В.Г. Петухов
E-mail: petukhov@mtu-net.ru

Государственный космический
научно-производственный центр
им. М.В. Хруничева

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Представлен единый методический подход к решению различных задач численной оптимизации траекторий КА с малой тягой. Основой этого подхода является формальная редукция краевой задачи принципа максимума к задаче Коши. Такая редукция достигается применением метода продолжения по параметру.

Оптимизация перелетов КА с малой тягой:

Т.М. Энеев, В.А. Егоров, В.В. Белецкий, Г.Б. Ефимов,
М.С. Константинов, Г.Г. Федотов, Ю.А. Захаров,
Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев, В.Н. Лебедев,
В.В. Салмин, С.А. Ишков, В.В. Васильев,
T.N. Edelbaum, F.W. Gobetz, J.P. Marec, N.X. Vinh, K.D. Mease, C.G. Sauer,
C. Kluever, V. Coverstone-Carroll, S.N. Williams, M. Hechler и др.

Метод продолжения:

M. Kubicek, T.Y. Na и др.

Недостатки традиционных численных методов оптимизации

• малая область сходимости;
• вычислительная неустойчивость;
• необходимость подбора начального приближения в условиях отсутствия априорной информации о решении задачи.

Часть этих явлений связана с физической сущностью задачи оптимизации (вопросы устойчивости, существования и ветвления решений). Однако, большинство численных методов вносят свои - методические - ограничения, не имеющие непосредственного отношения к свойствам математической задачи. Так, область сходимости практически всех численных методов существенно меньше области притяжения конкретной экстремальной точки в пространстве неизвестных параметров краевой задачи.

Методические сложности связаны с вычислительной неустойчивостью и с ограниченностью области сходимости численных методов решения, а в некоторых случаях - например при использовании ряда прямых методов оптимизации - с большой размерностью задачи.

Цель разработки метода продолжения

“Регуляризация” численной оптимизации траекторий, то есть устранение, по возможности, методических недостатков численной оптимизации.
В частности, была поставлена и решена задача определения оптимальной траектории при использовании тривиального начального приближения (например, пассивного движения КА по начальной орбите).

Рассматриваемые прикладные задач оптимизации траекторий

1. Оптимизация межпланетных траекторий КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги;

2. Оптимизация траекторий перелета к Луне КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги в рамках ограниченной задачи трех тел;

3. Оптимизация перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами КА с двигательной установкой с постоянной скоростью истечения.

1. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Задача: решить систему нелинейных уравнений

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0} \quad (1)$$

относительно вектора $\mathbf{z}$

Пусть $\mathbf{z}_0$ - начальное приближение решения. Тогда

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}, \quad (2)$$

где $\mathbf{b}$ - вектор невязок при $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$.

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство $\mathbf{z}(\tau)$, где τ - скалярный параметр и рассмотрим уравнение

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1-\tau)\mathbf{b} \quad (3)$$

относительно $\mathbf{z}(\tau)$. Очевидно, что $\mathbf{z}(1)$ - решение уравнения (1). Продифференцируем уравнение (2) по τ и разрешим его относительно $dz/d\tau$:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z})\mathbf{b}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0} \quad (4)$$

Интегрируя уравнения (4) от 0 до 1 получаем решение системы (1).

Уравнение (4) - дифференциальное уравнение метода продолжения (формальная редукция решения системы нелинейных уравнений (1) к задаче Коши).

Применение метода продолжения к краевой задаче оптимального управления

- Уравнения оптимального движения (после применения принципа максимума):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= H_{\mathbf{p}},\\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -H_{\mathbf{x}}\end{aligned}\right\}$$

- Краевые условия (пример):

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k$$

- Вектор параметров краевой задачи и вектор невязок:

$$\mathbf{z} = \mathbf{p}(0), \mathbf{f} = \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_k$$

- Матрица чувствительности:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{z}}$$

- Совместная система о.д.у. оптимального движения и уравнений в вариациях для вычисления вектора невязок и матрицы чувствительности:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= H_{\mathbf{p}},\\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -H_{\mathbf{x}},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}}\right) &= H_{\mathbf{px}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + H_{\mathbf{pp}}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}}\right) &= -H_{\mathbf{xx}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} - H_{\mathbf{xp}}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}}\end{aligned}\right\}$$

- Расширенные начальные условия:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} = 0, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{I}$$

