М.Л.Пивоваров
ИКИ РАН

Вращение спутника с малым самовозбуждением

Вращение спутника с малым самовозбуждением

Следуя Граммелю (Grammel,R.: Der selbsterregte unsymmetrishe Kreisel. Ing.-Arch. **22**, 2, 73-97,1954) гироскопом с самовозбуждением называют твердое тело, вращающееся под действием момента сил, зависящего только от проекций вектор мгновенной угловой скорости тела на оси связанной с телом системы координат. (См. также: К.Магнус, Гироскоп.Теория и применение. Москва, "Мир", 1974)

Будем называть вращением твердого тела с малым самовозбуждением, движение,описываемое следующей системой уравнений

$$
\begin{aligned}
A\,dp/dt + (C-B)qr &= \varepsilon M_1(p,q,r),\\
B\,dq/dt + (A-C)rp &= \varepsilon M_2(p,q,r),\\
C\,dr/dt + (B-A)pq &= \varepsilon M_3(p,q,r),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Вращение спутника с малым самовозбуждением

где $\varepsilon << 1$, что означает, что возмущающий момент мал в сравнении с кинетической энергией вращения тела.

Особенность задачи - динамические уравнения Эйлера отщепляются и могут быть исследованы назависимо от кинематических соотношений, определющих вращение тела в абсолютном пространстве.

Во многих случаях анализ динамических уравнений оказывается достаточным для исследования картины эволюции вращения спутника.

Вращение спутника с малым самовозбуждением

$\mathbf{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$,т.е. момент постоянен в связанной с телом системе координат (утечка газа в двигателях спутника), Нейштадт, Пивоваров (1978), Препринт ИКИ АН СССР N 434.

Исследование вероятностей финальных движений при переходе через сепаратрису в этой задаче, Нейштадт (1991), CHAOS, 1.

$\mathbf{M} = \{m_1 - n_1 p, m_2 - n_2 q, m_3 - n_3 r\}$, (вращение твердого тела в сопротивляющейся среде), Нейштадт (1980), Механика твердого тела, 6. Изучена как эволюция вращения, так и переходы через сепаратрису.

$\mathbf{M} = \{0, 0, r_0^2 - r^2\}$,(задача Граммеля),

$\mathbf{M} = \{-Sp, -Sq, 0\}$,(демпфирующее свойство реактивной струи), Пивоваров (1999), Acta Mechanika, V.133, No 1-4.

Вращение спутника с малым самовозбуждением

Как показал Черноусько (1965), “Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость”, ВЦ АН СССР, задача о вращении твердого тела с полостью, полностью заполненной сильно вязкой жидкостью, в асимтотическом приближении сводится к задаче (1).В этом случае компоненты **M** являются однородными полиномами третьей степени специального вида В этой задаче он провел исследование системы, эквивалентной (1).

Задача Граммеля

Уравнения движения

$$
\begin{aligned}
&A\,dp/dt + (C - B)qr = 0,\\
&B\,dq/dt + (A - C)rp = 0, \qquad (1.1)\\
&C\,dr/dt + (B - A)pq = \varepsilon(r_0^2 - r^2).
\end{aligned}
$$

Вращение спутника с малым самовозбуждением

Кинетическая энергия T и модуль вектора кинетического момента G:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$
$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2. \qquad (1.2)$$

Если возмущений нет (случай Эйлера), то T, G - интегралы движения, а p, q, r вычисляются по формулам

$$p = \sqrt{\frac{2CT - G^2}{A(C-A)}}\,\mathrm{cn}(\tau, k), \quad q = \sqrt{\frac{2CT - G^2}{B(C-B)}}\,\mathrm{sn}(\tau, k),$$
$$r = \sqrt{\frac{G^2 - 2AT}{C(C-A)}}\,\mathrm{dn}(\tau, k), \quad \tau = t\sqrt{\frac{(C-B)(G^2-2AT)}{ABC}},$$
$$k^2 = \left[(B-A)(2CT - G^2)\right] / \left[(C-B)(G^2 - 2AT)\right],$$

$$(1.3)$$

1 G11 S44 6: 6 x=0.0pt y=72.3pt

Вращение спутника с малым самовозбуждением

где k модуль эллиптических функций Якоби sn, cn, dn. (Предполагается, что в начальный момент времени $q = 0, q' > 0$). Для определенности принято что $C > B > A$ и

В возмущенном движении

$$dT/dt = \varepsilon(r_0^2 - r^2)r,$$
$$dG^2/dt = 2\varepsilon C(r_0^2 - r^2)r. \tag{1.4}$$

Осредним правые части (1.4) вдоль траектории невозмущенного движения. Обозначим

$$< f > = \frac{1}{2K}\int_0^{2K} f(x)\,dx,$$

где $2K$ период невозмущенного движения, K – полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем k.

