

М.Л.Пивоваров  
ИКИ РАН

Вращение спутника с малым  
самовозбуждением

## Вращение спутника с малым самовозбуждением

Следуя Граммелю ( Grammel, R.: Der selbsterregte un-symmetrische Kreisel. Ing.-Arch. **22**, 2, 73-97, 1954) гироскопом с самовозбуждением называют твердое тело, вращающееся под действием момента сил, зависящего только от проекций вектор мгновенной угловой скорости тела на оси связанной с телом системы координат. (См. также: К.Магнус, Гироскоп.Теория и применение. Москва, "Мир", 1974)

Будем называть вращением твердого тела с малым самовозбуждением, движение, описываемое следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} A dp/dt + (C - B)qr &= \varepsilon M_1(p, q, r), \\ B dq/dt + (A - C)rp &= \varepsilon M_2(p, q, r), \\ C dr/dt + (B - A)pq &= \varepsilon M_3(p, q, r), \end{aligned} \tag{1}$$

## Вращение спутника с малым самовозбуждением

где  $\varepsilon \ll 1$ , что означает, что возмущающий момент мал в сравнении с кинетической энергией вращения тела.

Особенность задачи - динамические уравнения Эйлера отщепляются и могут быть исследованы независимо от кинематических соотношений, определяющих вращение тела в абсолютном пространстве.

Во многих случаях анализ динамических уравнений оказывается достаточным для исследования картины эволюции вращения спутника.

## Вращение спутника с малым самовозбуждением

$\mathbf{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$ , т.е. момент постоянен в связанной с телом системе координат (утечка газа в двигателях спутника), Нейштадт, Пивоваров (1978), Препринт ИКИ АН СССР N 434.

Исследование вероятностей финальных движений при переходе через сепаратрису в этой задаче, Нейштадт (1991), CHAOS, 1.

$\mathbf{M} = \{m_1 - n_1 p, m_2 - n_2 q, m_3 - n_3 r\}$ , (вращение твердого тела в сопротивляющейся среде), Нейштадт (1980), Механика твердого тела, 6. Изучена как эволюция вращения, так и переходы через сепаратрису.

$\mathbf{M} = \{0, 0, r_0^2 - r^2\}$ , (задача Граммеля),

$\mathbf{M} = \{-Sp, -Sq, 0\}$ , (демпфирующее свойство реактивной струи), Пивоваров (1999), Acta Mechanica, V.133, No 1-4.

## Вращение спутника с малым самовозбуждением

Как показал Черноушко (1965), "Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость", ВЦ АН СССР, задача о вращении твердого тела с полостью, полностью заполненной сильно вязкой жидкостью, в асимптотическом приближении сводится к задаче (1). В этом случае компоненты  $M$  являются однородными полиномами третьей степени специального вида. В этой задаче он провел исследование системы, эквивалентной (1).

### Задача Граммеля

Уравнения движения

$$\begin{aligned}A dp/dt + (C - B)qr &= 0, \\B dq/dt + (A - C)rp &= 0, \\C dr/dt + (B - A)pq &= \varepsilon(r_0^2 - r^2).\end{aligned}\tag{1.1}$$

## Вращение спутника с малым самовозбуждением

Кинетическая энергия  $T$  и модуль вектора кинетического момента  $G$ :

$$\begin{aligned}2T &= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \\ G^2 &= A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Если возмущений нет (случай Эйлера), то  $T, G$  - интегралы движения, а  $p, q, r$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}p &= \sqrt{\frac{2CT - G^2}{A(C - A)}} \operatorname{cn}(\tau, k), \quad q = \sqrt{\frac{2CT - G^2}{B(C - B)}} \operatorname{sn}(\tau, k), \\ r &= \sqrt{\frac{G^2 - 2AT}{C(C - A)}} \operatorname{dn}(\tau, k), \quad \tau = t \sqrt{\frac{(C - B)(G^2 - 2AT)}{ABC}}, \\ k^2 &= [(B - A)(2CT - G^2)] / [(C - B)(G^2 - 2AT)],\end{aligned}\quad (1.3)$$



## Вращение спутника с малым самовозбуждением

где  $k$  модуль эллиптических функций Якоби  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$ .  
(Предполагается, что в начальный момент времени  $q = 0, q' > 0$ ). Для определенности принято что  $C > B > A$  и

В возмущенном движении

$$\begin{aligned} dT/dt &= \varepsilon(r_0^2 - r^2)r, \\ dG^2/dt &= 2\varepsilon C(r_0^2 - r^2)r. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Осредним правые части (1.4) вдоль траектории невозмущенного движения. Обозначим

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2K} \int_0^{2K} f(x) dx,$$

где  $2K$  период невозмущенного движения,  $K$  – полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем  $k$ .

