

В.Г. Петухов

E-mail: petukhov@mtu-net.ru

Государственный космический
научно-производственный центр
им. М.В. Хруничева



**ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ
С МАЛОЙ ТЯГОЙ**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА НА ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

4. ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ОРБИТАМИ КА С ДВИГАТЕЛЕМ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ИСТЕЧЕНИЯ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Представлен единый методический подход к решению различных задач численной оптимизации траекторий КА с малой тягой. Основой этого подхода является формальная редукция краевой задачи принципа максимума к задаче Коши. Такая редукция достигается применением метода продолжения по параметру.

Оптимизация перелетов КА с малой тягой:

Т.М. Энеев, В.А. Егоров, В.В. Белецкий, Г.Б. Ефимов,
М.С. Константинов, Г.Г. Федотов, Ю.А. Захаров,
Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев, В.Н. Лебедев,
В.В. Салмин, С.А. Ишков, В.В. Васильев,
T.N. Edelbaum, F.W. Gobetz, J.P. Marec, N.X. Vinh, K.D. Mease, C.G. Sauer,
C. Kluever, V. Coverstone-Carroll, S.N. Williams, M. Hechler и др.

Метод продолжения:

М. Kubicek, Т.У. На и др.

Недостатки традиционных численных методов оптимизации

- малая область сходимости;
- вычислительная неустойчивость;
- необходимость подбора начального приближения в условиях отсутствия априорной информации о решении задачи.

Часть этих явлений связана с физической сущностью задачи оптимизации (вопросы устойчивости, существования и ветвления решений). Однако, большинство численных методов вносят свои - методические - ограничения, не имеющие непосредственного отношения к свойствам математической задачи. Так, область сходимости практически всех численных методов существенно меньше области притяжения конкретной экстремальной точки в пространстве неизвестных параметров краевой задачи.

Методические сложности связаны с вычислительной неустойчивостью и с ограниченностью области сходимости численных методов решения, а в некоторых случаях - например при использовании ряда прямых методов оптимизации - с большой размерностью задачи.

Цель разработки метода продолжения

“Регуляризация” численной оптимизации траекторий, то есть устранение, по возможности, методических недостатков численной оптимизации. В частности, была поставлена и решена задача определения оптимальной траектории при использовании тривиального начального приближения (например, пассивного движения КА по начальной орбите).

Рассматриваемые прикладные задач оптимизации траекторий

1. Оптимизация межпланетных траекторий КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги;
2. Оптимизация траекторий перелета к Луне КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги в рамках ограниченной задачи трех тел;
3. Оптимизация перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами КА с двигательной установкой с постоянной скоростью истечения.

1. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Задача: решить систему нелинейных уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

относительно вектора \mathbf{z}

Пусть \mathbf{z}_0 - начальное приближение решения. Тогда

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}, \quad (2)$$

где \mathbf{b} - вектор невязок при $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$.

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство $\mathbf{z}(\tau)$, где τ - скалярный параметр и рассмотрим уравнение

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1 - \tau)\mathbf{b} \quad (3)$$

относительно $\mathbf{z}(\tau)$. Очевидно, что $\mathbf{z}(1)$ - решение уравнения (1). Продифференцируем уравнение (3) по τ и разрешим его относительно $d\mathbf{z}/d\tau$:


$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}_z^{-1}(\mathbf{z})\mathbf{b}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (4)$$


Интегрируя уравнения (4) от 0 до 1 получаем решение системы (1).


Уравнение (4) - дифференциальное уравнение метода продолжения


(формальная редукция решения системы нелинейных уравнений (1) к задаче Коши).


Применение метода продолжения к краевой задаче оптимального управления


- 
 Уравнения оптимального движения (после применения принципа максимума):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= H_{\mathbf{p}}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -H_{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\}$$
- 
 Краевые условия (пример):

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k$$
- 
 Вектор параметров краевой задачи и вектор невязок:

$$\mathbf{z} = \mathbf{p}(0), \mathbf{f} = \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_k$$
- 
 Матрица чувствительности:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{z}}$$
- 
 Совместная система о.д.у. оптимального движения и уравнений в вариациях для вычисления вектора невязок и матрицы чувствительности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= H_{\mathbf{p}}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -H_{\mathbf{x}}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} \right) &= H_{\mathbf{px}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + H_{\mathbf{pp}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \right) &= -H_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} - H_{\mathbf{xp}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \end{aligned} \right\}$$
- 
 Расширенные начальные условия:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} = 0, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{I}$$

Схема решения задачи оптимизации траектории КА с малой тягой методом продолжения по параметру

Редукция задачи оптимального управления к
краевой задаче применением принципа
максимума Л.С. Понтрягина

Вычисление вектора начальных невязок \mathbf{b} с
помощью интегрирования системы о.д.у.
оптимального движения при заданном
начальном приближении вектора параметров
краевой задачи \mathbf{z}_0

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ

Начальное
приближение \mathbf{z}_0

Интегрирование системы о.д.у. метода продолжения

$$\frac{dz}{d\tau} = -\mathbf{f}_z^{-1}(\mathbf{z})\mathbf{b}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

по τ от 0 до 1

1-й вариант
вычисления
правых частей
о.д.у. метода
продолжения

2-й вариант
вычисления
правых частей о.
д.у. метода
продолжения

Совместное интегрирование систем о.д.у.
оптимального движения и уравнений в
вариациях при текущем значении $\mathbf{z}(\tau)$ для
определения текущих значений вектора
невязок $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \tau)$ и матрицы чувствительности
 $\mathbf{f}_z(\mathbf{z}, \tau)$

Интегрирование систем о.д.у. оптимального
движения при текущем значении $\mathbf{z}(\tau)$ для
определения текущих значений вектора
невязок $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \tau)$ и при варьированных значениях
 $\mathbf{z}(\tau)$ для конечно-разностного вычисления $\mathbf{f}_z(\mathbf{z}, \tau)$

Реше
ние
 $\mathbf{z}(1)$

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

2.1. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Функционал: $\frac{1}{2} \int_0^T a^2 dt$ (постоянная мощность, ЯЭРДУ)

$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{a^2}{N(x,t)} dt$ (переменная мощность, СЭРДУ)

Уравнения движения: $d^2 \mathbf{x} / dt^2 = \Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{a}$

Начальные условия: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(t_0), \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0(t_0) + V_{\infty} \mathbf{e}_{\infty}$

Конечные условия

1) сопровождение: $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k(t_0 + T), \mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_k(t_0 + T)$

2) пролет: $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k(t_0 + T)$

где \mathbf{x}, \mathbf{v} - векторы положения и скорости КА, Ω - силовая функция гравитационного поля, \mathbf{a} - вектор реактивного ускорения, $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$ - векторы положения и скорости планеты отправления, $\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k$ - векторы положения и скорости планеты прибытия, V_{∞} - гиперболический избыток скорости КА у планеты отправления, \mathbf{e}_{∞} - единичный вектор ориентации гиперболического избытка V_{∞} , $N(\mathbf{x}, t)$ - отношение текущей реактивной мощности к начальной.

2.2. УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ (СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ)



Гамильтониан:

$$H = -\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \mathbf{p}_x^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x + \mathbf{p}_v^T \mathbf{a}$$



Оптимальное управление:

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v$$



Оптимальный гамильтониан:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \mathbf{p}_v^T \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_x^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x$$



Уравнения оптимального движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \Omega_x + \mathbf{p}_v, \\ \frac{d^2 \mathbf{p}_v}{dt^2} &= \Omega_{xx} \mathbf{p}_v. \end{aligned} \right\}$$



Вектор невязок:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T; \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}(T; \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) - \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \quad (\text{сопровождение})$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T; \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{p}_v(T; \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) \end{pmatrix} \quad (\text{пролет})$$



Вектор параметров краевой задачи и
вектор начальных невязок:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_0 \end{pmatrix} : \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}$$

2.3. УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ

Погружение краевой задачи
в однопараметрическое семейство:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1 - \tau)\mathbf{b}$$

Начальное значение вектора параметров
краевой задачи и ее решение:

$$\mathbf{z}|_{\tau=0} = \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{z}|_{\tau=1} = \tilde{\mathbf{z}}$$

Дифференциальное уравнение метода
продолжения:

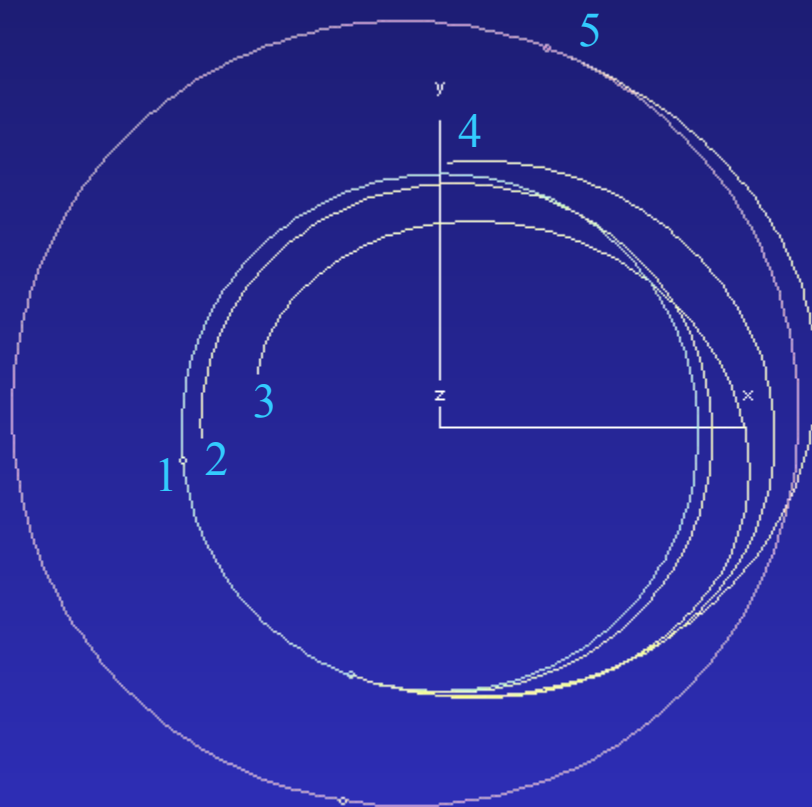
$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}_z^{-1}(\mathbf{z})\mathbf{b}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

Система дифференциальных уравнений для определения правой части
уравнения метода продолжения и расширенные начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \\ \frac{d^2 \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{dt^2} &= \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} \right) &= \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} + \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} \right) &= \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} + \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0(0), \quad \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = \mathbf{v}_0(0) + V_{\infty} \frac{\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{p_{\mathbf{v}}}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = \frac{V_{\infty}}{p_{\mathbf{v}}} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{p}_{\mathbf{v}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}^T}{p_{\mathbf{v}}^2} \right), \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}(0)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} &= \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}(0)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}(0)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} = \mathbf{I} \end{aligned} \right\}$$

2.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ, ВЫЧИСЛЯЕМАЯ АЛГОРИТМОМ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПАССИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В КАЧЕСТВЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ



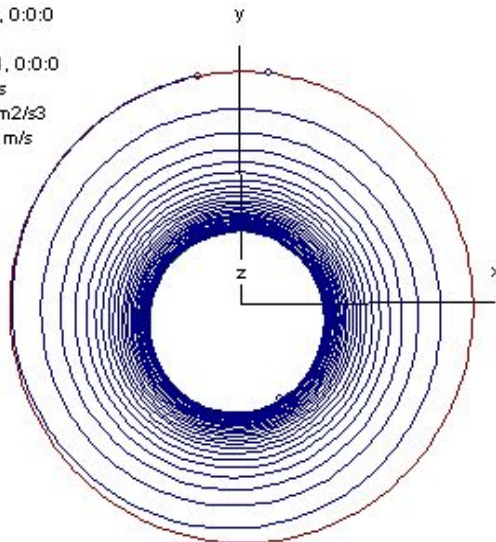
Земля-Марс, сопровождение,
дата старта 1 июня 2000, $V_{\infty} = 0$ м/с,
 $T=300$ сут

- 1 - траектория пассивного движения ($\tau_1 = 0$)
- 2-4 - промежуточные траектории ($0 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < 1$)
- 5 - конечная (оптимальная) траектория ($\tau_5 = 1$)

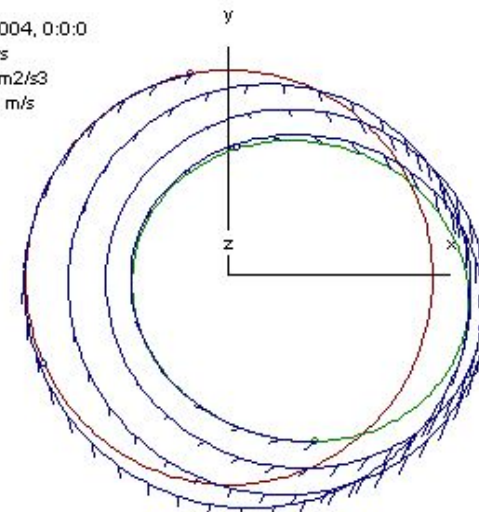
2.5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ К МЕРКУРИЮ И АСТЕРОИДАМ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

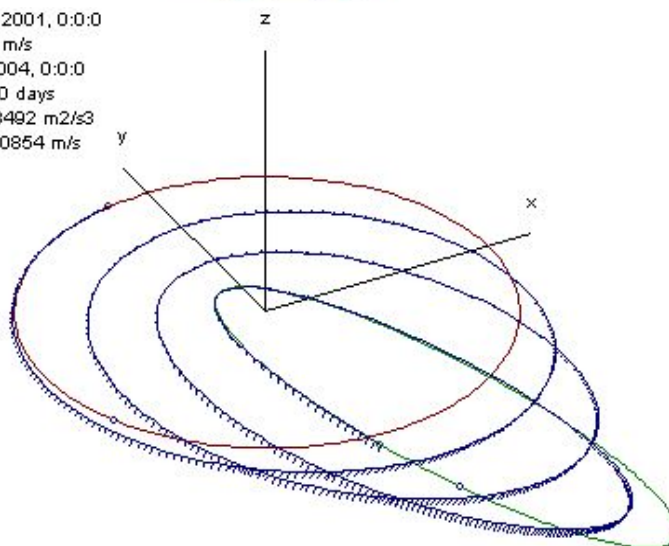
Departure: Earth at 1 Jan 2001, 0:0:0
 Departure velocity 0.0 m/s
 Arrival: Mercury at 15 Dec 2011, 0:0:0
 Transfer duration: 4000.00 days
 Performance index: 1.3066 m²/s³
 Characteristic velocity: 19776 m/s



