

1. Обратные тригонометрические функции.

В этом пункте мы хотели бы рассмотреть несколько задач, связанных с вычислением значений выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

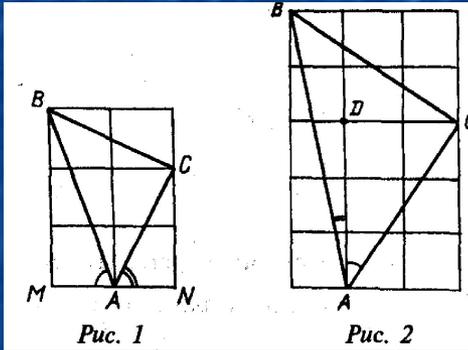
ЗАДАЧА 1.

Вычислите: $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.

Решение. Стоит только нарисовать клеточный фон (рис. 1), как задание выполняется практически устно.

$\operatorname{arctg} 3 = \angle BAM$, $\operatorname{arctg} 2 = \angle CAN$, $\operatorname{arctg} 1 = \angle BAC$ ($\angle BAC$ — острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC)

Ответ: π .



ЗАДАЧА 2.

Вычислите $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} 5$
:

Решение. Поскольку $\frac{2}{3} = \angle CAD$ (рис. 2), $\operatorname{arctg} 5 = \angle BAD$, а угол BAC — острый в прямоугольном равнобедренном

треугольнике ABC, то $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} 5 = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

ЗАДАЧА 3.

Вычислите
:
 $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right)$

Решение. Если использовать понятия косинуса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника, теорему Пифагора и свойство биссектрисы треугольника, то задача решается почти мгновенно.

На рис. 3 изображен треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 5$, $AB = 13$ и BM - биссектриса угла ABC. Следовательно,

$MC = 5x$, $AM = 13x$ и $AC = 12$, отсюда $x = \frac{2}{3}$. Тогда

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right) = \frac{BC}{MC} = \frac{5}{5x} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Рис. 3

Рис. 4

ЗАДАЧА 4.

Вычислите
 $\sin\left(2\arccos\frac{40}{41}\right)$

Решение.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, где $AB = BC = 41$, $BM \perp AC$, $BM = 40$, $CN \perp AB$ (рис.4). Отрезок AM согласно теореме Пифагора имеет длину, равную 9.

Видно, что $\sin\left(2\arccos\frac{40}{41}\right) = \frac{CN}{BC}$. Воспользовавшись подобием прямоугольных треугольников ANC и AMB , найдем

$$CN = \frac{AC \cdot BM}{AB} = \frac{720}{41}.$$

$$\text{Значит, } \sin\left(2\arccos\frac{40}{41}\right) = \frac{720}{1681}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{720}{1681}$$

2. Алгебраические выражения.

Часто в алгебре встречаются задания, в которых по заданным условиям на переменные, необходимо найти значение некоторого выражения, содержащего их.

ЗАДАЧА 5.

Из условий выражения $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 + z^2 = 16$ и $y^2 = x \cdot z$ для положительных x , y и z , не вычисляя их значений, указать значение выражения $x \cdot y + y \cdot z$.

Решение. Привычное задание решить систему уравнений у учащихся затруднений не вызывает. Однако в данном случае

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + z^2 = 16 \\ y^2 = xz \end{cases}$$

нужно, не решая систему, ответить на вопрос, чему равно значение выражения $xu + uz$. По теореме, обратной теореме Пифагора, числа x , y и z являются соответственно длинами катетов и гипотенузы треугольника ABD с прямым углом D . А, рассмотрев второе уравнение системы, можно сделать вывод, что y , z и 4 также есть соответственно длины катетов и гипотенузы треугольника BCD с прямым углом D (рис. 6).

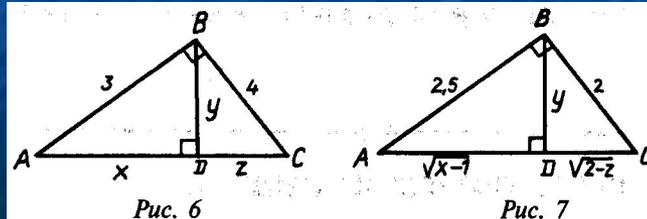
Третье уравнение системы разрешает утверждать, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z , и по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, угол ABC — прямой.

Теперь рассмотрим выражение $xu + uz$.

$$xu + uz = (x + z) \cdot y = 2S_{ABC} = 3 \cdot 4 = 12$$

Примечание. Для данной системы уравнений задания могут быть и другие. Например, найти значение выражения $x + y + z$ или в каком отношении находятся числа x и y ; z и y ; $x + z$ и y .

