

# **ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС**

**«Энтропия и информация.  
Решение логических задач»**

**«Кто владеет информацией,  
тот владеет миром!»**

**Э.Талейран**

# УЧЕБНО ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

1. Случайные события. Мера их неопределенности. Формула Хартли.
2. Энтропия по Шеннону. Свойства энтропии.
3. Условная энтропия. Решение задач на условную энтропию.
4. Количество информации. Решение задач.
5. Решение логических задач на взвешивание через энтропию и количество информации.
6. Решение логических задач о лжецах через энтропию и количество информации.
7. Защита творческих проектов.

**Итого: 14 часов**

# ЦЕЛИ КУРСА

## «ЭНТРОПИЯ И ИНФОРМАЦИЯ.

## РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

- Развитие логического мышления и формирование базы математических знаний;
- Практическое применение изучаемого (изученного) программного материала средней школы;
- Построение простейших вероятностных моделей реальных процессов и явлений, учитывающих влияние случая;
- Создание определенного алгоритма для оценки предсказуемости случая;
- Решение логических задач с применением понятия энтропии;

# Задачи курса:

- **Расширить представления учащихся о дискретной математике, ее возможностях при вполне жизненных ситуациях;**
- **Ввести новые математические понятия энтропии и количества информации;**
- **Установить зависимость степени неопределенности от числа равновероятных исходов;**
- **Показать способы использования ориентированного графа и кодового дерева для построения рассуждений и выводов;**
- **Интегрировать алгебраический и графический методы для решения задач о лжецах, на взвешивание и др.;**
- **Предложить комплекс логических задач, решаемых методом подсчета**

# **В результате освоения данного курса ученик должен научиться:**

- Различать количественные характеристики случайного события: вероятность и степень неопределенности (энтропию);**
- Уметь находить степень неопределенности через известную (найденную) вероятность случайного события;**
- Сравнивать два события по их неопределенности;**
- Находить количество информации об опыте для оптимизации его результатов;**
- Применять полученные умения и навыки для решения логических задач алгебраическим и графическим методами.**

# Занятие №1. Случайные события. Мера их неопределенности. Формула Хартли.

## Цель занятия:

- вспомнить понятие случайных событий;
- ввести понятие энтропии, ее свойства;
- ввести формулу Хартли, рассмотреть условия применения ее при решении задач на угадывание;

# Занятие №1. Случайные события. Мера их неопределенности. Формула Хартли.

## Задачи занятия:

- Научиться среди предложенных событий выбирать неопределенные;
- Установить соответствие между вероятностью события и его неопределенностью;
- Научиться подсчитывать энтропию события по формуле Хартли;
- Отработать метод половинного деления для решения задач на угадывание;
- Разобрать алгоритм решения задач на угадывание с применением понятия энтропии

**Степень неопределенности – есть еще одна характеристика случайного события, которую называли энтропией. ( $H(a)$ ).**

**За единицу энтропии принимается неопределенность, содержащаяся в опыте, имеющем два равновероятных исхода.**

**Единица измерения, учитывая двоичную систему исчисления, – бит.**



# Формула Хартли

- Пусть опыт  $\alpha$  имеет  $k$  равновозможных исходов, тогда

$$H(\alpha) = \sum \left( \frac{1}{k} \cdot \log k \right) = - \sum \left( \frac{1}{k} \cdot \log \frac{1}{k} \right) = \log k$$

- Этой формулой удобно пользоваться, когда исходы равновероятны.