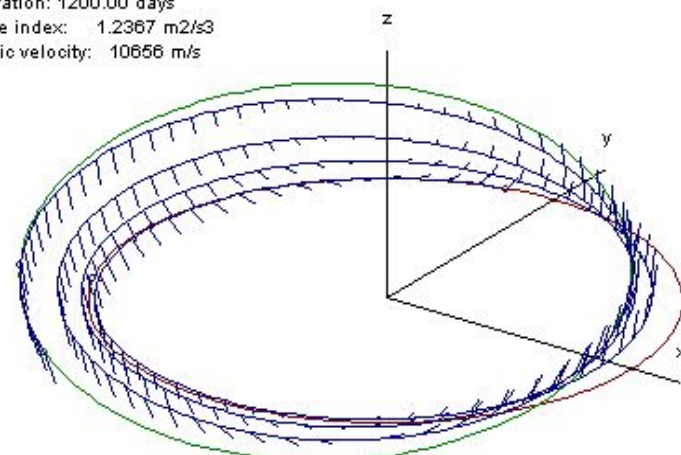
Departure: Earth at 1 Jan 2001, 0:0:0
 Departure velocity 0.0 m/s
 Arrival: Ra-Shalom at 15 Apr 2004, 0:0:0
 Transfer duration: 1200.00 days
 Performance index: 1.8496 m²/s³
 Characteristic velocity: 12842 m/s



Departure: Earth at 1 Jan 2001, 0:0:0
 Departure velocity 0.0 m/s
 Arrival: Icarus at 15 Apr 2004, 0:0:0
 Transfer duration: 1200.00 days
 Performance index: 4.3492 m²/s³
 Characteristic velocity: 20854 m/s

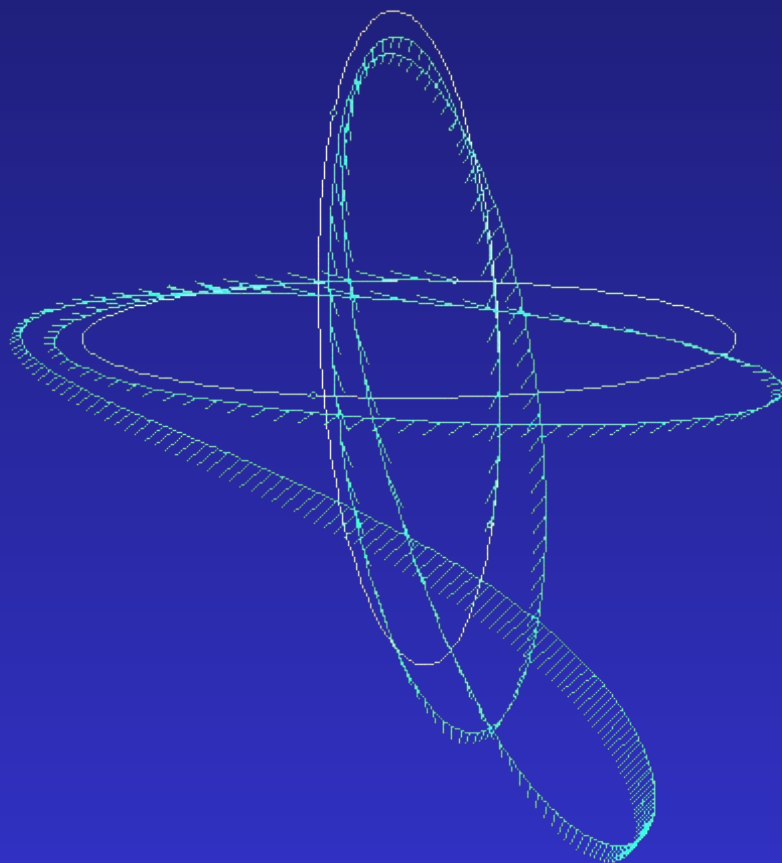


Departure: Earth at 1 Jan 2001, 0:0:0
 Departure velocity 0.0 m/s
 Arrival: Xanthus at 15 Apr 2004, 0:0:0
 Transfer duration: 1200.00 days
 Performance index: 1.2367 m²/s³
 Characteristic velocity: 10656 m/s

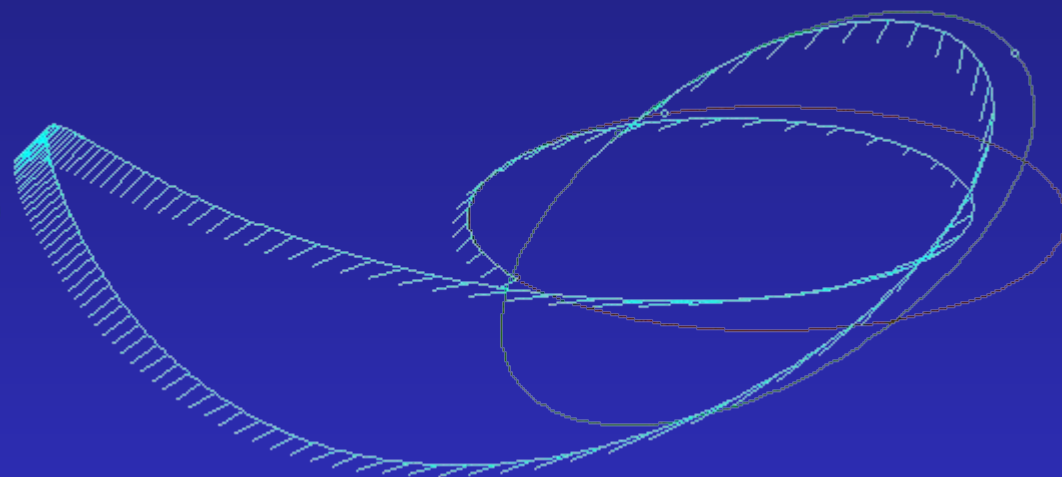


ПРИМЕРЫ ПОВОРОТА ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ

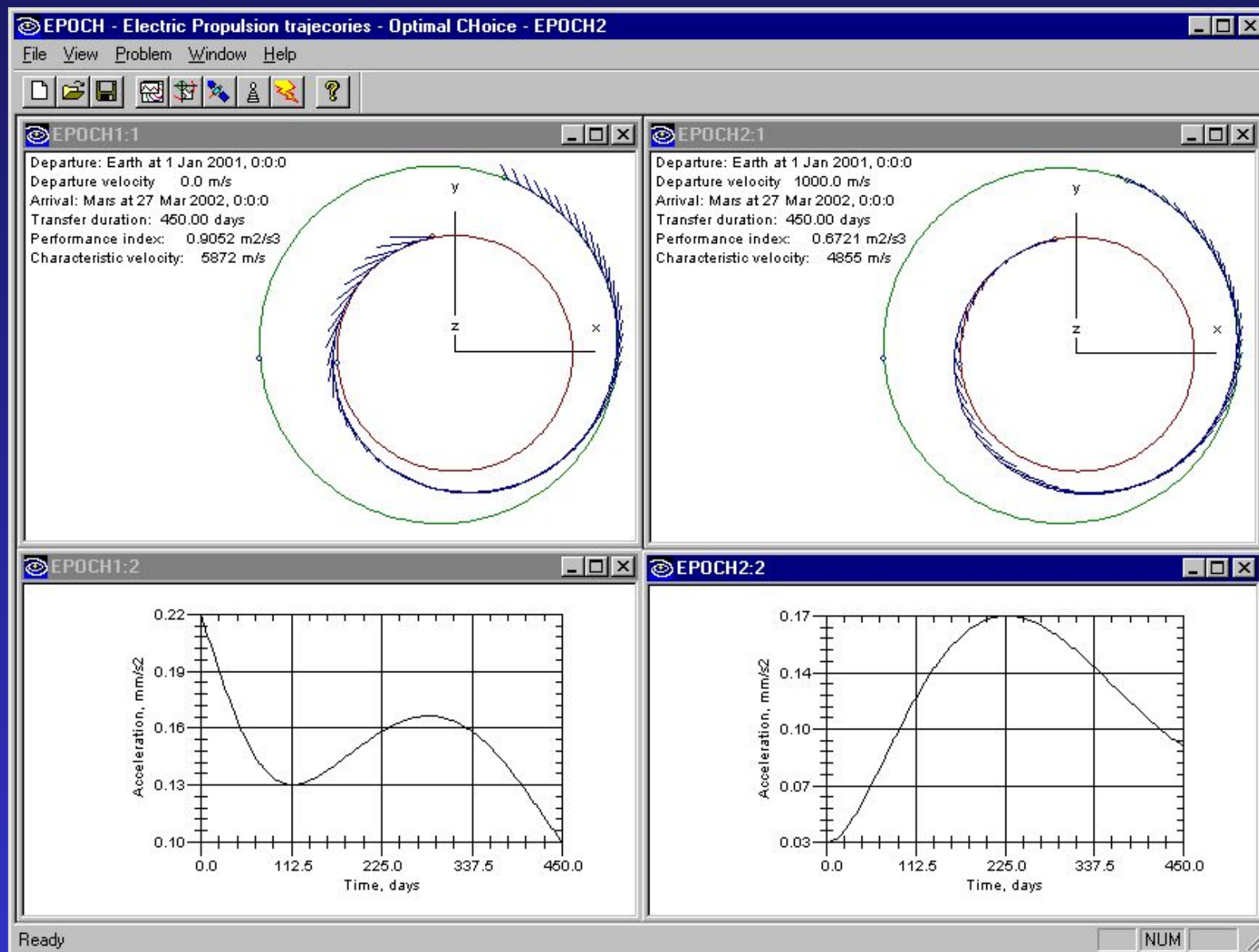
Поворот плоскости
круговой орбиты на 90°



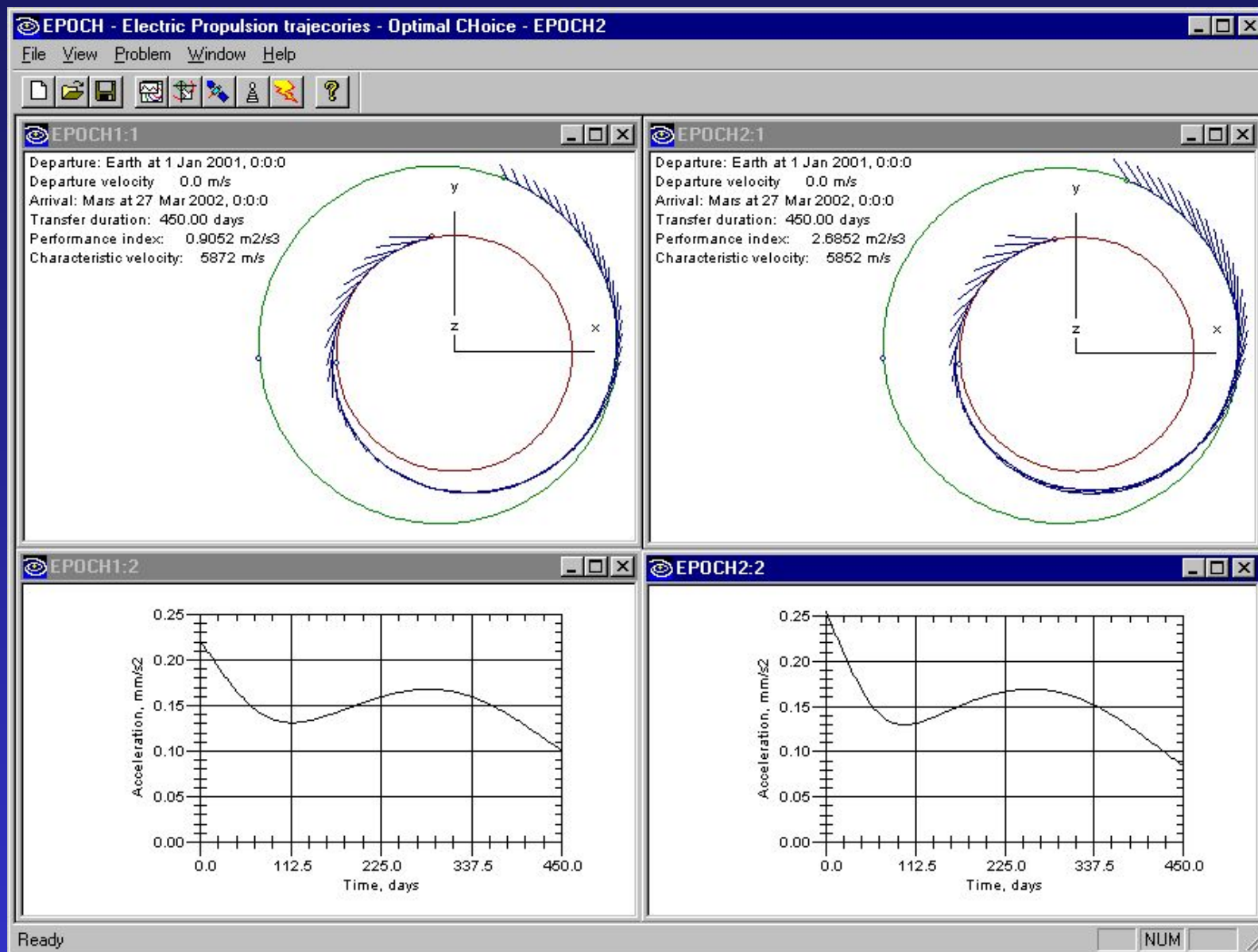
Поворот плоскости
круговой орбиты на 120°



ПРИМЕР: ВЛИЯНИЕ ОТЛЕТНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИЗБЫТКА СКОРОСТИ



ПРИМЕР: ТРАЕКТОРИЯ КА С ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТЬЮ И С СОЛНЕЧНОЙ ЭРДУ



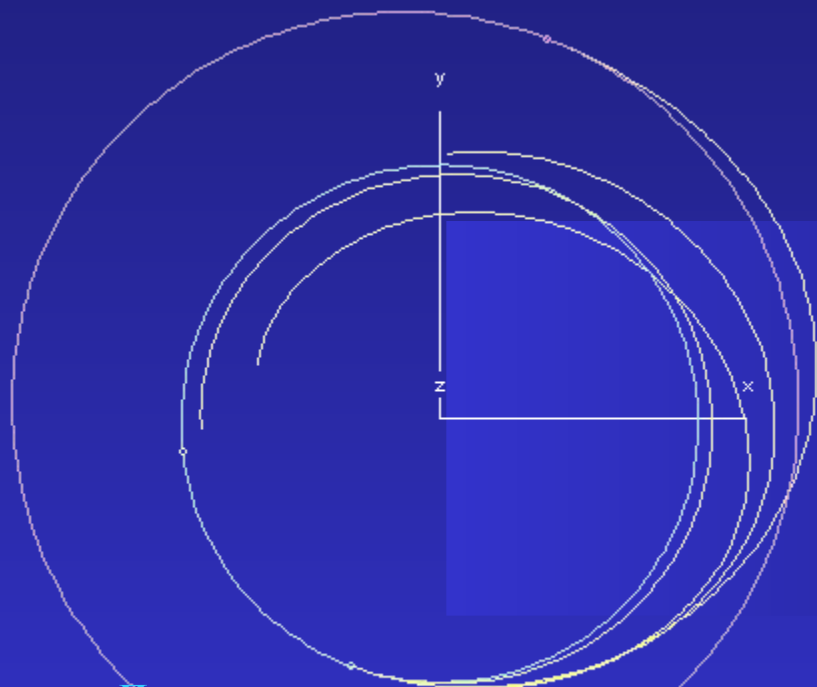
2.7. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ГРАВИТАЦИОННОМУ ПАРАМЕТРУ