Ответ: 12



Задача 6.

Для положительных x, y и z из условий $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169, y^2 + z^2 = 50, x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144$, не находя значения x, y и z , вычислите значение выражения $xy + yz + zx$.

Решение.

Запишем три условия задачи в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169 \\ \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 25 \\ x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме, Пифагора, числа $\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{z}{\sqrt{2}}$ и 5 являются длинами катетов и гипотенузы соответственно

катетов и гипотенузы

треугольника AOC с прямым углом AOC.

Числа $x, \frac{y}{\sqrt{2}}$ и 13 есть длины сторон треугольника AOB с углом AOB, равным 135° . Этот вывод можно сделать, используя теорему, обратную теореме косинусов.

Аналогично, $x, \frac{z}{\sqrt{2}}$ и 12 есть длины сторон треугольника BOC с углом BOC, равным 135° .

На рис. 8 изображены эти треугольники.

Поскольку $5^2 + 12^2 = 13^2$, то в треугольнике ABC $\angle ACB = 90^\circ$. Теперь найдем площади

треугольников AOB, AOC, BOC, ABC.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{4} xy;$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} yz;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{4} xz;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

Видно, что значение выражения $xy + yz + zx$ равно учетверенной площади треугольника ABC. Итак, $xy + yz + zx = 120$

Ответ: 120

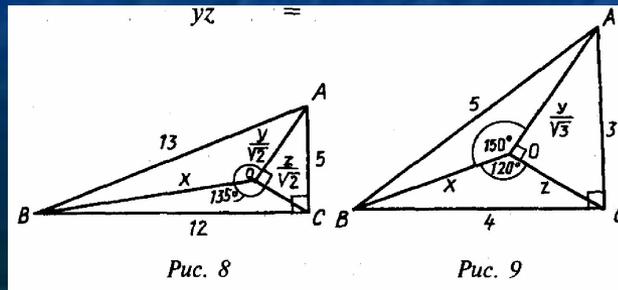


Рис. 8

Рис. 9

ЗАДАЧА 7.

Для положительных x , y и z , не вычисляя их значения из системы уравнений определите величину $xy + 2yz + 3xz$.

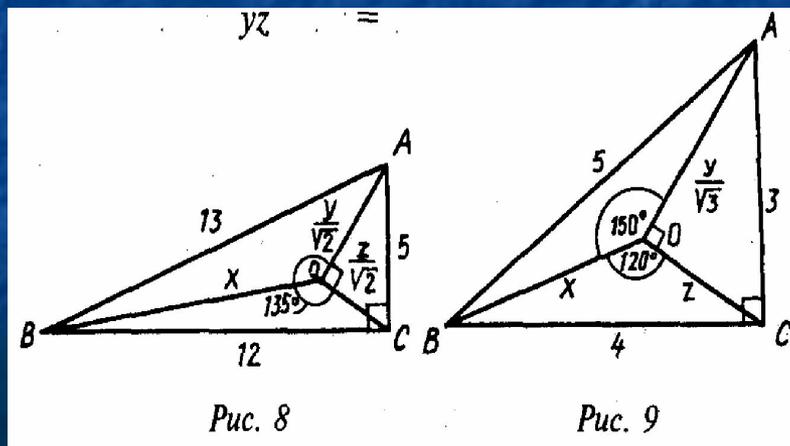
$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \quad \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \quad z^2 + xz + x^2 = 16,$$

Рассуждая так же, как и в задаче 8, получаем (рис. 9):

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot z + \frac{1}{2} \cdot x \cdot z \cdot \sin 120^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot z + \frac{1}{2} \cdot x \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} (xy + 2yz + 3xz). \end{aligned}$$

Так как площадь треугольника ABC равна 6, то $xy + 2yz + 3xz = 24\sqrt{3}$.

Ответ : $24\sqrt{3}$



3. Системы уравнений.

Решению систем уравнений в алгебре отводится достаточно большое внимание. Они встречаются и в вариантах ЕГЭ. Поэтому, тем более, интересен такой нестандартный подход к решению некоторых систем уравнений, рассмотренных в этом пункте.

ЗАДАЧА 8.

Имеет ли система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 + xz + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases} \text{ решения для } x > 0, y > 0 \text{ и } z > 0?$$

Допустим, что есть такая тройка положительных чисел x , y и z , удовлетворяющая каждому уравнению данной системы.