Схема решения задачи оптимизации траектории КА с малой тягой методом продолжения по параметру

Редукция задачи оптимального управления к краевой задаче применением принципа максимума Л.С. Понтрягина

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ

Начальное приближение $\mathbf{z}_0$

Вычисление вектора начальных невязок **b** с помощью интегрирования системы о.д.у. оптимального движения при заданном начальном приближении вектора параметров краевой задачи $\mathbf{z}_0$

Интегрирование системы о.д.у. метода продолжения

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z})\mathbf{b}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

по τ от 0 до 1

1-й вариант вычисления правых частей о.д.у. метода продолжения

Совместное интегрирование систем о.д.у. оптимального движения и уравнений в вариациях при текущем значении **z**(τ) для определения текущих значений вектора невязок **f**(**z**,τ) и матрицы чувствительности $\mathbf{f}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z},\tau)$

2-й вариант вычисления правых частей о.д.у. метода продолжения

Интегрирование систем о.д.у. оптимального движения при текущем значении **z**(τ) для определения текущих значений вектора невязок **f**(**z**,τ) и при варьированных значениях **z**(τ) для конечно-разностного вычисления $\mathbf{f}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z},\tau)$

Решение **z**(1)

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ

КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

2.1. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Функционал: $\frac{1}{2}\int_0^T a^2 dt$ (постоянная мощность, ЯЭРДУ)

$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{a^2}{N(x,t)} dt$ (переменная мощность, СЭРДУ)

Уравнения движения: $d^2\mathbf{x}/dt^2=\Omega_x+\mathbf{a}$

Начальные условия: $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0(t_0)$, $\mathbf{v}(0)=\mathbf{v}_0(t_0)+V_\infty \mathbf{e}_\infty$

Конечные условия

1) сопровождение: $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}_k(t_0+T)$, $\mathbf{v}(T)=\mathbf{v}_k(t_0+T)$

2) пролет: $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}_k(t_0+T)$

где x, v - векторы положения и скорости КА, Ω - силовая функция гравитационного поля, a - вектор реактивного ускорения, x_0, v_0 - векторы положения и скорости планеты отправления, x_k, v_k - векторы положения и скорости планеты прибытия, V_∞ - гиперболический избыток скорости КА у планеты отправления, $\mathbf{e}_\infty$ -единичный вектор ориенации гиперболического избытка V_∞, $N(\mathbf{x},t)$ - отношение текущей реактивной мощности к начальной.

2.2. УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ (СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ)

- Гамильтониан:

$$H = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} + \mathbf{p}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{p}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}}\Omega_{\mathrm{x}} + \mathbf{p}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$$

- Оптимальное управление:

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_{\mathrm{v}}$$

- Оптимальный гамильтониан:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{\mathrm{v}} + \mathbf{p}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{p}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}}\Omega_{\mathrm{x}}$$

- Уравнения оптимального движения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} &= \Omega_{\mathrm{x}} + \mathbf{p}_{\mathrm{v}}, \\ \frac{d^2\mathbf{p}_{\mathrm{v}}}{dt^2} &= \Omega_{\mathrm{xx}}\mathbf{p}_{\mathrm{v}}. \end{aligned}\right\}$$

- Вектор невязок:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T;\mathbf{a}_0,\dot{\mathbf{a}}_0) - \mathbf{x}_{\mathrm{k}} \\ \mathbf{v}(T;\mathbf{a}_0,\dot{\mathbf{a}}_0) - \mathbf{v}_{\mathrm{k}} \end{pmatrix}$$ (сопровождение)

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T;\mathbf{a}_0,\dot{\mathbf{a}}_0) - \mathbf{x}_{\mathrm{k}} \\ \mathbf{p}_{\mathrm{v}}(T;\mathbf{a}_0,\dot{\mathbf{a}}_0) \end{pmatrix}$$ (пролет)

- Вектор параметров краевой задачи и вектор начальных невязок:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \dot{\mathbf{a}}_0 \end{pmatrix}: \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 \qquad \mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}$$

2.3. УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ

- Погружение краевой задачи в однопараметрическое семейство:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1-\tau)\mathbf{b}$$

- Начальное значение вектора параметров краевой задачи и ее решение:

$$\mathbf{z}\big|_{\tau=0} = \mathbf{z_0}, \quad \mathbf{z}\big|_{\tau=1} = \tilde{\mathbf{z}}$$