Причины отказов метода продолжения: вырожденность матрицы чувствительности (ветвление решений)

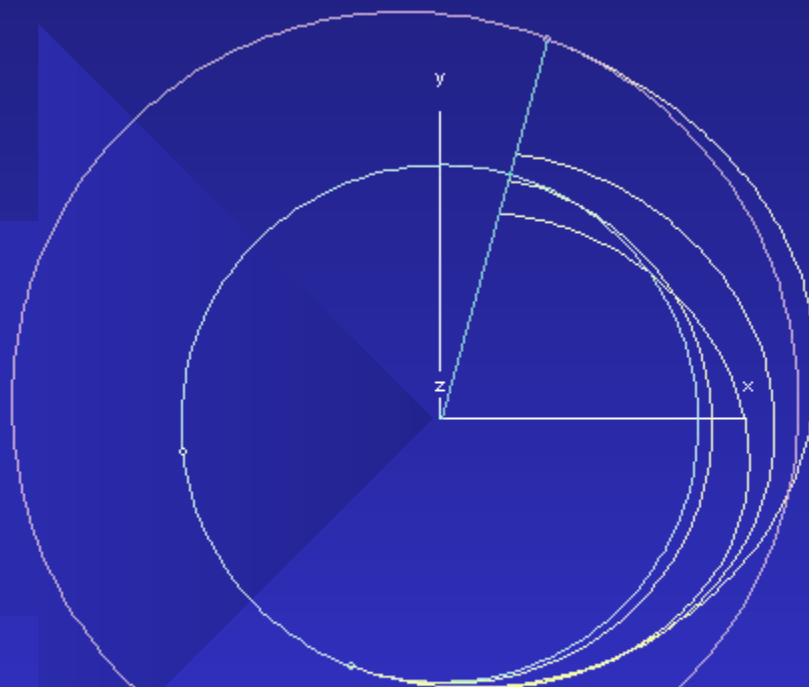
Для межпланетных перелетов бифуркации оптимальных решений чаще всего связаны с изменением числа целых витков вокруг Солнца

Если угловая дальность перелета в процессе продолжения будет оставаться постоянной, то путь продолжения в параметрическом пространстве не будет пересекать границ областей оптимальных решений различного типа, следовательно не будет вырождаться матрица чувствительности

Цель модификации метода - зафиксировать угловую дальность перелета в процессе продолжения



Последовательность вычисления траекторий при использовании базового метода продолжения

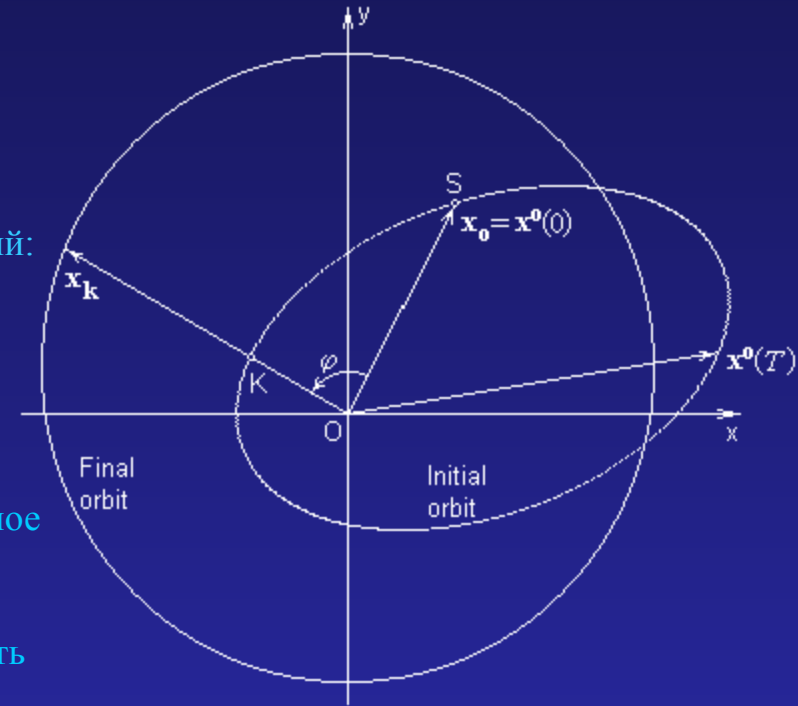


Последовательность вычисления траекторий при использовании метода продолжения по гравитационному параметру

Пусть $x_0(0)$, $x_0(T)$ - положение планеты старта при $t=0$ и $t=T$; x_k - положение планеты-цели при $t=T$. Будем считать гравитационный параметр Солнца линейной функцией параметра продолжения τ , и начальное значение этого гравитационного параметра μ_0 выберем из следующих условий:

- 1) угловые дальности перелета при $\tau=0$ и $\tau=1$ равны;
- 2) при $\tau=1$ гравитационный параметр Солнца равен действительному физическому значению (1 для уравнений в безразмерных координатах)

В качестве начального приближения рассматривается пассивное движение КА по орбите планеты старта. Пусть начальная истинная аномалия КА в точке старта S равна v_0 , а конечная в точке K $v_k = v_0 + \phi$ (ϕ - угол между x_0 и проекцией x_k на плоскость начальной орбиты).



Решение уравнения Кеплера дает соответствующие значения средних аномалий M_0 и M_k ($M = E - e \cdot \sin E$, где $E = 2 \cdot \arctg \{ [(1-e)/(1+e)]^{0.5} \cdot \tg(v/2) \}$ - эксцентрисическая аномалия). Средняя аномалия - линейная функция времени на кеплеровской орбите: $M = M_0 + n \cdot (t - t_0)$, где $n = (\mu_0/a^3)^{0.5}$ - среднее движение. Следовательно, должно выполняться: $M_k + 2\pi N_{rev} = nT + M_0$. Отсюда начальное значение гравитационного параметра Солнца

$$\mu_0 = [(M_k + 2\pi N_{rev} - M_0) / T]^2 a^3,$$

а текущее

$$\mu(\tau) = \mu_0 + (1 - \mu_0) \tau.$$

Форма и размеры граничных орбит должны быть инвариантны относительно τ , отсюда

$$v(t, \tau) = \mu(\tau)^{0.5} v(t, 1).$$

Уравнения движения:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \quad \ddot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}}$$

Краевые условия:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_0,$$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k, \quad \dot{\mathbf{x}}(T) = \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_k.$$

Функция невязок:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}(T) - \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

Параметры краевой задачи:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0), d\mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0)/d\tau)^T = (\mathbf{p}_{\mathbf{v}0}, \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0})^T$$

Уравнение метода продолжения:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z}) \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} \right), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

где

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} & \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} \right) & \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} \right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}}{\partial \tau} - \frac{1}{2\mu^{1/2}(\tau)} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} \right) = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}} \right) = \mu(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}} \right],$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \Omega_{\mathbf{x}} + \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}} + \mu(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}} \right],$$

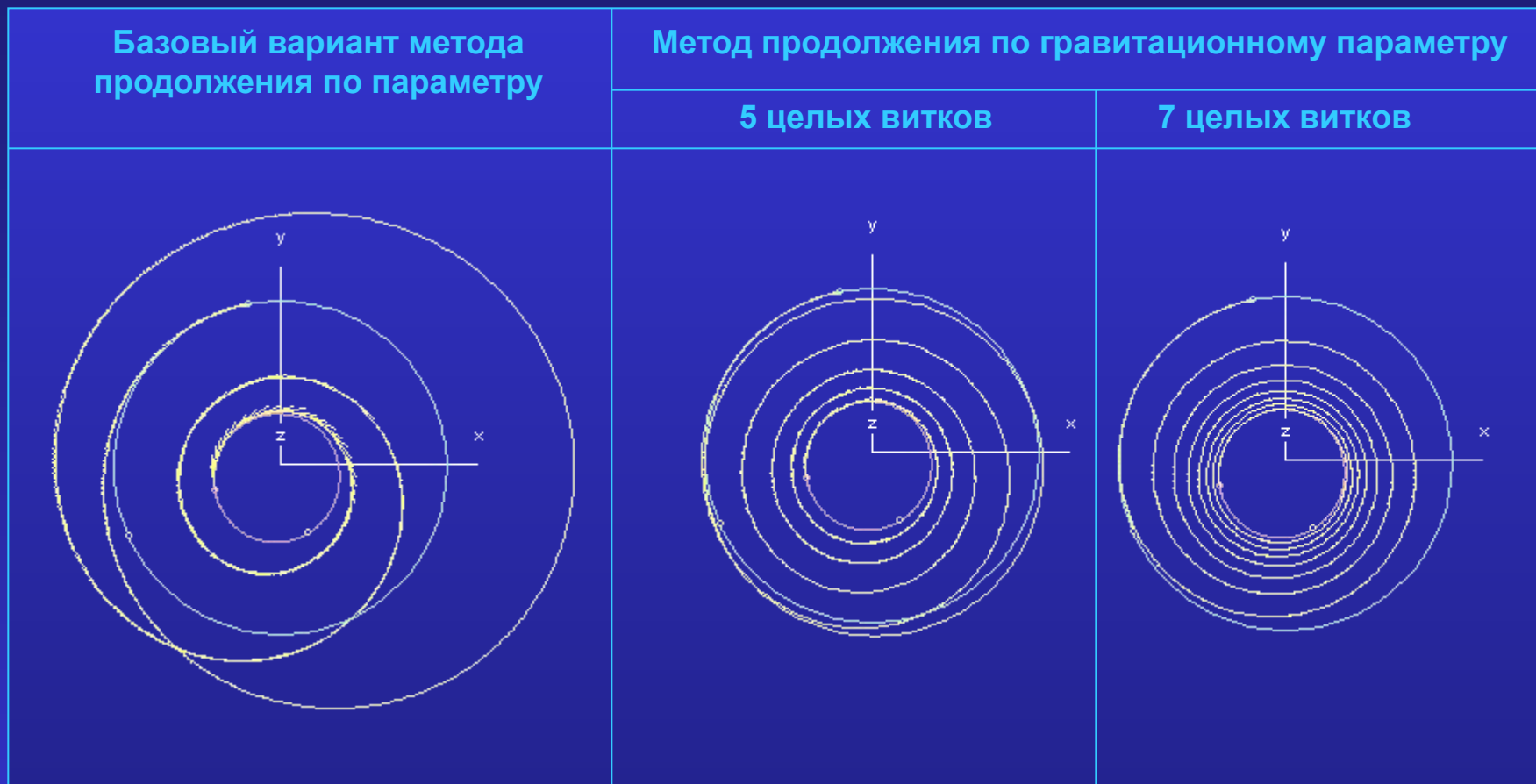
$$\frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial \tau} = \frac{1}{2\mu^{1/2}(\tau)} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \mathbf{v}_0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \tau} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \tau} = 0.$$

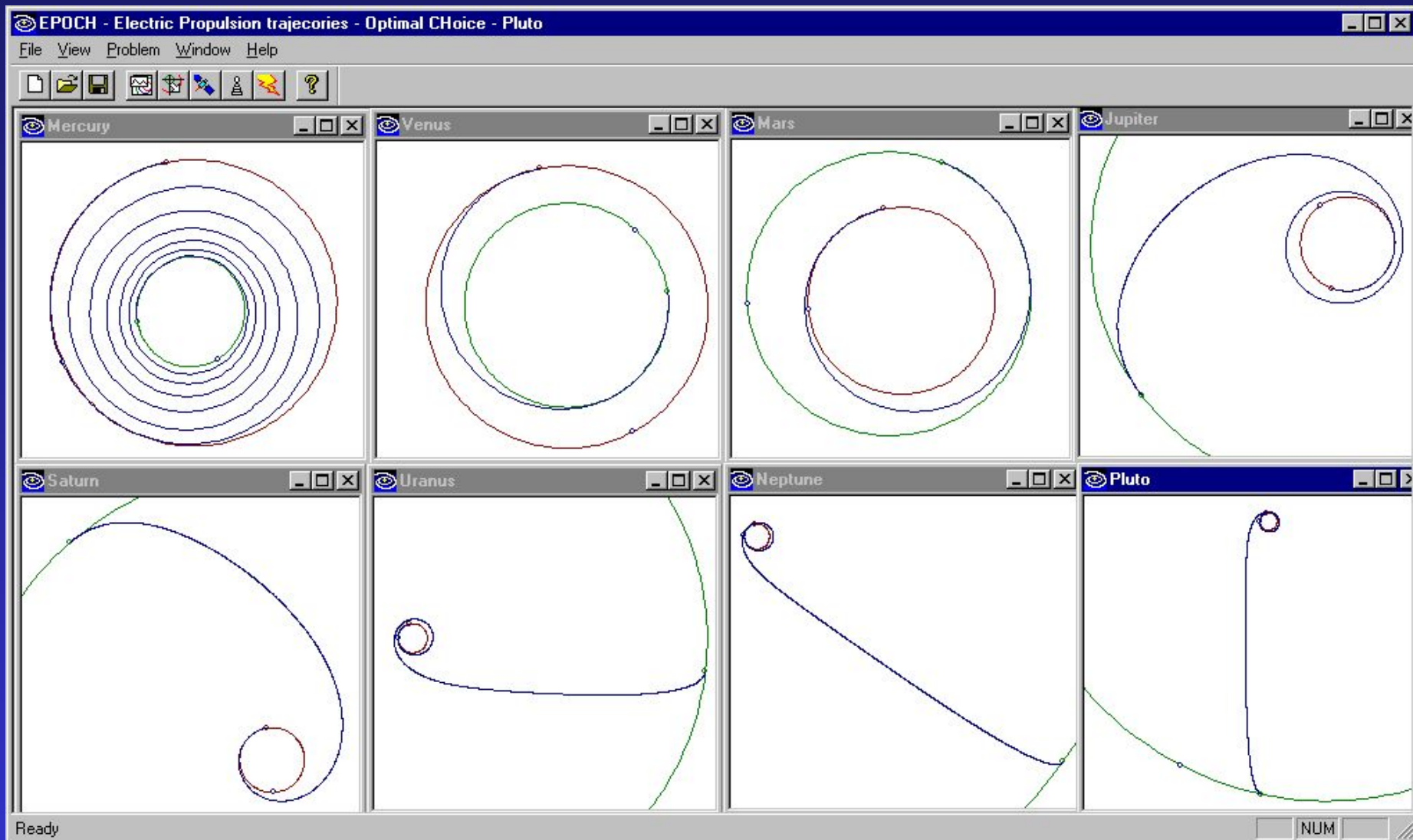
Численный пример: сопровождение Меркурия

Постоянная мощность, дата старта 1 января 2001 г., время перелета 1200 суток

Все решения получены с использованием нулевого начального приближения



ПРИМЕРЫ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ К ПЛАНЕТАМ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ



3. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА НА ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

Рассматривается задача перелета КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги с геоцентрической орбиты на орбиту спутника Луны.