- Чем больше равновероятных исходов, тем больше степень неопределенности
- Чем меньше вероятность, тем больше степень неопределенности
- Что имеет большую степень неопределенности угадывание месяца или дня недели рождения случайно встреченного человека?
- Какую степень неопределенности имеет угадывание месяца рождения случайно встреченного человека?  
 $H(a) = \log k = \log 12 = 2 + \log 3.$

# ПРИЛОЖЕНИЕ №2.

# Занятие №2. Энтропия по Шеннону. Свойства энтропии.

## Цели занятия:

- Продолжить усвоение понятия энтропия и ее свойств через введение формулы К. Шеннона

## Задачи занятия:

- Создать проблемную ситуацию невозможности решить задачу с помощью формулы Хартли;
- Ввести формулу Клода Шеннона;
- Рассмотреть анализ условий задач табличным и графическим методами;
- Ввести алгоритм решения задач на сравнение неопределенностей событий;
- Свойства энтропии;
- Провести тренинг сравнения степеней неопределенности событий.

# Клод Шеннон

$$H(\alpha) = -P(A_1) \log P(A_1) - P(A_2) \log P(A_2) - \dots - P(A_n) \log P(A_n)$$



$$H(\alpha) = \sum P(A_i) \log [P(A_i)]^{-1}$$

Где  $P(A_1), P(A_2) \dots P(A_n)$  вероятности равновозможных исходов.

Он же предложил назвать эту величину **энтропией**

Имеются 2 урны.

Первая содержит 20 шаров – 10 белых, 5 черных и 5 красных;

Вторая содержит 16 шаров: 4 белых, 4 черных и 8 красных во второй.

Из каждой урны вытаскивают по одному шару. Исход какого из этих двух опытов следует считать более неопределенным? (Приложение №3.)

■ Первый опыт связан с первой корзиной:

$$H(\alpha) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ бита}$$

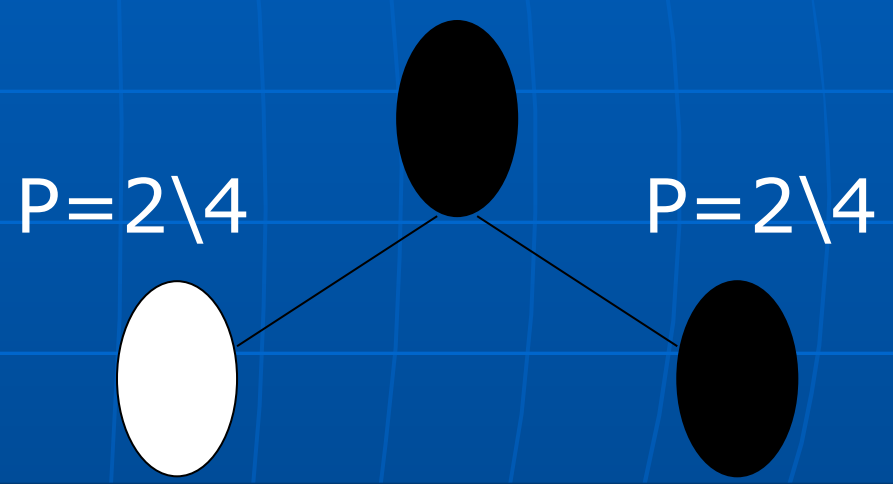
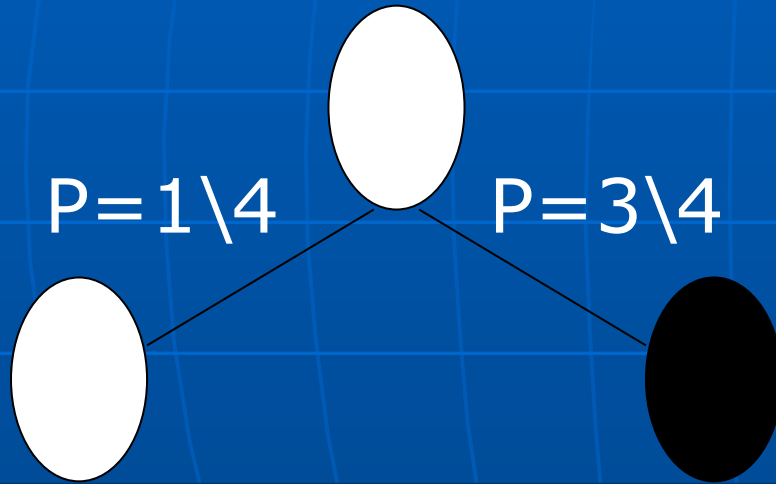
□ Второй опыт связан со второй корзиной:

$$H(\beta) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ бита}$$

Какую степень неопределенности содержит опыт угадывания цвета двух шаров, извлеченных из урны, в которой находятся 2 белых и 3 черных шара?