# Вращение спутника с малым самовозбуждением

Получим

$$\begin{aligned}dT/dt &= \varepsilon(r_0^2 \langle r \rangle - \langle r^3 \rangle), \\dG^2/dt &= 2\varepsilon C(r_0^2 \langle r \rangle - \langle r^3 \rangle).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Известно, что

$$\begin{aligned}\langle r \rangle &= \frac{\pi}{2K} \sqrt{\frac{G^2 - 2AT}{C(C - A)}}, \\ \langle r^3 \rangle &= \frac{\pi(2 - k^2)}{4K} \left\{ \frac{G^2 - 2AT}{C(C - A)} \right\}^{3/2}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Очевидно, что уравнения (1.5) имеют интеграл

$$H = 2CT - G^2 \quad (1.7)$$

и значит интегрируемы в квадратурах.

Положения равновесия системы (1.5) определяются из уравнения  $\langle r^3 \rangle / \langle r \rangle = r_0^2$ .



## Вращение спутника с малым самовозбуждением

Оказывается, что они заполняют отрезок прямой

$$G^2 = 2WT + d, \quad (1.8)$$

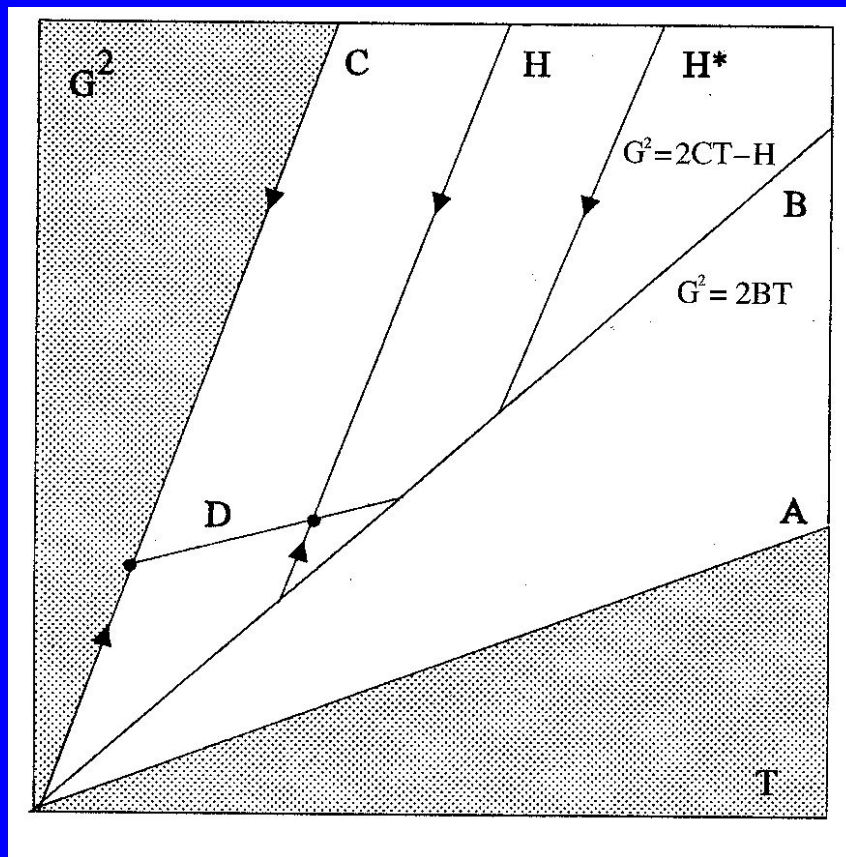
$$W = \frac{AC + BC - 2AB}{2C - A - B},$$

$$d = 2r_0^2 \frac{C(C - A)(C - B)}{2C - A - B},$$

и  $A < W < B$ ,  $d > 0$ .

На следующем слайде показан фазовый портрет системы (1.5)

# Вращение спутника с малым самовозбуждением



# Вращение спутника с малым самовозбуждением

Черноусько (1973),  
МТТ №4

Жесткость и  
коэффициент  
демпфирования  
велики