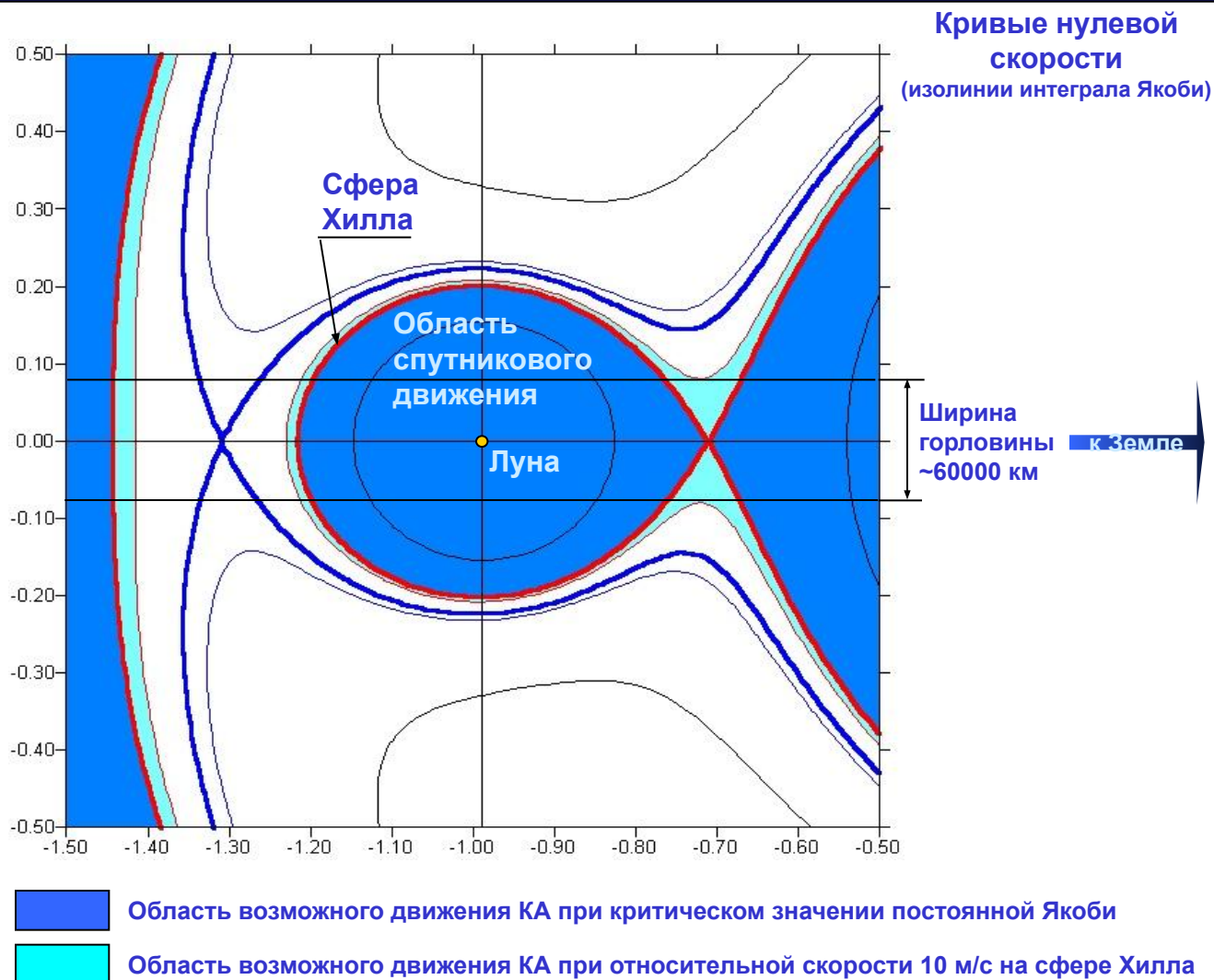
Траектория перелета разбивается на 4 участка:

- 1) Траектория геоцентрической спиральной раскрутки с начальной орбиты до некоторой промежуточной геоцентрической орбиты;
- 2) Траектория сопровождения точки либрации L_2 системы Земля-Луна;
- 3) Траектория перелета из точки L_2 на некоторую промежуточную селеноцентрическую орбиту;
- 4) Траектория селеноцентрической скрутки до целевой орбиты.

1-й и 4-й участок могут отсутствовать в случае достаточно высоких начальной геоцентрической и конечной селеноцентрической орбит.

Траектории 2-го и 3-го участков определяются с помощью метода продолжения по параметру.

ОБОСНОВАНИЕ РАЗБИЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ НА УЧАСТКИ

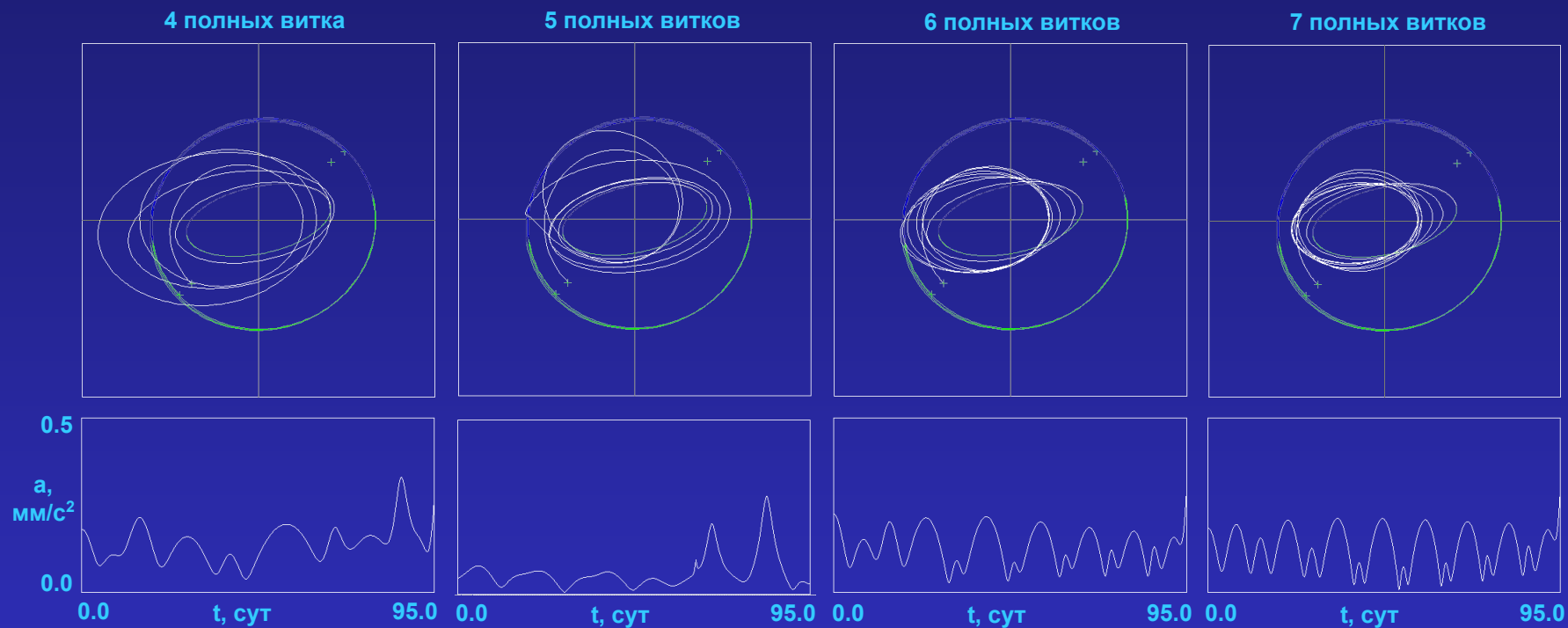


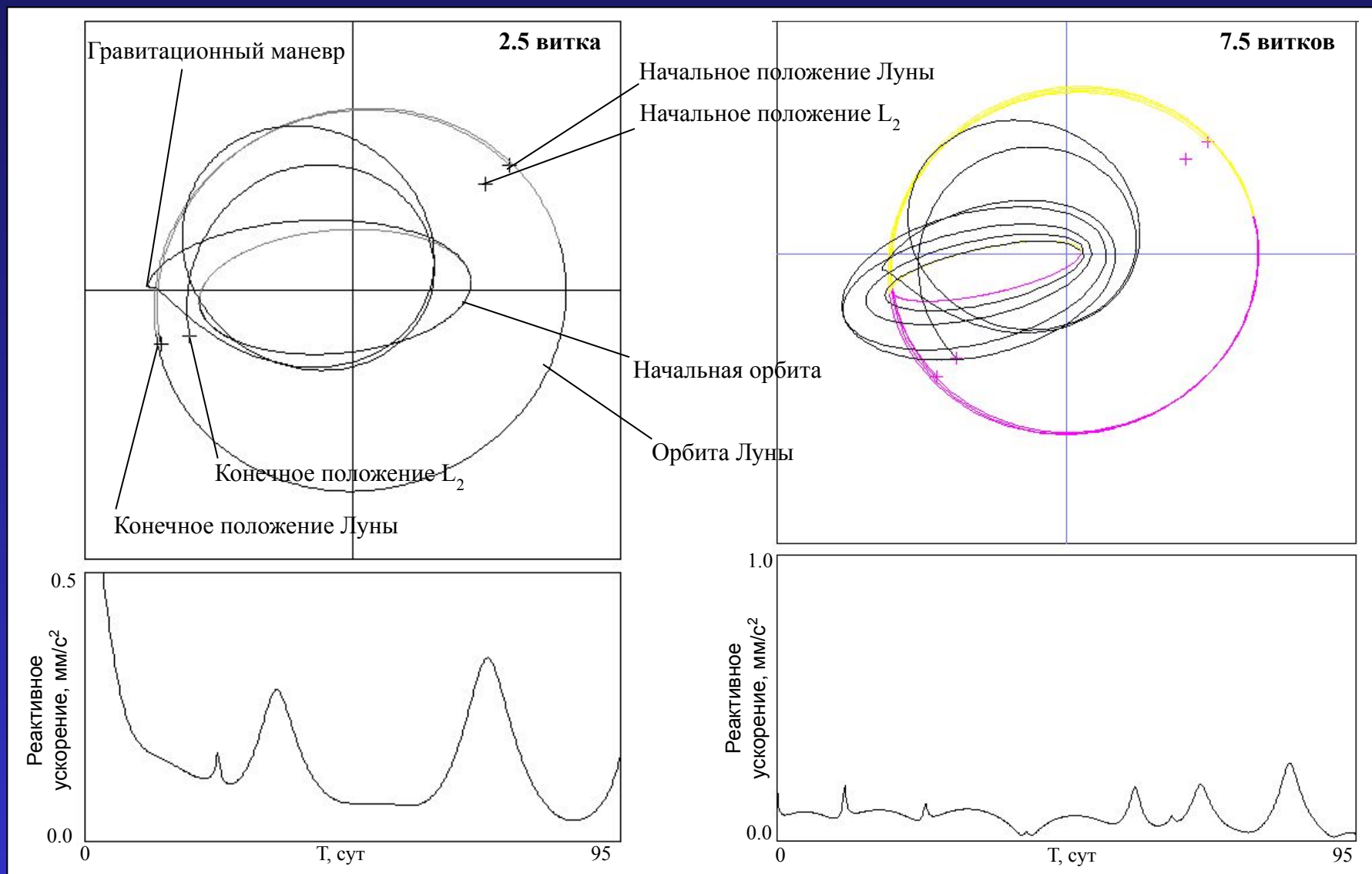
1. Характерная длительность пребывания КА, движущегося по гиперболической траектории, в сфере действия Луны: ~1 сутки.
2. Характерное изменение скорости КА за счет работы двигателей малой тяги при реактивном ускорении $\sim 0.1 \text{ мм/с}^2$: $\sim 10 \text{ м/с}$.
3. Ширина горловины в окрестности точки либрации, соответствующей избытку относительной скорости КА на сфере Хилла в 10 м/с : $\sim 60000 \text{ км}$.

Для реализации захвата КА в область спутниковых движений с использованием двигателей малой тяги его скорость относительно точки либрации при пересечении сферы Хилла не должна превышать $\sim 10 \text{ м/с}$, а удаление от точки либрации не должно превышать $\sim 30000 \text{ км}$.

ТРАЕКТОРИИ СОПРОВОЖДЕНИЯ L_2

Модельная задача перелета с круговой околоземной орбиты
(высота 250000 км, наклонение 63° , долгота восходящего узла 12° ,
аргумент широты 0° ; дата старта 5 января 2001 г.)



