x-4y=10\end{cases}, \begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$

Поскольку мы не следили за равносильностью переходов, сделаем проверку:

(1) - $3\cdot 6+4\cdot 2=26$, $18+8=26$

(2) - $\sqrt{36+4-24+4+5}+\sqrt{36+4-120-20+125}=10$, $5+5=10$

<u>Ответ:</u> (6;2).