Тогда возможна ее геометрическая интерпретация, как в задаче 8 (рис.10).

Но такого треугольника ABC не может быть, так как не выполняется неравенство треугольника. Значит, система не имеет решений.

Примечание. Для положительных x, y и z данная система имеет решение, если в правой части третьего уравнения поставить число из промежутка $(1; 25)$.

Ответ: нет решений.

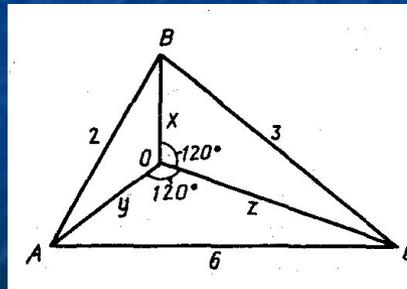


рис.10

ЗАДАЧА 9.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2 - y^2} = 48 \\ x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24. \end{cases}$$

Решение. Нетрудно убедиться, что x и y положительны. Поскольку $y^2 + (\sqrt{x^2 - y^2})^2 = x^2$, то числа y , $\sqrt{x^2 - y^2}$ и x являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника ABC с прямым углом ACB (рис. 11).

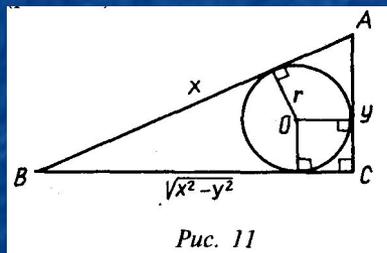


Рис. 11

Площадь этого треугольника 24 кв. ед., а его периметр 24 ед. Поэтому радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен 2.

Так как длина гипотенузы AB равна сумме длин катетов AC и BC без удвоенной длины радиуса вписанной в треугольник окружности,

то $x = y + \sqrt{x^2 - y^2} - 4$.

Из второго уравнения системы получаем $x = 10$. Значит, $y = 6$ или $y = 8$.

Ответ: (10; 6), (10; 8).

ЗАДАЧА 10.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Решение.

Первое уравнение системы задает плоскость, второе — сферу. Если их изобразить, то очевидно, что $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$.

Согласно первому уравнению $z = \sqrt{3} - (x + y)$. $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Тогда второе уравнение принимает вид $x^2 + y^2 + 3 - 2\sqrt{3}(x + y) + (x + y)^2 = 1$. (*)

Преобразовав его, получаем квадратное уравнение относительно x :

$$x^2 + (y - \sqrt{3}) \cdot x + (y^2 - y\sqrt{3} + 1) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $(y - \sqrt{3})^2 - 4(y^2 - y\sqrt{3} + 1)$. Следовательно, $(y - \sqrt{3})^2 \geq 0$. Это неравенство выполняется при $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Уравнение (*) можно было преобразовать в квадратное относительно y с решением

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Значение $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ находится из первого уравнения.

$$\text{О т в е т: } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

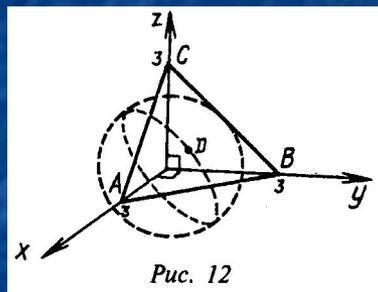
Примечание. Задачу можно переформулировать, например, так: «Определите вид треугольника, периметр которого равен $\sqrt{3}$, а сумма квадратов длин его сторон равна 1».

ЗАДАЧА 11.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Решение.



Уравнение $x+y+z=3$ - есть уравнение плоскости (рис. 12), пересекающей оси прямоугольной декартовой системы координат в $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0; 0; 3)$.

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ есть уравнение сферы с центром в точке $O(0; 0; 0)$ и радиусом R ,

Вычислим расстояние от точки O до плоскости ABC . Для этого рассмотрим тетраэдр $OABC$.

где $H=OD$ (D — центр треугольника ABC).

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{3H\sqrt{3}}{2}.$$

Этот объем можно найти иначе:

$$V = \frac{1}{3} S_{OAB} \cdot CO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Приравняв $\frac{3H\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{9}{2}$, получаем $H = \sqrt{3}$. Это означает, что расстояние от точки O до плоскости ABC равно радиусу сферы, а значит,

плоскость касается сферы. Следовательно, точка касания является центром треугольника ABC . Поскольку $D(x; y; z)$ — центр равностороннего треугольника ABC , где $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0;0;3)$, то $x=y=z$.