$$P = 2/5$$

$$P = 3/5$$



- $P = 2/5 * 1/4 = 1/10$
- $P = 3/10$

- $P = 3/10$
- $P = 3/10$

$$H(\alpha) = 1 + \log 5 - \frac{9}{10} \log 3 \text{ (бит).}$$

# Занятие №3. Условная энтропия. Решение задач на условную энтропию.

**Цель занятия:** введение понятия условной энтропии для решения соответствующих задач

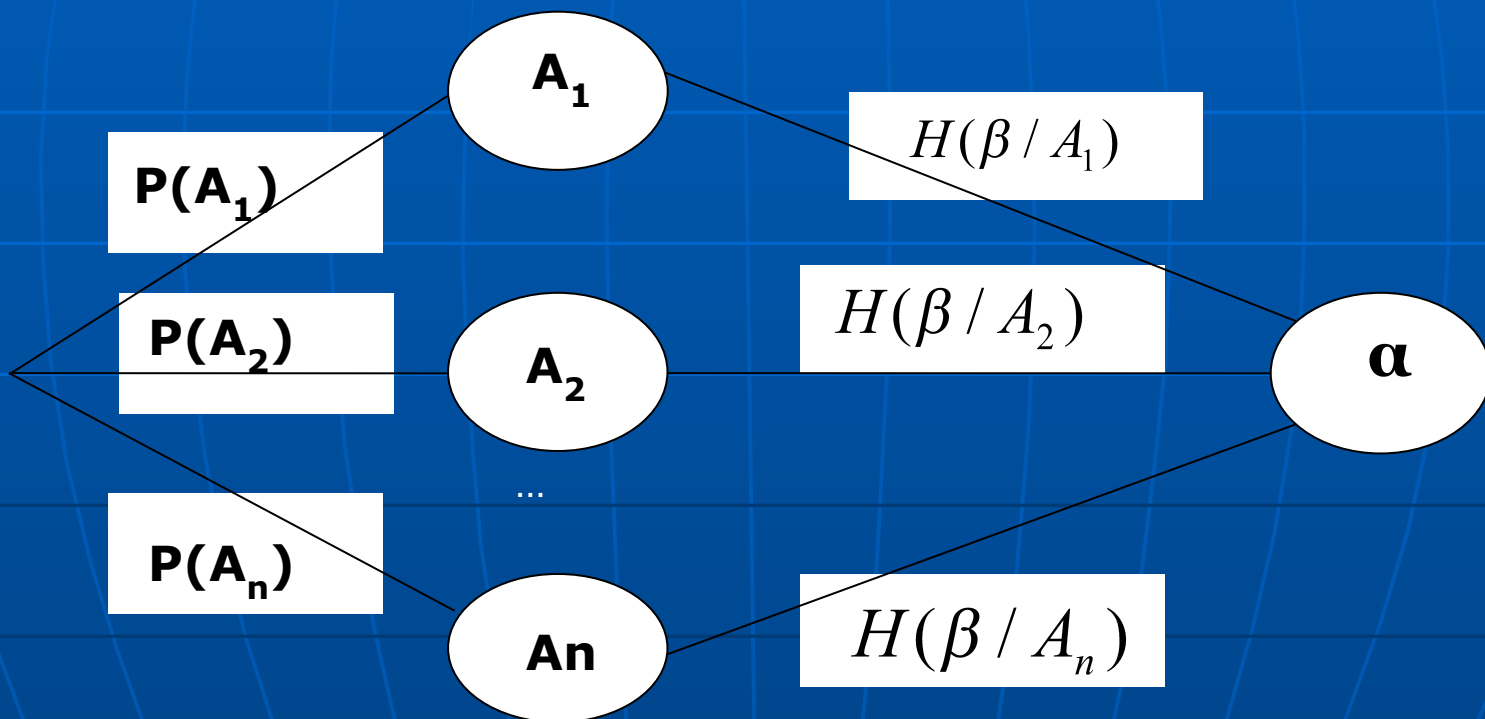
**Задачи занятия:**

- Ввести понятие условной энтропии;
- Обозначить тип задач, решаемых с применением условной энтропии;