1 G11 S44 7: 7 x=0.0pt y=72.3pt

Вращение спутника с малым самовозбуждением

Получим

$$dT/dt = \varepsilon(r_0^2 < r > - < r^3 >),$$
$$dG^2/dt = 2\varepsilon C(r_0^2 < r > - < r^3 >). \qquad (1.5)$$

Известно, что

$$< r > = \frac{\pi}{2K}\sqrt{\frac{G^2 - 2AT}{C(C-A)}},$$
$$< r^3 > = \frac{\pi(2-k^2)}{4K}\left\{\frac{G^2 - 2AT}{C(C-A)}\right\}^{3/2}. \qquad (1.6)$$

Очевидно, что уравнения (1.5) имеют интеграл

$$H = 2CT - G^2 \qquad (1.7)$$

и значит интегрируемы в квадратурах.

Положения равновесия системы (1.5) определяются из уравнения $< r^3 > / < r >= r_0^2$.

1 G11 S44 8: 8 x=0.0pt y=72.3pt

Вращение спутника с малым самовозбуждением

Оказывается, что они заполняют отрезок прямой

$$G^2 = 2WT + d, \tag{1.8}$$

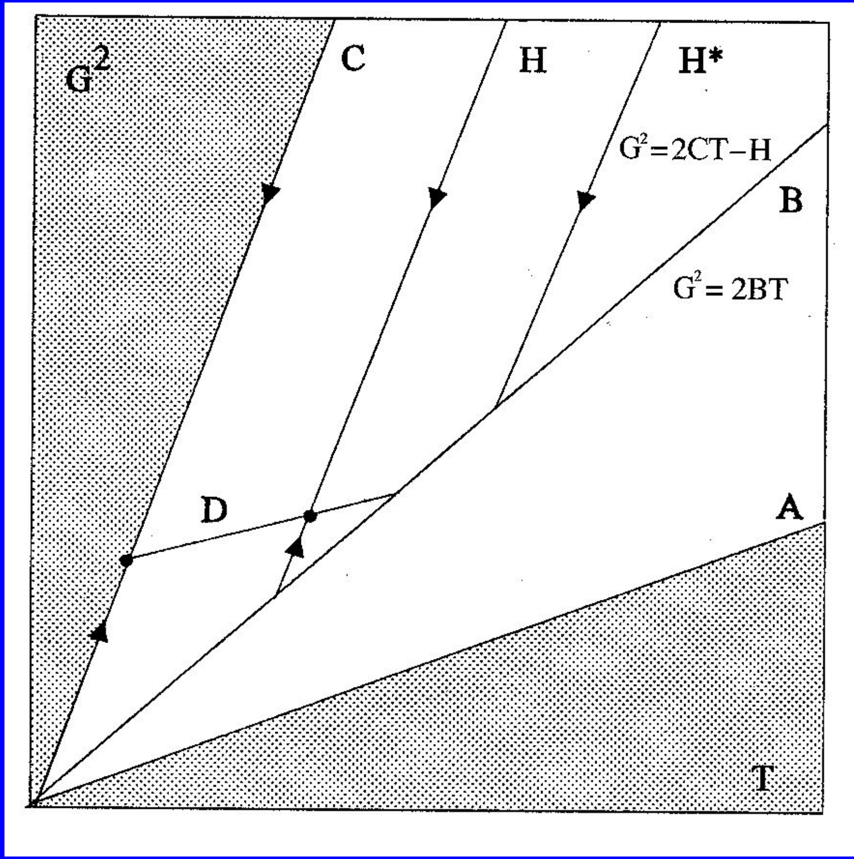
$$W = \frac{AC + BC - 2AB}{2C - A - B},$$

$$d = 2r_0^2 \frac{C(C - A)(C - B)}{2C - A - B},$$

и $A < W < B$, $d > 0$.

На следующем слайде показан фазовый портрет системы (1.5)

Вращение спутника с малым самовозбуждением



Вращение спутника с малым самовозбуждением

Черноусько (1973),
МТТ №4

Жесткость и
коэффициент
демпфирования
велики