Заменив y и z на x в уравнениях данной системы, получаем $x=1$.

Ответ: (1; 1; 1).

равным $\sqrt{3}$
Объем V тетраэдра равен $\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H$

ЗАДАЧА 12.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим слагаемые левой части второго уравнения:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

Пусть это расстояние между точками $M(x; y)$ и $A(2; -1)$.

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = \sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}.$$

Допустим, что это расстояние между точками $M(x; y)$ и $B(10; 5)$.

Найдем расстояние между точками $A(2; -1)$ и $B(10; 5)$:

$$AB = \sqrt{(10-2)^2 + (5+1)^2} = 10$$

Итак, второе уравнение системы можно интерпретировать как равенство $AM + BM = AB$. Это дает нам право утверждать, что точка M принадлежит отрезку AB , т.е. $2 \leq x \leq 10$ и $-1 \leq y \leq 5$

Составим уравнение прямой AB , проходящей через точки $A(2; -1)$ и $B(10; 5)$.

$-1 = k \cdot 2 + b$ и $5 = k \cdot 10 + b$. Отсюда $k = \frac{3}{4}; b = -\frac{5}{2}$, т.е. $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$, или $3x - 4y = 10$.

Запишем новую систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ 3x - 4y = 10. \end{cases}$$

Значит, $x = 6$ и $y = 2$.

Ответ: (6; 2).

4. Аналитический способ решения.

Рассмотрим аналитический способ решения некоторых задач, рассмотренных выше, чтобы была возможность убедиться в том, что геометрический подход дает более быстрое, а главное, красивое решение этих задач.

ЗАДАЧА 1.

Рассмотрим аналитический способ решения.

Решение.

Обозначим
: $\alpha = \arctg 1, \beta = \arctg 2, \gamma = \arctg 3$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2}\pi$.

$$\text{Найдем } \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\beta + \gamma)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\beta + \gamma)} = \frac{1 + \operatorname{tg}(\beta + \gamma)}{1 - \operatorname{tg}(\beta + \gamma)} = \frac{1 + \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}}{1 - \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}} = \frac{1 + \frac{2+3}{1-2 \cdot 3}}{1 - \frac{2+3}{1-2 \cdot 3}} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

Таким образом, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi k$, учитывая условие, что $\alpha + \beta + \gamma \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi)$, получим, что $k=1$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, т.е. $\arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3 = \pi$.

Ответ: π

ЗАДАЧА 2.

Решим
аналитически:

систему

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

Решение:

Обозначим
уравнение

$$3x + 4y = 26 \quad - (1),$$

уравнение $\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10$ - (2).

Заметим, что $\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$, а $\sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = \sqrt{(x-10)^2 + (y+5)^2}$.

Сделаем замену $x-2 = a, y+1 = b$, тогда уравнение (2) системы запишется в виде:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-8)^2 + (b-6)^2} = 10, \sqrt{a^2 + b^2} = 10 - \sqrt{(a-8)^2 + (b-6)^2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$$a^2 + b^2 = 100 + (a-8)^2 + (b-6)^2 - 20\sqrt{(a-8)^2 + (b-6)^2},$$

$$20\sqrt{(a-8)^2 + (b-6)^2} = 100 + (a-8)^2 + (b-6)^2 - a^2 - b^2$$

$$20\sqrt{(a-8)^2 + (b-6)^2} = 200 - 16a - 12b$$

$$5\sqrt{(a-8)^2 + (b-6)^2} = 50 - 4a - 3b$$

$$25((a-8)^2 + (b-6)^2) = 2500 + 16a^2 + 9b^2 - 400a - 300b + 24ab$$

$$25a^2 - 400a + 1600 + 25b^2 - 300b + 900 = 2500 + 16a^2 + 9b^2 - 400a - 300b + 24ab$$

$$(3a - 4b)^2 = 0$$

$$3a = 4b$$

Сделаем обратную замену: $3(x-2) = 4(y+1)$

$$3x - 4y = 10$$

Получим систему:
$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Поскольку мы не следили за равносильностью переходов, сделаем проверку:

$$(1) \quad \begin{aligned} - & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 26 \\ & 18 + 8 = 26 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} - & \sqrt{36 + 4 - 24 + 4 + 5} + \sqrt{36 + 4 - 120 - 20 + 125} = 10 \\ & 5 + 5 = 10 \end{aligned}$$

Ответ: (6;2).