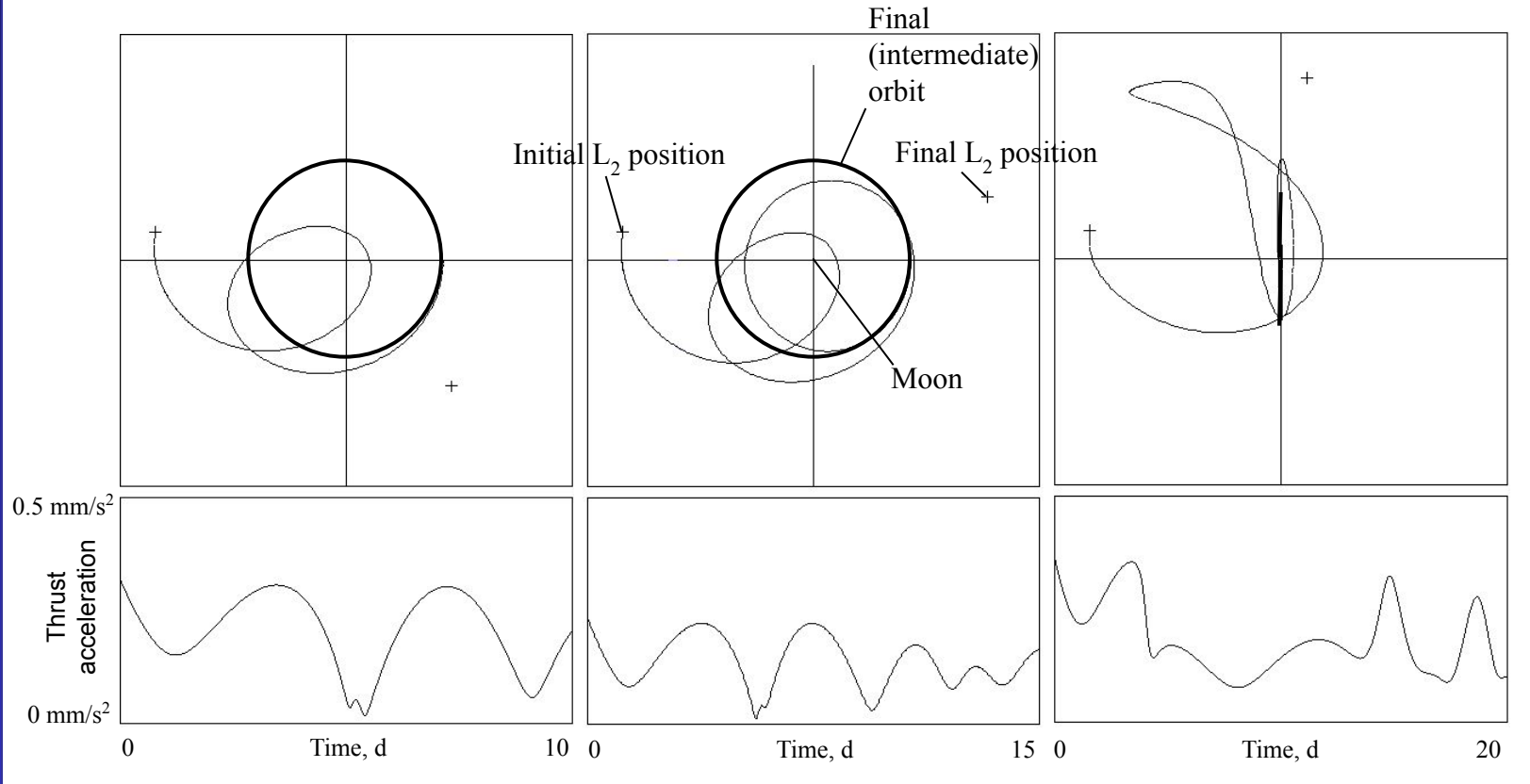
ТРАЕКТОРИИ СОПРОВОЖДЕНИЯ L_2 С ГРАВИТАЦИОННЫМ МАНЕВРОМ У ЛУНЫ

ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА ИЗ L_2 НА КРУГОВУЮ ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

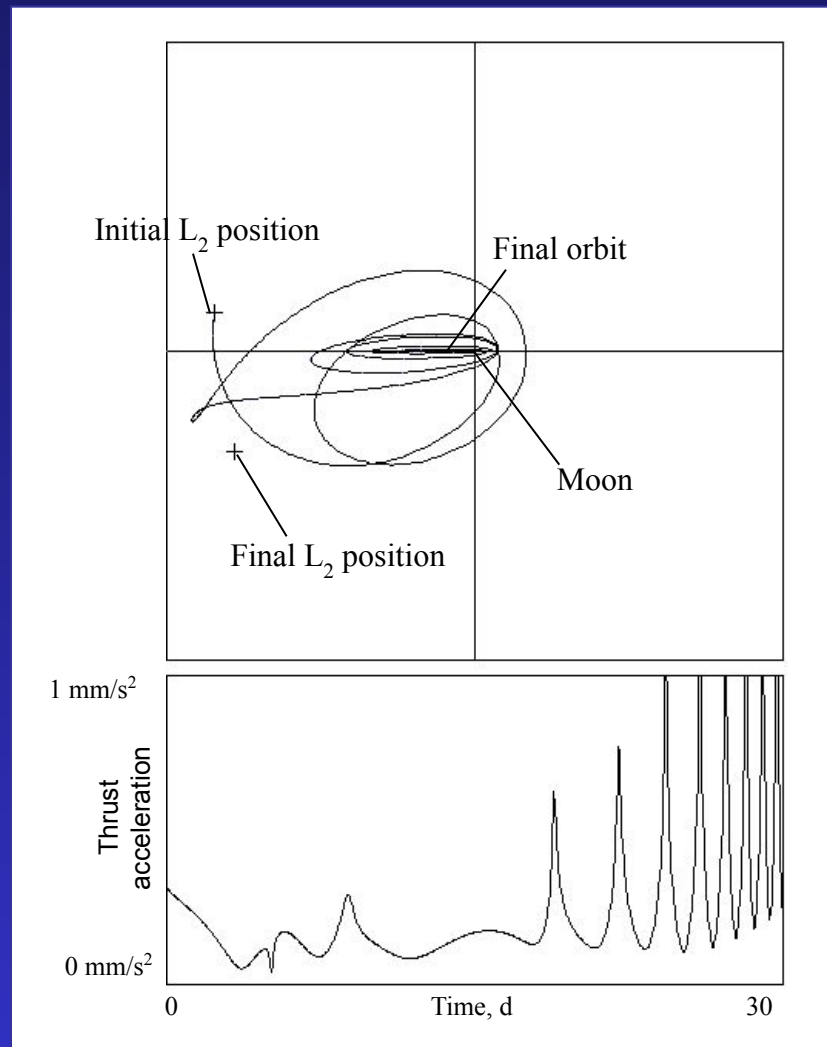
Final orbit: $r = 30000$ km, $i = 0^\circ$.
Transfer: 1.5 orbits, $T = 10$ days

Final orbit: $r = 30000$ km, $i = 0^\circ$.
Transfer: 2.5 orbits, $T = 15$ days

Final orbit: $r = 20000$ km, $i = 90^\circ$.
Transfer: 2.5 orbits, $T = 20$ days

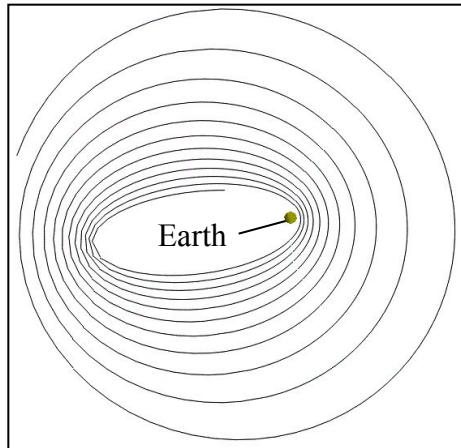


ТРАЕКТОРИЯ ПЕРЕЛЕТА ИЗ L_2 НА ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ ($i=90^\circ$, $h_p=300$ км, $h_a=10000$ км, 10.5 витков)

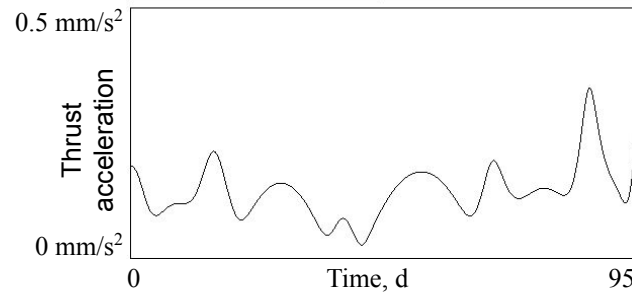
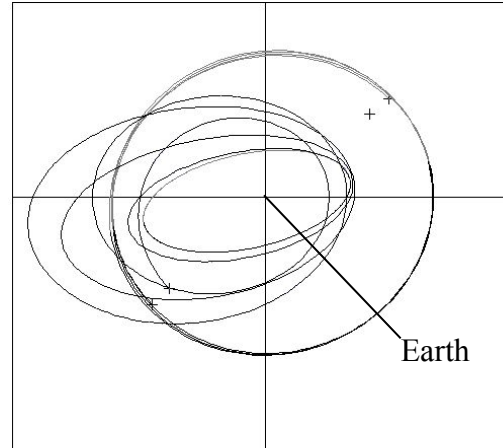


УЧАСТКИ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОКОЛОЗЕМНОЙ ОРБИТЫ НА КРУГОВУЮ ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

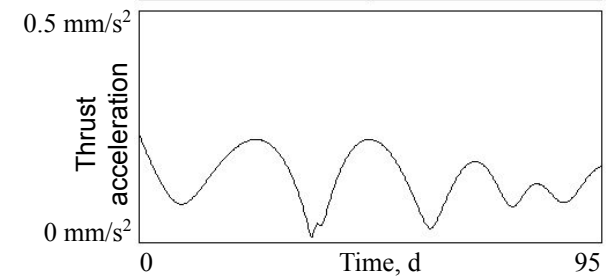
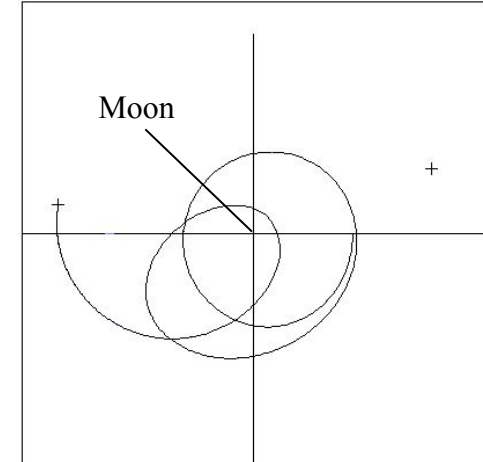
Геоцентрическая
спиральная раскрутка



Траектория сопровождения L_2



Перелет из L_2 на круговую
экваториальную 30000-км
орбиту вокруг Луны



4. ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ

Уравнения орбитального движения КА записываются в равноденственных элементах, не имеющих особенностей при нулевом наклонении и эксцентриситете. Задача оптимального управления редуцируется к двухточечной краевой задаче применением принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Эта краевая задача, в свою очередь, формально редуцируется к задаче Коши с помощью метода продолжения по параметру. Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений оптимального движения (П-систему) и вычислить частные производные от конечного фазового вектора П-системы по начальным значениям сопряженных переменных.

При численном интегрировании П-системы ее правые части численно осредняются по истинной долготе КА. Частные производные от конечного фазового вектора П-системы по начальным значениям сопряженных переменных определяются по конечно-разностным соотношениям.

В результате первого интегрирования П-системы формируется вектор невязок решения краевой задачи. Для определения матрицы чувствительности с помощью конечных разностей требуется 6 дополнительных интегрирований П-системы. В результате, после решения системы линейных алгебраических уравнений формируется вектор правых частей системы дифференциальных уравнений метода продолжения.

Система дифференциальных уравнений метода продолжения численно интегрируется по параметру продолжения от 0 до 1, в результате чего определяется оптимальное решение.

4.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Компоненты реактивного ускорения в орбитальной системе координат:

$$a_\tau = \delta \frac{P}{m} \cos \vartheta \cos \psi \quad a_r = \delta \frac{P}{m} \sin \vartheta \cos \psi \quad a_n = \delta \frac{P}{m} \sin \psi$$

δ - функция выключения двигателя, P - реактивная тяга, m - масса КА, ϑ - тангаж, ψ - рысканье

Система равноденственных орбитальных элементов:

$$h = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \quad e_x = e \cos(\Omega + \omega) \quad e_y = e \sin(\Omega + \omega) \quad i_x = \tan \frac{i}{2} \cos \Omega \quad i_y = \tan \frac{i}{2} \sin \Omega \quad F = \nu + \omega + \Omega$$

μ - гравитационный параметр центрального тела; $p, e, \omega, \nu, i, \Omega$ - классические кеплеровские элементы.

Уравнения
движения

в равноденственных
элементах:

$$\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F$$

$$\eta = i_x \sin F - i_y \cos F$$

$$\varphi = 1 + i_x^2 + i_y^2$$

w - скорость истечения

$$\frac{dh}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \cdot h \cos \vartheta \cos \psi,$$

$$\frac{de_x}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \left\{ \xi \sin F \sin \vartheta \cos \psi + [(\xi + 1) \cos F + e_x] \cos \vartheta \cos \psi - e_y \eta \sin \psi \right\}$$

$$\frac{de_y}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \left\{ -\xi \cos F \sin \vartheta \cos \psi + [(\xi + 1) \sin F + e_x] \cos \vartheta \cos \psi + e_x \eta \sin \psi \right\}$$

$$\frac{di_x}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \cdot \frac{1}{2} \varphi \cos F \sin \psi,$$

$$\frac{di_y}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \cdot \frac{1}{2} \varphi \sin F \sin \psi,$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\xi^2}{h^3} + \delta \frac{P h}{m \xi} \cdot \xi \eta \sin \psi,$$

$$\frac{dm}{dt} = -\delta \frac{P}{w},$$

Краевые условия: $t = 0: h = h_0, e_x = e_{x0}, e_y = e_{y0}, i_x = i_{x0}, i_y = i_{y0}, m = m_0 \quad t = T: h = h_k, e_x = e_{xk}, e_y = e_{yk}, i_x = i_{xk}, i_y = i_{yk}$

4.2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Функционал:

$$J = \int_0^T \delta \frac{P}{w} dt \rightarrow \min$$

Гамильтониан:

$$H = -\delta \frac{P}{w} (1 + p_m) + \frac{\xi^2}{h^3} p_F + \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} (A_t \cos \vartheta \cos \psi + A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_n \sin \psi)$$

$$A_t = h p_h + [(\xi + 1) \cos F + e_x] p_{ex} + [(\xi + 1) \sin F + e_y] p_{ey}$$

$$A_r = \xi (\sin F \cdot p_{ex} - \cos F \cdot p_{ey})$$

$$A_n = \eta (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey}) + \frac{1}{2} \varphi (\cos F \cdot p_{ix} + \sin F \cdot p_{iy}) + \xi \eta \cdot p_F$$

Оптимальное управление:

$$\cos \vartheta = \frac{A_r}{\sqrt{A_t^2 + A_r^2}} \quad \cos \psi = \frac{\sqrt{A_t^2 + A_r^2}}{\sqrt{A_t^2 + A_r^2 + A_n^2}} \quad \delta = \begin{cases} 1, \psi_s > 0 \\ 0, \psi_s \leq 0 \end{cases} \quad \text{или } \delta \equiv 1$$

$$\sin \vartheta = \frac{A_t}{\sqrt{A_t^2 + A_r^2}} \quad \sin \psi = \frac{A_n}{\sqrt{A_t^2 + A_r^2 + A_n^2}} \quad \psi_s = -\frac{1 + p_m}{w} + \frac{h}{m \xi} (A_t^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2}$$