- Дифференциальное уравнение метода продолжения:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}_\mathbf{z}^{-1}(\mathbf{z})\mathbf{b}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z_0}$$

- Система дифференциальных уравнений для определения правой части уравнения метода продолжения и расширенные начальные условия:

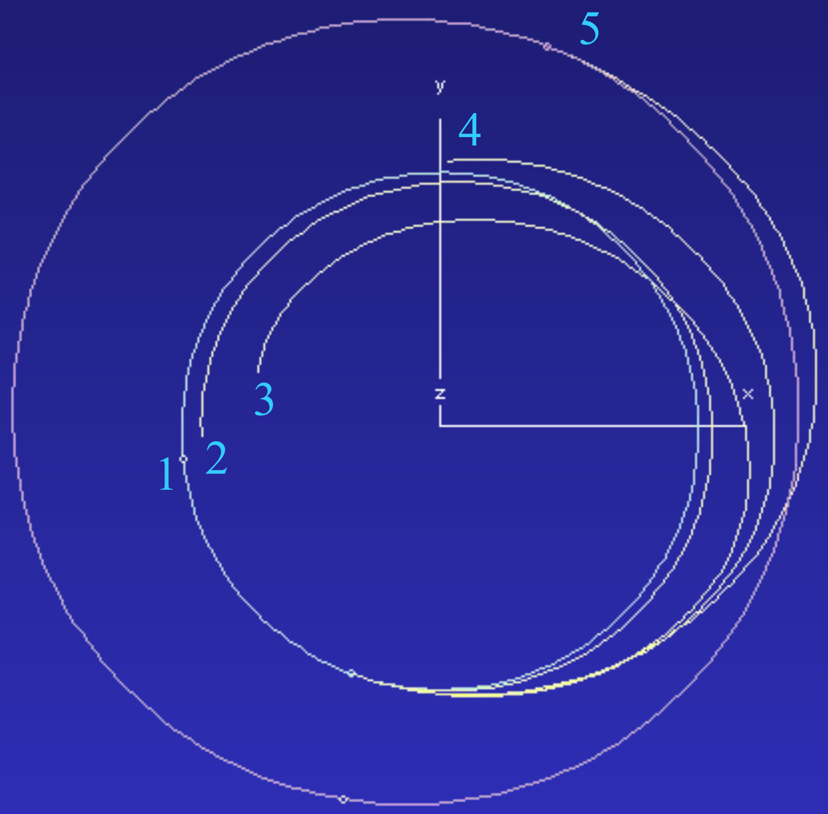
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \Omega_\mathbf{x} + \mathbf{p_v},\\
&\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{p_v}}{\mathrm{d}t^2} = \Omega_\mathbf{xx}\mathbf{p_v},\\
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{p_{vo}}}\right) = \Omega_\mathbf{xx}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{p_{vo}}} + \frac{\partial\mathbf{p_v}}{\partial\mathbf{p_{vo}}},\\
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial\mathbf{p_v}}{\partial\mathbf{p_{vo}}}\right) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\Omega_\mathbf{xx}\mathbf{p_v}\right)\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{p_{vo}}} + \Omega_\mathbf{xx}\frac{\partial\mathbf{p_v}}{\partial\mathbf{p_{vo}}},\\
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{vo}}\right) = \Omega_\mathbf{xx}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{vo}} + \frac{\partial\mathbf{p_v}}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{vo}},\\
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial\mathbf{p_v}}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{vo}}\right) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\Omega_\mathbf{xx}\mathbf{p_v}\right)\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{vo}} + \Omega_\mathbf{xx}\frac{\partial\mathbf{p_v}}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{vo}}.
\end{aligned}\right\}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(0), \quad \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = \mathbf{v}_0(0) + V_\infty\frac{\mathbf{p_v}}{p_v},$$

$$\frac{\partial\mathbf{x}(0)}{\partial\mathbf{p_{v0}}} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{x}(0)}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{v0}} = 0, \quad \frac{\partial\dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial\mathbf{p_{v0}}} = \frac{V_\infty}{p_v}\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{p_v}\mathbf{p_v}^\mathrm{T}}{p_v^2}\right), \quad \frac{\partial\dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{v0}} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{p_{v0}}(0)}{\partial\mathbf{p_{v0}}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial\mathbf{p_{v0}}(0)}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{v0}} = 0, \quad \frac{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{v0}(0)}{\partial\mathbf{p_{v0}}} = 0, \quad \frac{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{v0}(0)}{\partial\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{v0}} = \mathbf{I}$$