- Ввести алгоритм решения задач на условную энтропию;
- Ввести свойства энтропии, привести доказательство;



Граф и формула нахождения условной энтропии выглядят следующим образом

$$H(\beta / A_i) = \sum [P(B_j / A_i) \log (P(B_j / A_i))^{-1}]$$



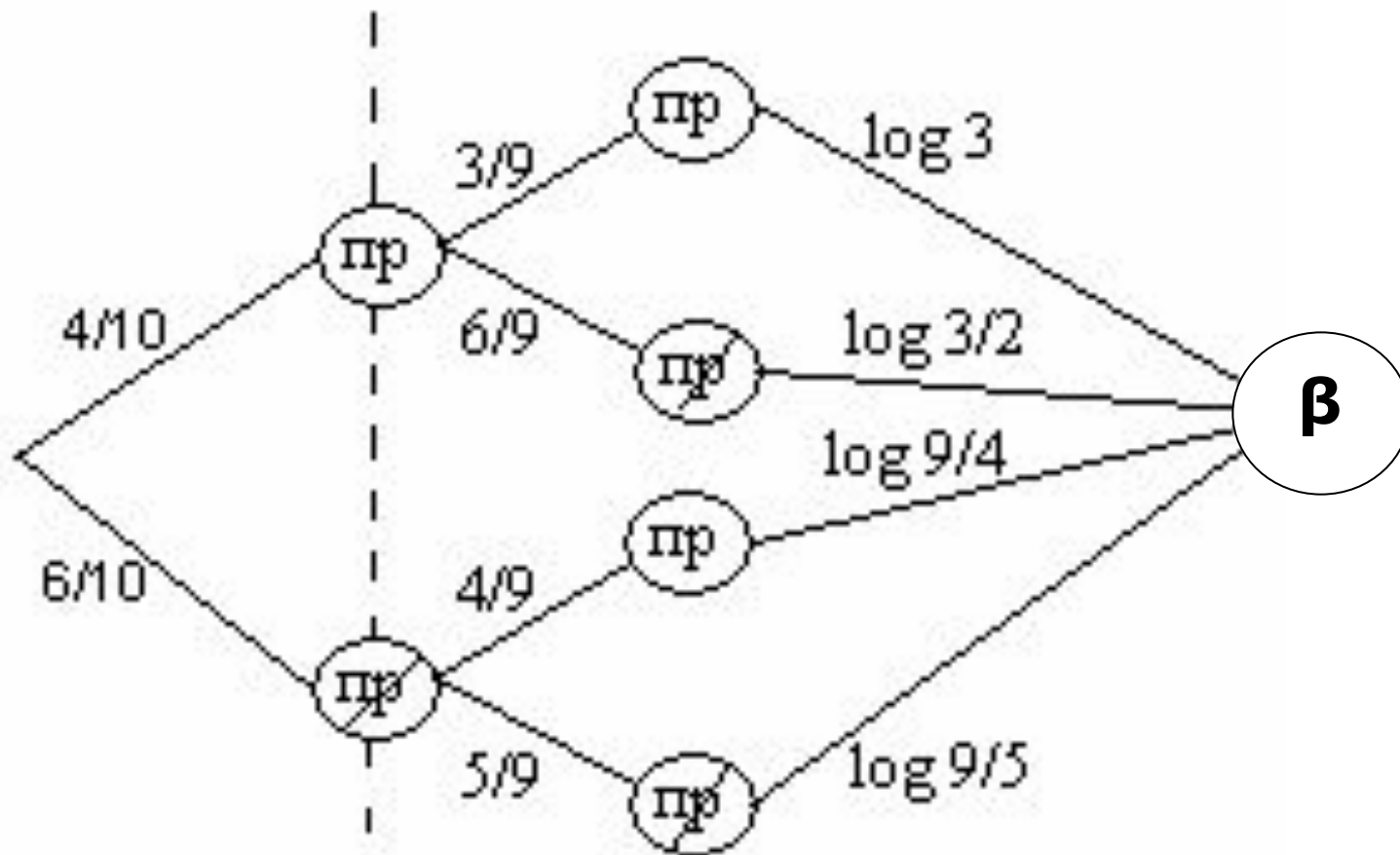
Какую энтропию содержит опыт угадывания простой цифры при извлечении из цифровой азбуки при условии, что одна карточка утеряна?