Оптимальный гамильтониан:

$$H = -\delta \frac{P}{w} (1 + p_m) + \frac{\xi^2}{h^3} p_F + \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} (A_t^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2}$$

Осредненный функционал не зависит от F , поэтому после осреднения $\frac{dp_F}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial F} = 0$. Так как рассматриваются межорбитальные перелеты, конечное значение $F=F(T)$ не фиксировано $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} p_F(T) = 0$ (условие трансверсальности)

$\Rightarrow p_F \equiv 0 \Rightarrow$ в гамильтониане можно опустить члены с $p_F \Rightarrow H = -\delta \frac{P}{w} (1 + p_m) + \delta \frac{P}{m} (\tilde{A}_t^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2)^{1/2}$ где

$$\tilde{A}_t = \frac{h}{\xi} A_t, \tilde{A}_r = \frac{h}{\xi} A_r, \tilde{A}_n = \frac{h}{\xi} A_n$$

4.3. УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ (П-СИСТЕМА)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \delta \frac{P}{m} (\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2)^{-1/2} \left(\tilde{A}_\tau \frac{\partial \tilde{A}_\tau}{\partial \mathbf{p}} + \tilde{A}_r \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial \mathbf{p}} + \tilde{A}_n \frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial \mathbf{p}} \right), \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_m} = -\delta \frac{P}{m}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\delta \frac{P}{m} (\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2)^{-1/2} \left(\tilde{A}_\tau \frac{\partial \tilde{A}_\tau}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{A}_r \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{A}_n \frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial \mathbf{x}} \right), \\ \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial m} = \delta \frac{P}{m^2} (\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2)^{1/2}, \end{aligned} \right\}$$

где $\mathbf{x} = (h, e_x, e_y, i_x, i_y)^T$, $\mathbf{p} = (p_h, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y})^T$ - фазовый и сопряженный векторы,

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial \mathbf{p}} = \frac{h}{\xi} \frac{\partial A_i}{\partial \mathbf{p}}, i = \tau, r, n.$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial h} = \frac{1}{\xi} \left(A_i + h \frac{\partial A_i}{\partial h} \right); \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial e_x} = \frac{h}{\xi} \left(-\frac{\cos F}{\xi} A_i + \frac{\partial A_i}{\partial e_x} \right); \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial e_y} = \frac{h}{\xi} \left(-\frac{\sin F}{\xi} A_i + \frac{\partial A_i}{\partial e_y} \right);$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial i_x} = \frac{h}{\xi} \frac{\partial A_i}{\partial i_x}; \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial i_y} = \frac{h}{\xi} \frac{\partial A_i}{\partial i_y}; \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial F} = \frac{h}{\xi} \left[\frac{e_x \sin F - e_y \cos F}{\xi} A_i + \frac{\partial A_i}{\partial F} \right], i = \tau, r, n.$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial p_h} = h; \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{ex}} = [(\xi + 1)\cos F + e_x]; \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{ey}} = [(\xi + 1)\sin F + e_y]; \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{ix}} = \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{iy}} = \frac{\partial A_\tau}{\partial p_F} = 0;$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial p_h} = 0; \frac{\partial A_r}{\partial p_{ex}} = \xi \sin F; \frac{\partial A_r}{\partial p_{ey}} = -\xi \cos F; \frac{\partial A_r}{\partial p_{ix}} = \frac{\partial A_r}{\partial p_{iy}} = \frac{\partial A_r}{\partial p_F} = 0;$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial p_h} = 0; \frac{\partial A_n}{\partial p_{ex}} = -\eta e_y; \frac{\partial A_n}{\partial p_{ey}} = \eta e_x; \frac{\partial A_n}{\partial p_{ix}} = \frac{1}{2} \varphi \cos F; \frac{\partial A_n}{\partial p_{iy}} = \frac{1}{2} \varphi \sin F; \frac{\partial A_n}{\partial p_F} = \xi \eta.$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial h} = p_h; \frac{\partial A_\tau}{\partial e_x} = (\cos^2 F + 1)p_{ex} + \cos F \sin F \cdot p_{ey}; \frac{\partial A_\tau}{\partial e_y} = (\sin^2 F + 1)p_{ey} + \cos F \sin F \cdot p_{ex};$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial i_x} = \frac{\partial A_\tau}{\partial i_y} = 0;$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial F} = [(e_y \cos F - e_x \sin F)\cos F - (\xi + 1)\sin F]p_{ex} + [(e_y \cos F - e_x \sin F)\sin F + (\xi + 1)\cos F]p_{ey};$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial h} = 0; \frac{\partial A_r}{\partial e_x} = \cos F \cdot (p_{ex} \sin F - p_{ey} \cos F); \frac{\partial A_r}{\partial e_y} = \sin F \cdot (p_{ex} \sin F - p_{ey} \cos F);$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial i_x} = \frac{\partial A_r}{\partial i_y} = 0; \frac{\partial A_r}{\partial F} = (-e_x \sin F + e_y \cos F)(p_{ex} \sin F - p_{ey} \cos F) + \xi(p_{ex} \cos F + p_{ey} \sin F);$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial h} = 0; \frac{\partial A_n}{\partial e_x} = \eta p_{ey} + \eta p_F \cos F; \frac{\partial A_n}{\partial e_y} = -\eta p_{ex} + \eta p_F \sin F; \frac{\partial A_n}{\partial i_x} = \frac{\partial A_n}{\partial i_y} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_n}{\partial F} &= (i_x \cos F + i_y \sin F)(e_x p_{ey} - e_y p_{ex}) + \frac{1}{2} \varphi (p_{iy} \cos F - p_{ix} \sin F) + \\ &+ (e_y \cos F - e_x \sin F) \eta p_F + (i_x \cos F + i_y \sin F) \eta p_F. \end{aligned}$$

4.4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В задаче с фиксированным временем T уравнение невязок краевой задачи имеет вид:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} h(T) - h_k \\ e_x(T) - e_{xk} \\ e_y(T) - e_{yk} \\ i_x(T) - i_{xk} \\ i_y(T) - i_{yk} \\ p_m(T) \end{pmatrix} = 0$$

Это уравнение должно быть решено относительно неизвестных начальных значений сопряженных переменных $\mathbf{p}(0), p_m(0)$.

В задаче оптимального быстродействия $\delta \equiv 1$, а уравнения для m и p_m можно не рассматривать, заменив массу на выражение $m = m_0 - (P/w) t$. Уравнение невязок для задачи оптимального быстродействия имеет вид:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} h(T) - h_k \\ e_x(T) - e_{xk} \\ e_y(T) - e_{yk} \\ i_x(T) - i_{xk} \\ i_y(T) - i_{yk} \\ \partial H(T) / \partial T \end{pmatrix} = 0$$

Это уравнение должно быть решено относительно неизвестных начальных значений сопряженных переменных $\mathbf{p}(0)$ и времени перелета T .

Уравнение метода продолжения: $\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = - \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1} \mathbf{b}$ где $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} p_h \\ p_{ex} \\ p_{ey} \\ p_{ix} \\ p_{iy} \\ T \end{pmatrix}$ (быстродействие) или $\mathbf{z} = \mathbf{p}$ (фиксированное время);

$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$ - вектор невязок при начальном значении \mathbf{z} (при $\tau=0$). Краевая задача решается интегрированием дифференциальных уравнений метода продолжения по τ от 0 до 1. Частные производные от вектора невязок \mathbf{f} по параметрам краевой задачи \mathbf{z} и решение системы линейных уравнений для определения правых частей этих дифференциальных уравнений определяются численно.

4.5. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Краевая задача решается методом продолжения по параметру.

Для вычисления невязок \mathbf{f} интегрируются осредненные по истинной долготе F уравнения оптимального движения. Эти уравнения имеют особенность при $\mathbf{p}=0$, поэтому использовать нулевое начальное приближение для вектора сопряженных переменных нельзя.

В задаче оптимального быстрогодействия при использовании метода продолжения по параметру в качестве начального приближения для $\mathbf{p}(0)$ выбиралось $p_h=1$, если большая полуось конечной орбиты превышает большую полуось начальной орбиты и $p_h=-1$ в противном случае. Остальные компоненты вектора \mathbf{p} выбирались равными 0, а начальное приближение для безразмерного времени перелета $T|_{\tau=0}=1$ (в единицах начальной орбиты). С таким начальным приближением удалось решить задачи об оптимальном по быстродействию перелете с высокоэллиптической промежуточной орбиты (ПО) на ГСО при наклонении ПО $0^\circ-75^\circ$ и высоте апогея ПО 10000-120000 км. Если высота апогея ПО находилась вне этого диапазона, для решения задачи в качестве начального приближения приходилось использовать предварительно полученное решение задачи перелета с ПО с достаточно близкой высотой апогея.

Осреднение уравнений оптимального движения по истинной долготе F осуществляется численно в процессе интегрирования этих уравнений.

Вычисление частных производных от функции невязок \mathbf{f} по параметрам краевой задачи $\mathbf{p}(0)$, T , необходимых для применения метода продолжения, производится также численно по конечно-разностным формулам первого порядка.

Таким образом, для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения используется численное интегрирование численно осредненных уравнений оптимального движения и полученные численным дифференцированием частные производные от функции невязок краевой задачи по ее параметрам.

4.6. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В НЕОСРЕДНЕННОМ ДВИЖЕНИИ

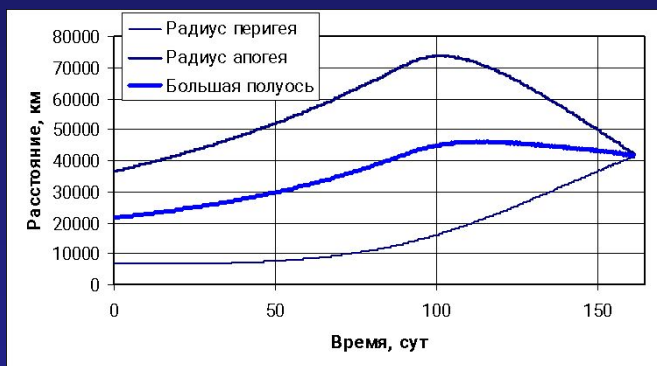
Малый уровень реактивного ускорения (по сравнению с гравитационным) обуславливает близость эволюции орбитальных элементов в осредненном и неосредненном движении в эллиптическом случае.

Для проверки применимости найденного для осредненных уравнений движения оптимального управления, найденные оптимальные начальные значения параметров краевой задачи подставлялись в неосредненные уравнения оптимального движения, и эти уравнения численно интегрировались. Начальное значение истинной долготы F выбиралось достаточно произвольно (обычно соответствующее перигею или апогею начальной орбиты), а начальное значение сопряженной к ней переменной p_F принималось равной 0 (см. замечание выше).

В результате этого численного интегрирования определялись фактические невязки на правом конце траектории и программа оптимального управления. Для перелетов на ГСО с высокоэллиптических промежуточных орбит при уровне реактивного ускорения 0.1-0.5 мм/с² разница в невязках при решении осредненной и неосредненной задач имела величину порядка 0.1%.

Примеры использования оптимального управления, полученного для осредненной задачи к неосредненным уравнениям движения приводятся в следующем разделе.

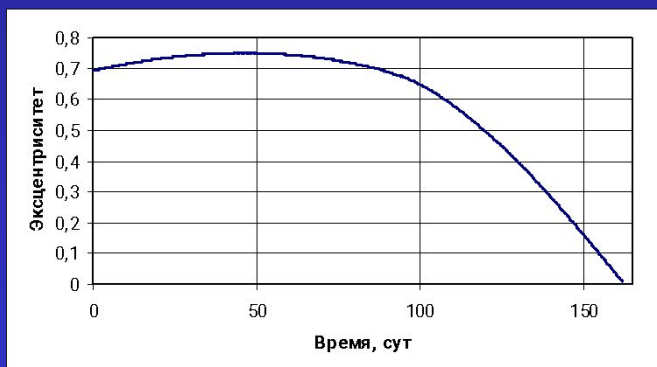
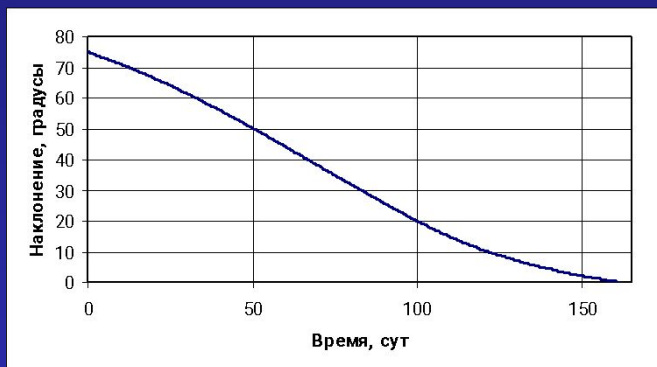
4.7. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТЫ В ОПТИМАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ И ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ (ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ)



Эволюция орбитальных элементов при высоте апогея промежуточной орбиты ниже оптимальной ($h_a = 30000$ км, $i = 75^\circ$)

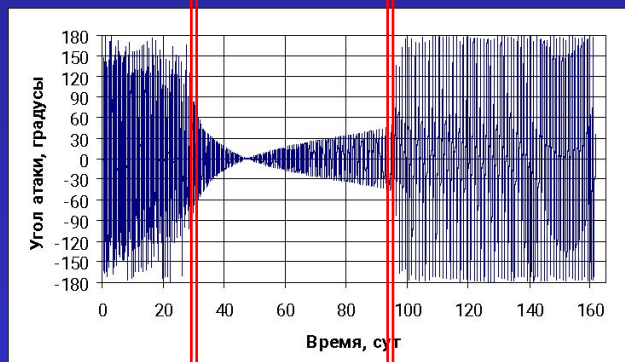
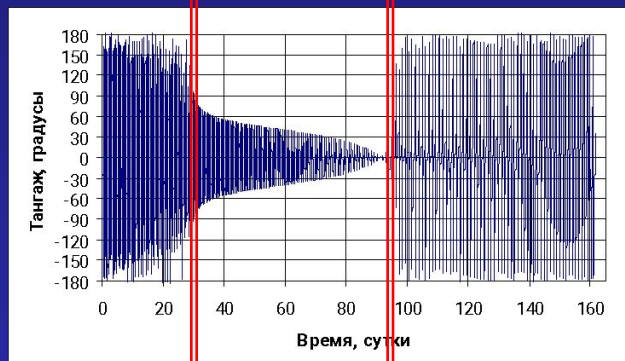
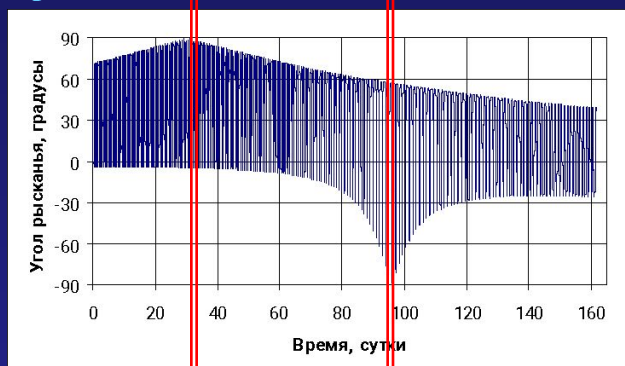
1. Средние за виток значения радиуса апогея, большой полуоси и эксцентриситета имеют максимум.