2.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ, ВЫЧИСЛЯЕМАЯ АЛГОРИТМОМ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПАССИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В КАЧЕСТВЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ



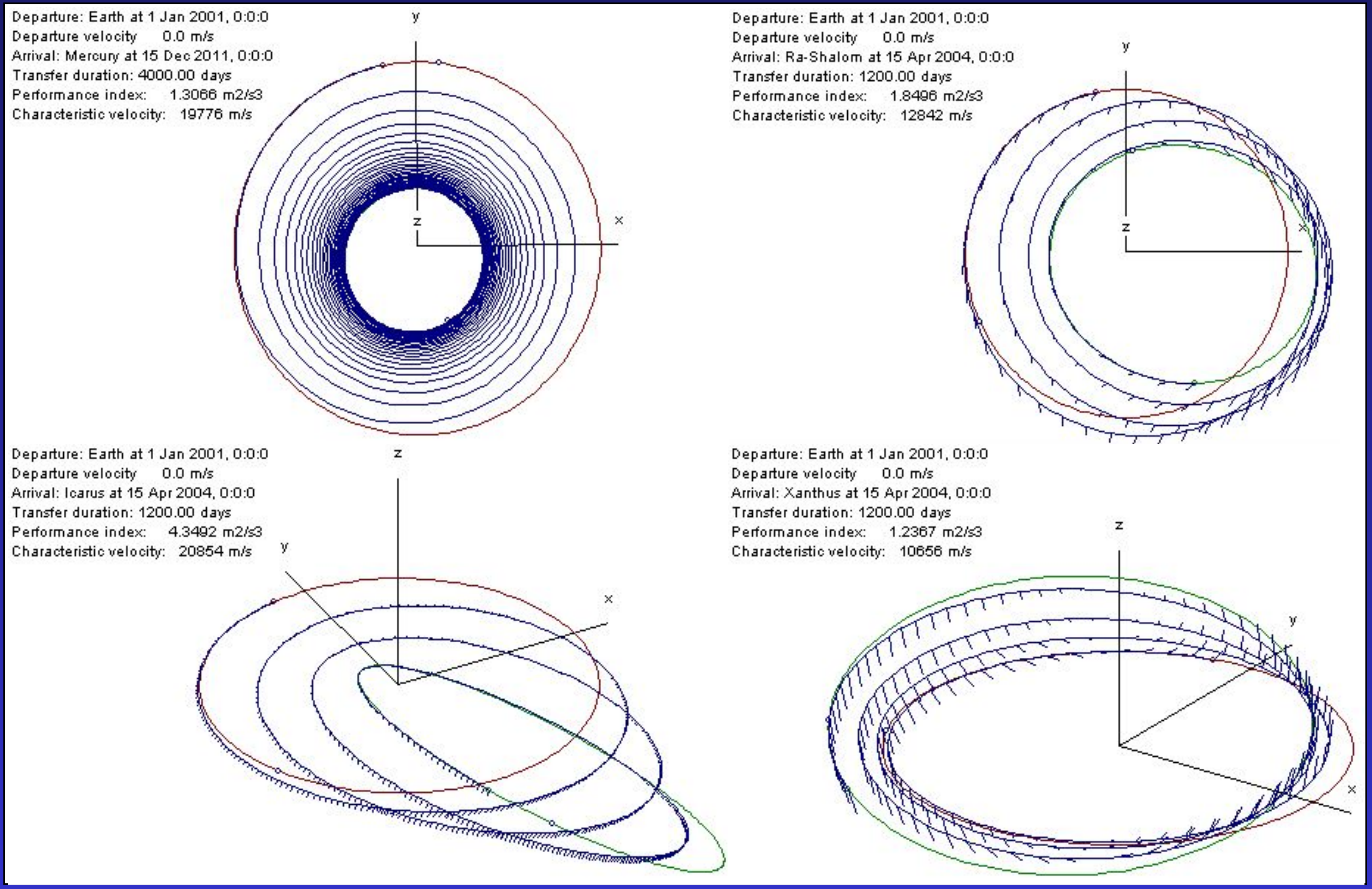
Земля-Марс, сопровождение,
дата старта 1 июня 2000, $V_\infty = 0$ м/с,
T=300 сут