Опыт  $\alpha = \{\text{утеряна одна карточка}\} = \{A1, A2\}$

$A1 = \{\text{утеряна карточка с простой цифрой}\}, n(A1) = 4, P(A1) = 4/10 = 2/5,$

$A2 = \{\text{утеряна карточка с непростой цифрой}\}, n(A2) = 6, P(A2) = 6/10 = 3/5$

$\beta = \{\text{угадывание карточки с простой цифрой}\}$



**Ответ: 1 бит.  
(Приложение №4)**

# Занятие №4. Количество информации. Решение задач

**Цель занятия:** Введение понятия количества информации для решения задач

## **Задачи занятия:**

- Ввести новые понятия и формулы: количество информации, ориентированный граф, свойства количества информации;
- Разобрать типовые задачи на количество информации;
- Провести интерпретацию информации через энтропию;
- Доказать ряд свойств количества информации;

# КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ

Информацию можно измерить числом, которое называется количеством информации об опыте  $\beta$ , содержащемся в опыте  $\alpha$

$$I(\alpha, \beta) = H(\beta) - H(\beta/\alpha)$$

Количество информации  $I(\alpha, \beta)$  показывает, насколько осуществление опыта  $\alpha$  уменьшает неопределенность  $\beta$  т.е. как много нового узнаем мы об исходе опыта  $\beta$ , произведя измерение (наблюдение)  $\alpha$ ;

# Свойства количества информации

- $0 \leq I(\beta/a) \leq H(\beta)$
- $I(a,\beta) = H(a) + H(\beta) - H(a*\beta),$
- $I(a,\beta) = I(\beta,a)$
- $I(a,\beta,\gamma) \geq I(a,\beta),$  где  $a,\beta,\gamma$ - три произвольных опыта

**(Приложение №5)**

**Решение логических задач на  
взвешивание через энтропию  
и количество информации.**

# ЗАДАЧИ НА ВЗВЕШИВАНИЕ

## Задача:

*Имеется 12 монет одного достоинства, одна из которых фальшивая, отличающаяся от других по весу (причем неизвестно, легче она или тяжелее настоящих).*

*Каково наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь, которое позволяет обнаружить фальшивую монету?*





# Решение:



$$H(\beta) = \log 24$$

т.е. определение фальшивой монеты связано с получением информации, измеряющейся числом  $\log 24$