2. Радиус перигея монотонно возрастает.



разгон-
торможение

разгон

торможение-
разгон

Оптимальное управление вектором тяги при высоте апогея промежуточной орбиты ниже оптимальной ($h_a = 30000$ км, $i = 75^\circ$)

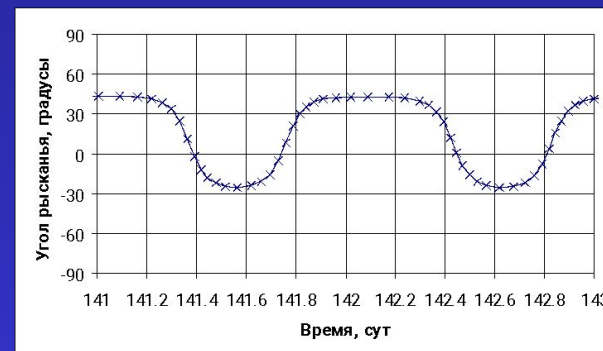
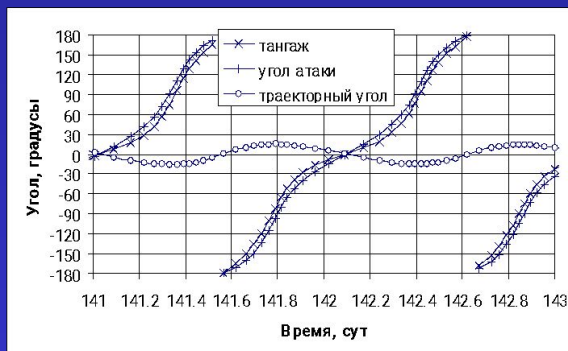
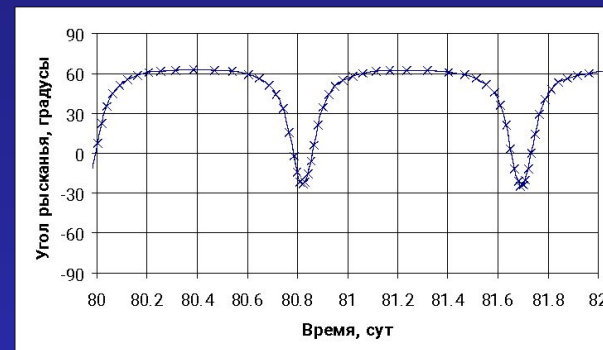
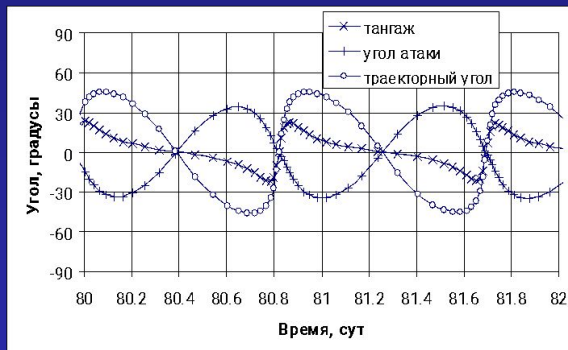
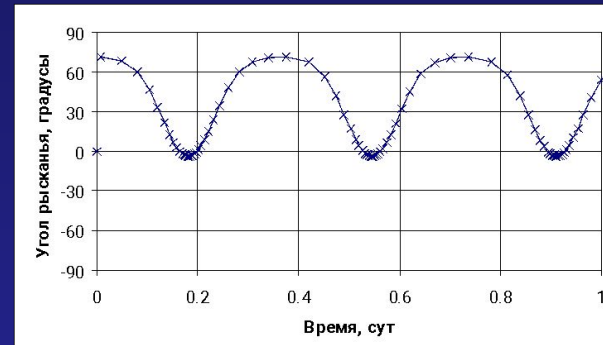
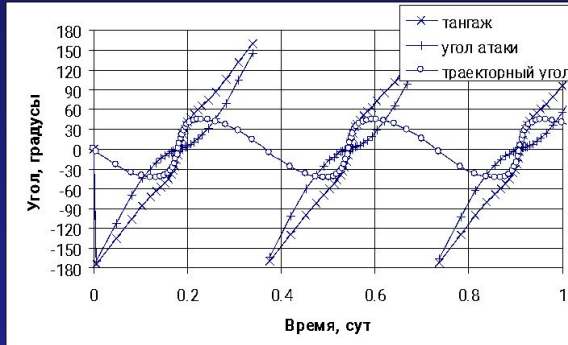
Траектория перелета имеет 3 фазы.

На 1-й фазе осуществляется разгон всюду кроме небольшой дуги орбиты в окрестности апогея (этим частично компенсируется увеличение высоты перигея), а максимальное значение угла рысканья в апогее на витке возрастает с $\sim 70^\circ$ в начале перелета до 90° при достижении максимального эксцентриситета. Максимальный угол рысканья в перигее примерно постоянен и составляет менее 10° .

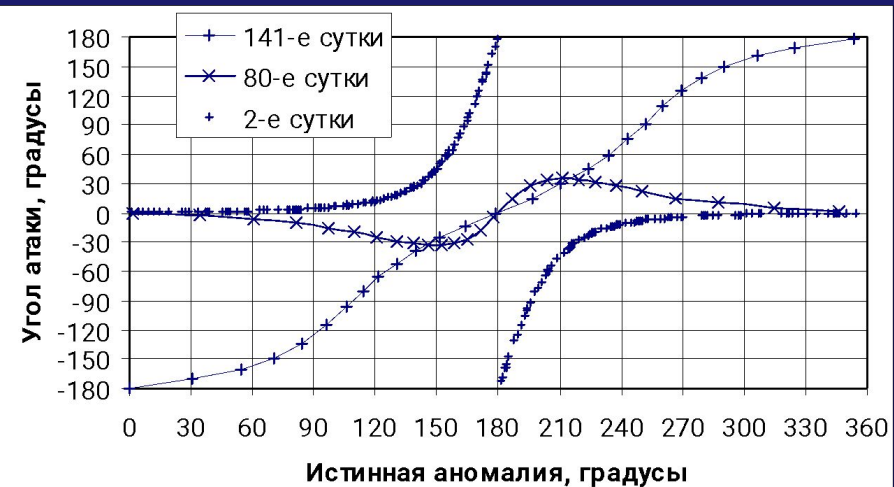
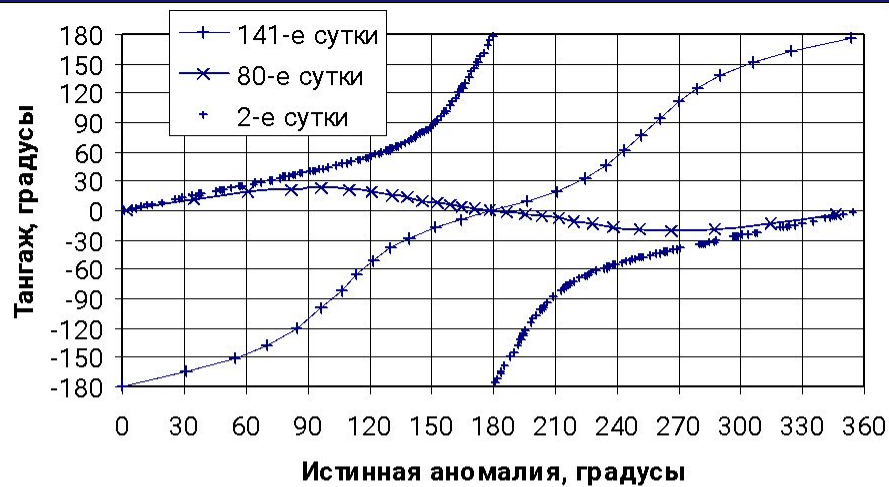
На 2-й фазе происходит разгон на всем витке до достижения максимального значения высоты апогея. Максимальное значение угла рысканья в апогее уменьшается почти линейно по времени от 90° до $\sim 60^\circ$, а в перигее - увеличивается, достигая 90° при достижении максимальной высоты апогея. Угол рысканья в перигее достигает больших значений, чем угол рысканья в апогее, что можно объяснить большей эффективностью подъема высоты перигея на этом участке.

На 3-й фазе происходит разгон в апогее и торможение в перигее, а максимальный угол рысканья на витке снижается до $\sim 40^\circ$ в апогее и до $\sim 25^\circ$ в перигее.

ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРОМ ТЯГИ

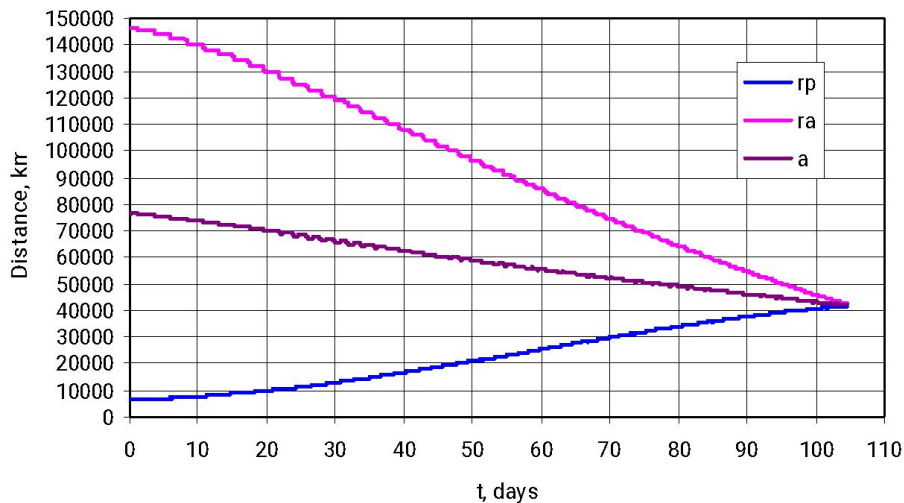


ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРОМ ТЯГИ

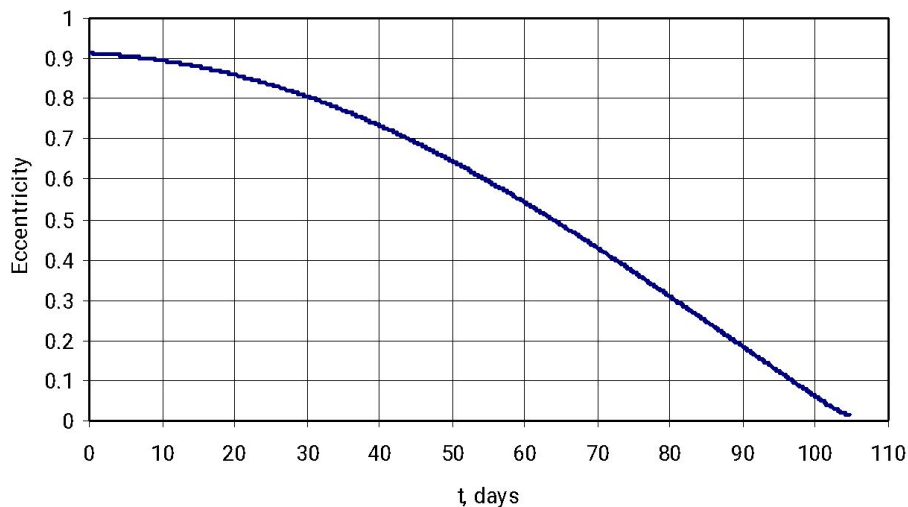


Эволюция орбитальных элементов и управление вектором тяги при оптимальной высоте апогея промежуточной орбиты ($h_a = 140000$ км, $i = 65^\circ$)

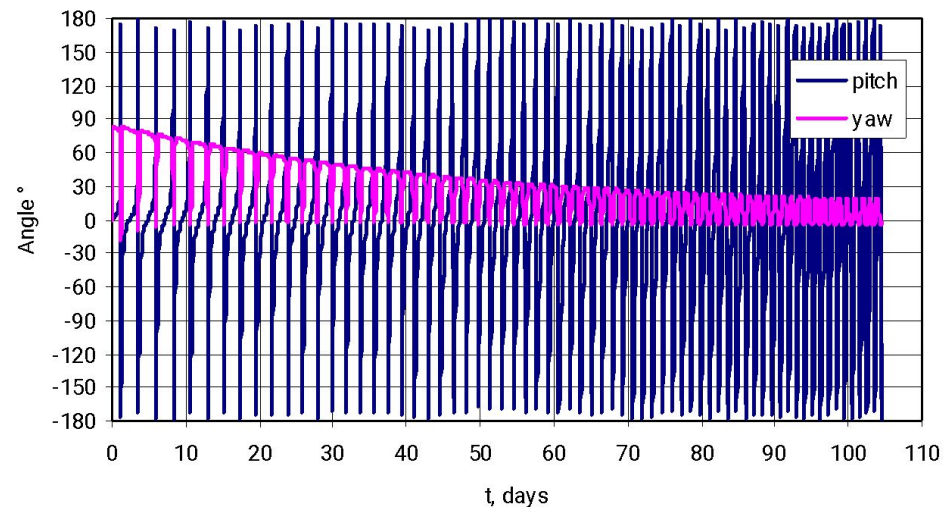
1. Средние за виток значения радиуса апогея, большой полуоси и эксцентриситета монотонно уменьшаются.
2. Средний за виток радиус перигея монотонно растет.
3. Траектория перелета имеет 1 фазу. В апогее происходит разгон, а в перигее - торможение. Максимальный угол рысканья на витке монотонно снижается с 90° до $\sim 30^\circ$.



Радиусы перигея, апогея и большая полуось



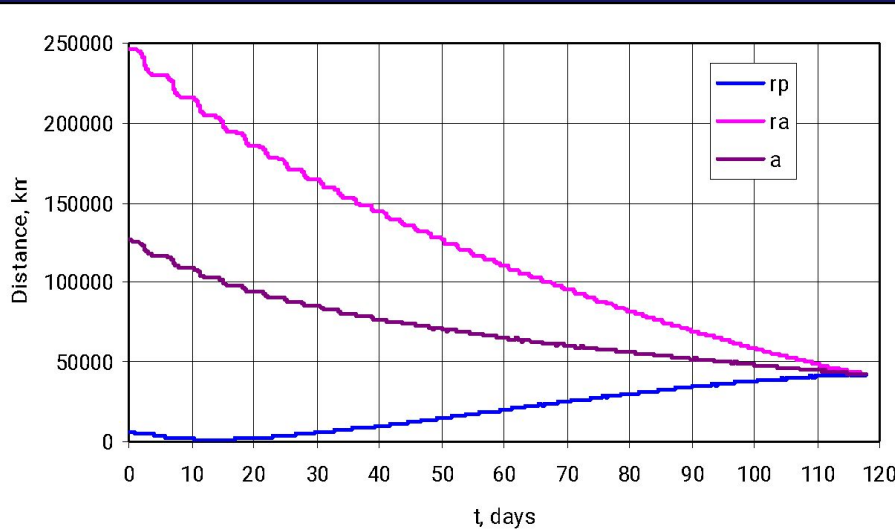
Эксцентриситет



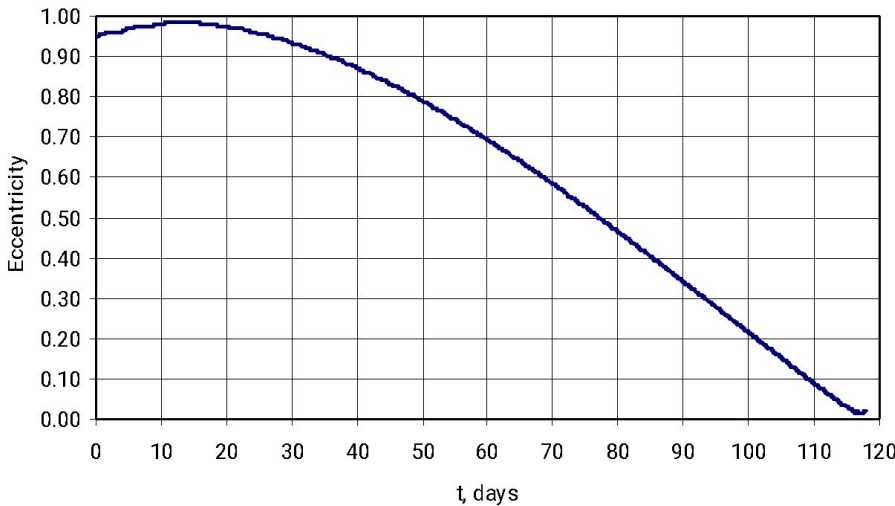
Углы тангажа и рысканья

Эволюция орбитальных элементов и управление вектором тяги при высоте апогея промежуточной орбиты выше оптимальной ($h_a = 240000$ км, $i = 65^\circ$)

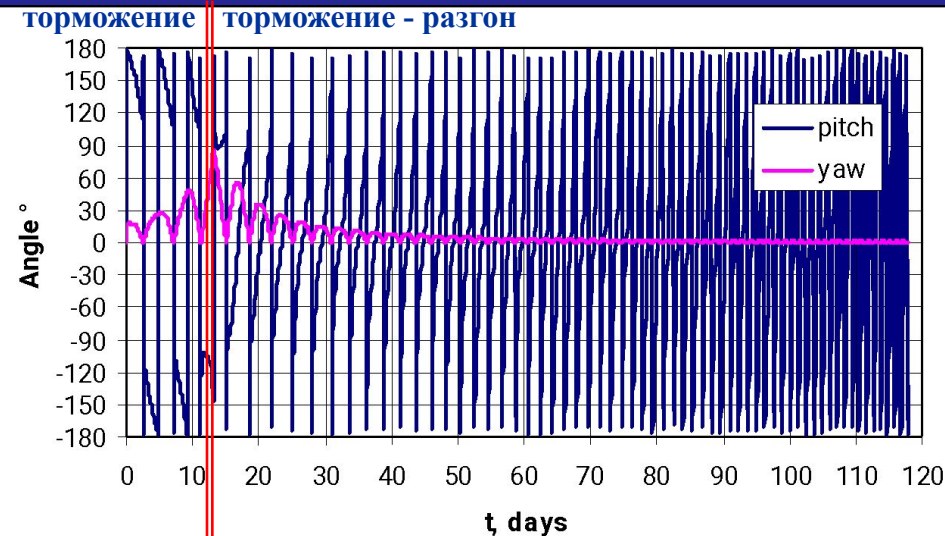
1. Средние за виток значения радиуса апогея и большой полуоси монотонно уменьшаются.
2. В начале перелета радиус перигея уменьшается, а эксцентриситет - растет.
3. Траектория перелета имеет 2 фазы. На 1-й фазе осуществляется торможение на всем витке, а максимальный угол рысканья на витке увеличивается до $\sim 90^\circ$ при достижении максимального эксцентриситета. На 2-й фазе происходит разгон в апогее и торможение в перигее, а максимальный угол рысканья на витке снижается почти до 0.



Радиусы перигея, апогея и большая полуось

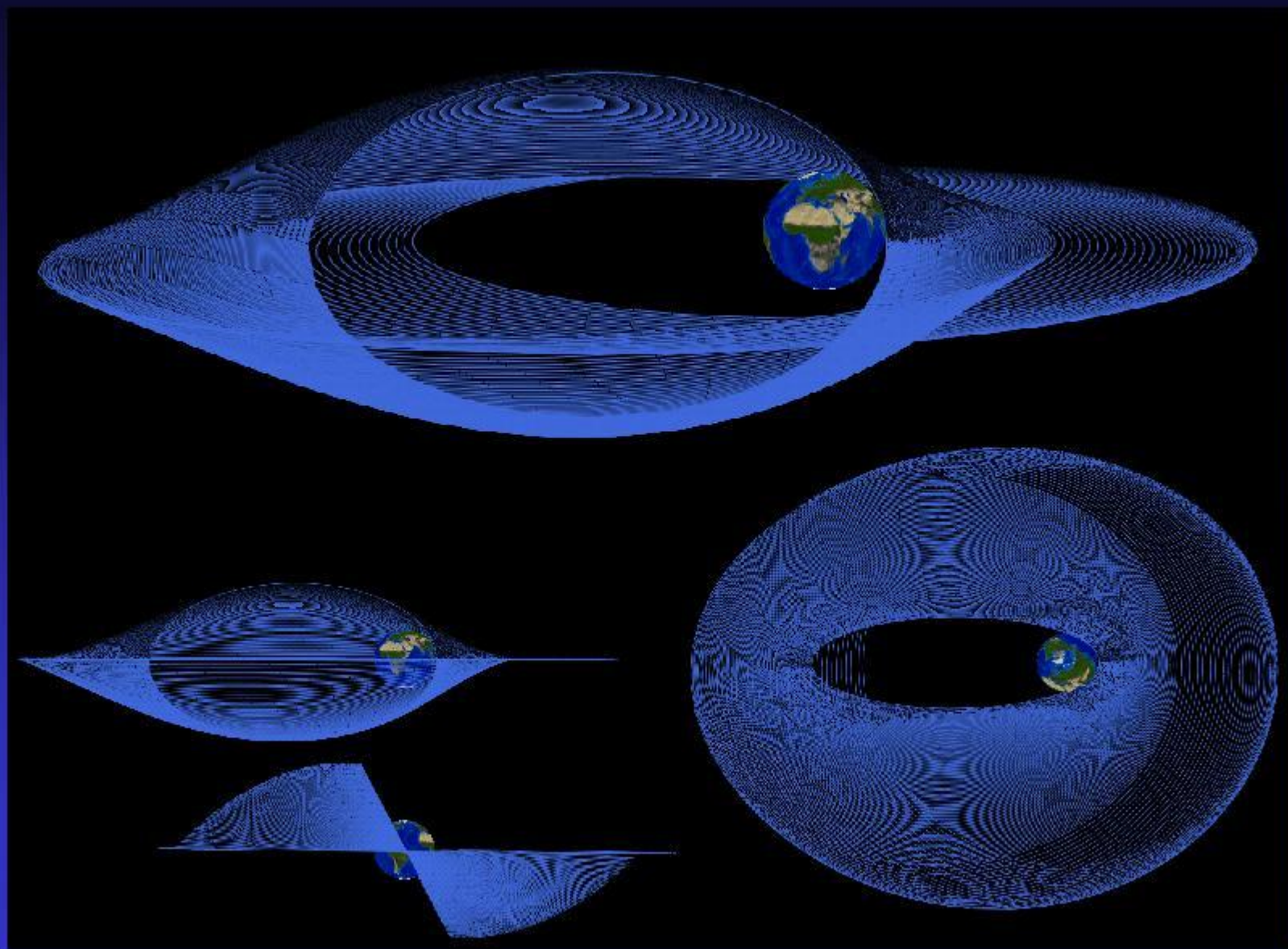


Эксцентриситет



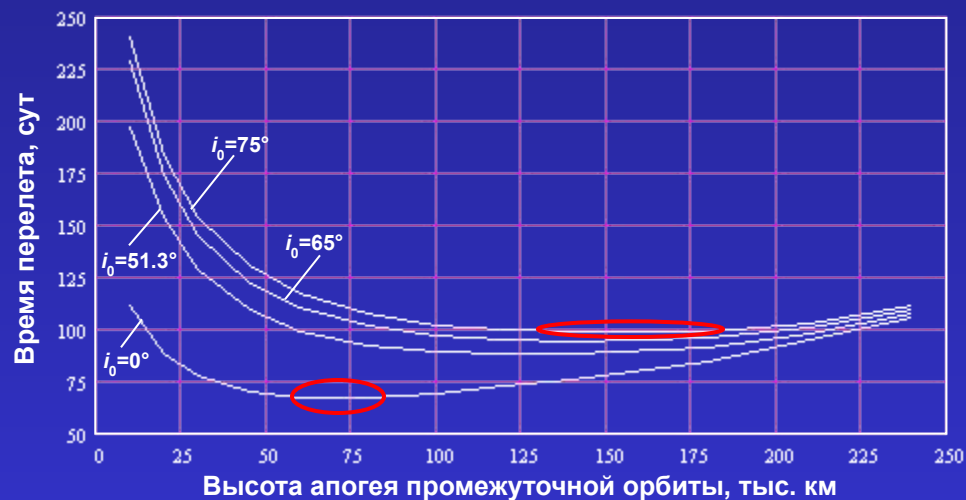
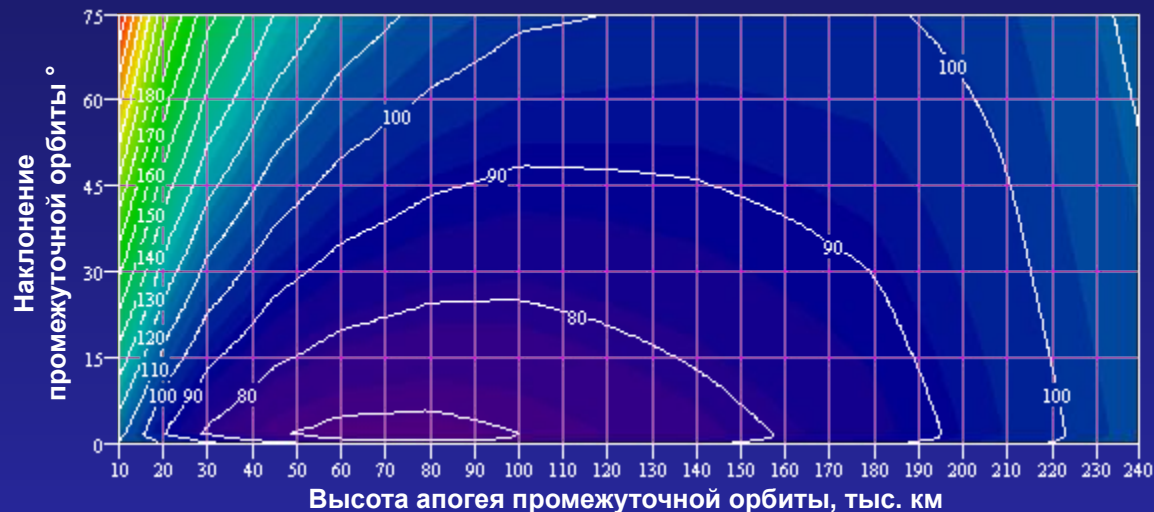
Углы тангажа и рысканья

ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА НА ГСО



4.8. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЕТОВ НА ГСО С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТЫ

Высота перигея промежуточной орбиты 250 км,
 масса КА на ГСО 450 кг, тяга ЭРДУ 0.166 Н, удельный импульс ЭРДУ 1500 с



4.9. ВЫВОДЫ

1. Метод продолжения по параметру можно эффективно использовать для оптимизации многовитковых перелетов с малой тягой, что продемонстрировано на примере оптимизации по быстродействию перелетов с эллиптической промежуточной орбиты на ГСО.
2. В настоящее время не обнаружено каких-либо существенных ограничений на возможность использования разработанного метода в задачах с фиксированным временем и с различными краевыми условиями (межорбитальный перелет, набор заданной орбитальной энергии, разворот плоскости орбиты и т.д.).
3. Не обнаружено каких-либо ограничений на возможность учета внешних возмущающих сил при оптимизации траектории КА разработанным методом. Возмущающие силы, выраженные как через орбитальные элементы, так и через фазовый вектор КА, относительно легко могут быть введены в уравнения разработанного метода так как операции осреднения уравнений движения и вычисления производных от невязок краевой задачи по ее параметрам реализованы в рамках этого метода численно. Для учета возмущающих ускорений в уравнениях движения необходимы выражения для частных производных первого порядка от компонент этих ускорений по орбитальным элементам.
4. Разработанный метод позволил провести исчерпывающий анализ оптимальных по быстродействию перелетов с эллиптической промежуточной орбиты на ГСО, включая анализ влияния параметров промежуточной орбиты и основных проектных параметров КА на характеристики перелета и определение номинальных программ управления вектором тяги электроракетной двигательной установки КА.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный метод продолжения показал высокую эффективность для задачи оптимизации траекторий КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги. Комбинация двух вариантов метода продолжения - базового метода и метода продолжения по гравитационноиу параметру - позволяет быстро и исчерпывающе проводить анализ межпланетных траекторий.

С использованием метода продолжения были оптимизированы траектории КА с малой тягой, оканчивающиеся или начинающиеся в точке либрации L_2 системы Земля-Луна. Эти траектории использовались для построения квазиоптимальных траекторий перелета между орбитами искусственных спутников Земли и Луны.

Специально разработанная версия метода продолжения позволила провести полномасштабный анализ оптимальных по быстродействию пространственных траекторий перелета КА с малой тягой с эллиптической промежуточной орбиты на ГСО.

Таким образом, характеристики метода продолжения делают его полезным и эффективным инструментом анализа траекторий КА с ЭРДУ.