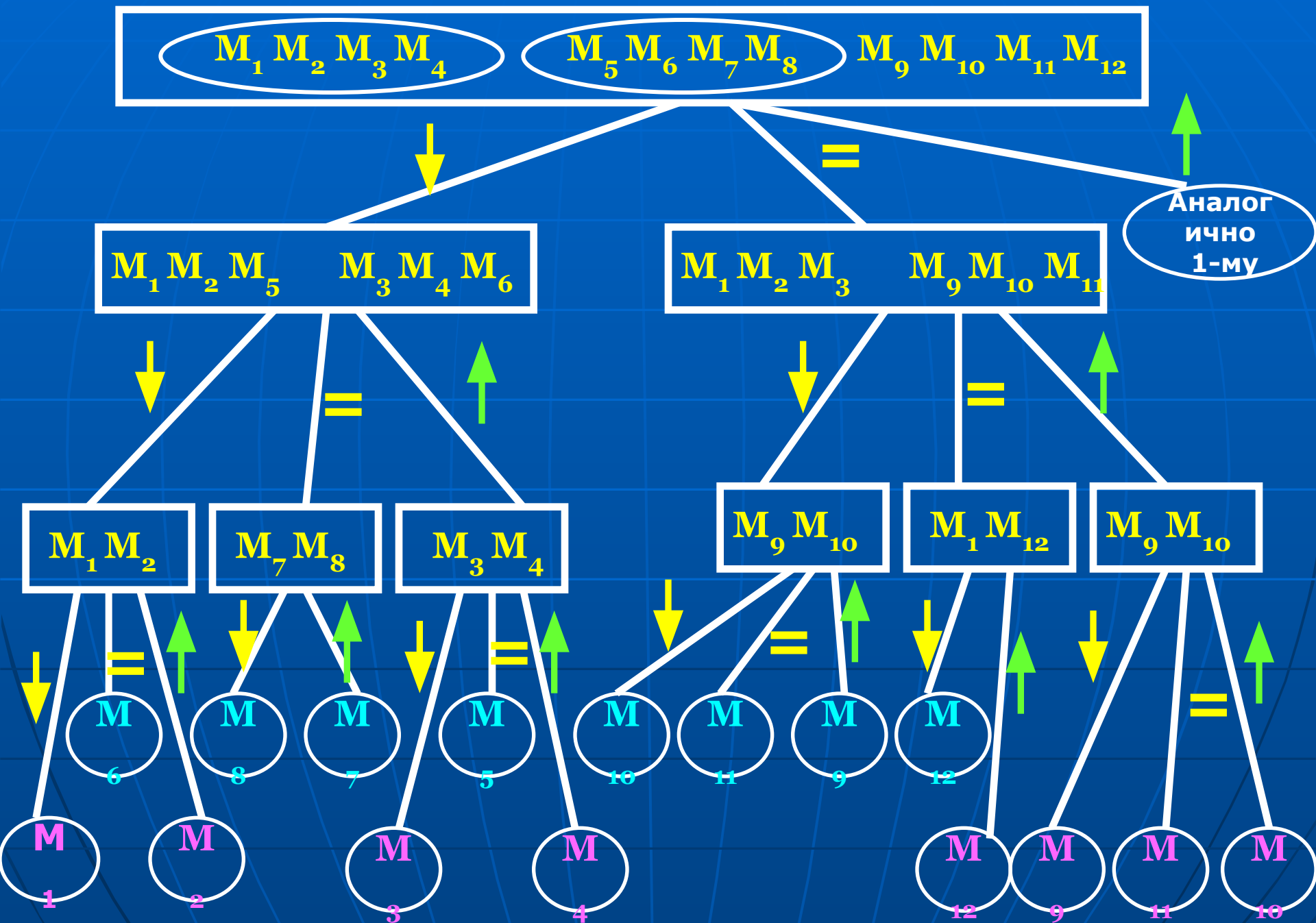
$$H(\alpha_1) \leq \log 3 \Rightarrow I(\alpha_1, \beta) \leq \log 3$$

$$A_k = \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k \quad k \cdot \log 3$$

$$H(A_k) \geq I(A_k, \beta) \geq H(\beta) \quad \text{или } k \cdot \log 3 \geq \log 24$$

Отсюда  $3^k \geq 24 \quad k \geq \log_3 24, \log_3 24 \approx 2,89$

т.к.  $k$  – целое число, то  **$k \geq 3$**



# ТВОРЧЕСКИЕ ПРОЕКТЫ:

Web-сайт:  
«Теория информации»

Презентация:  
«информация и логические задачи»