1 - траектория пассивного движения ($\tau_1 = 0$)

2-4 - промежуточные траектории ($0 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < 1$)

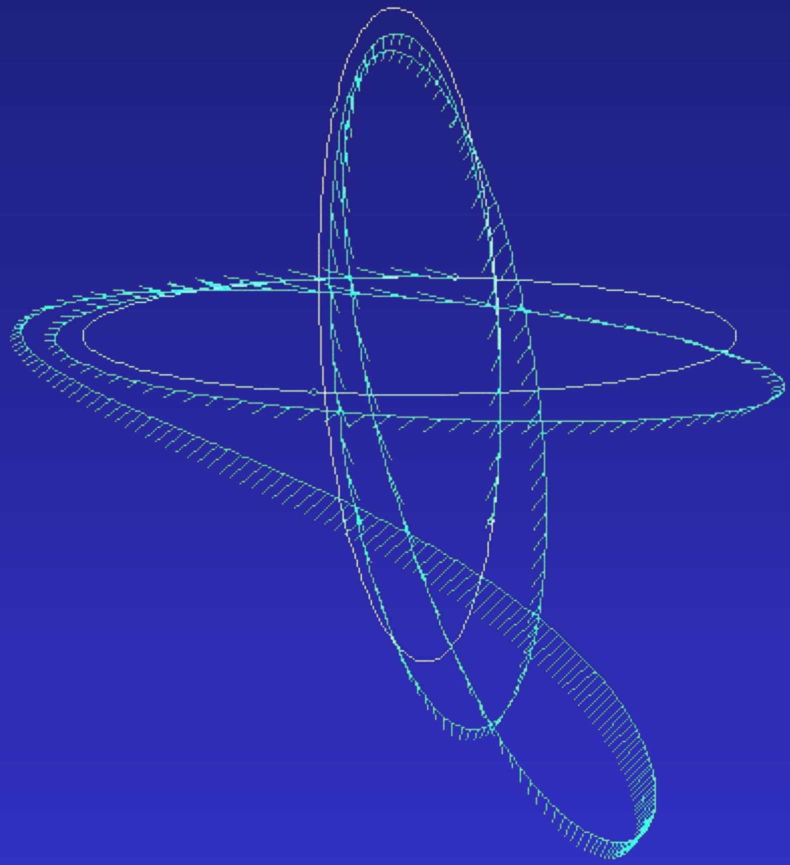
5 - конечная (оптимальная) траектория ($\tau_5 = 1$)

2.5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ
ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ К МЕРКУРИЮ И АСТЕРОИДАМ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

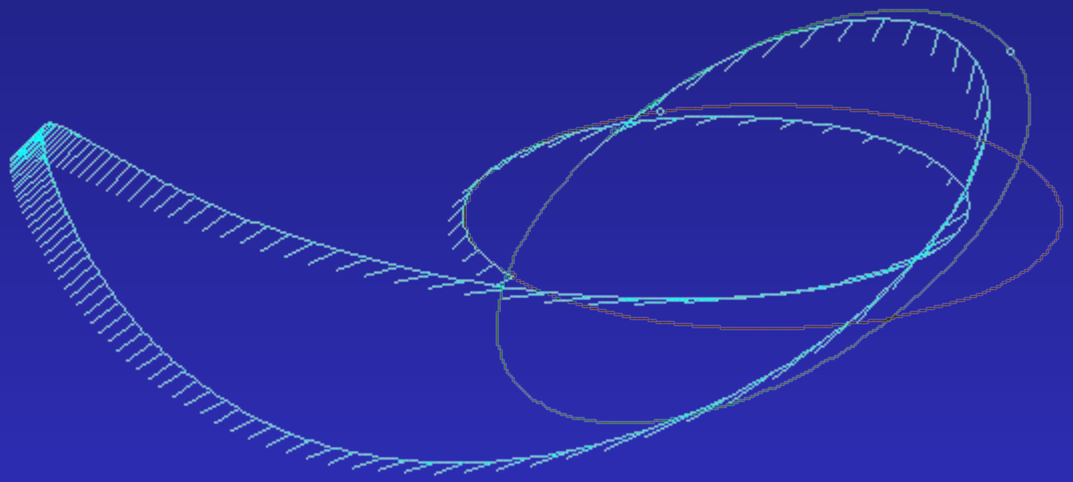


ПРИМЕРЫ ПОВОРОТА ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ

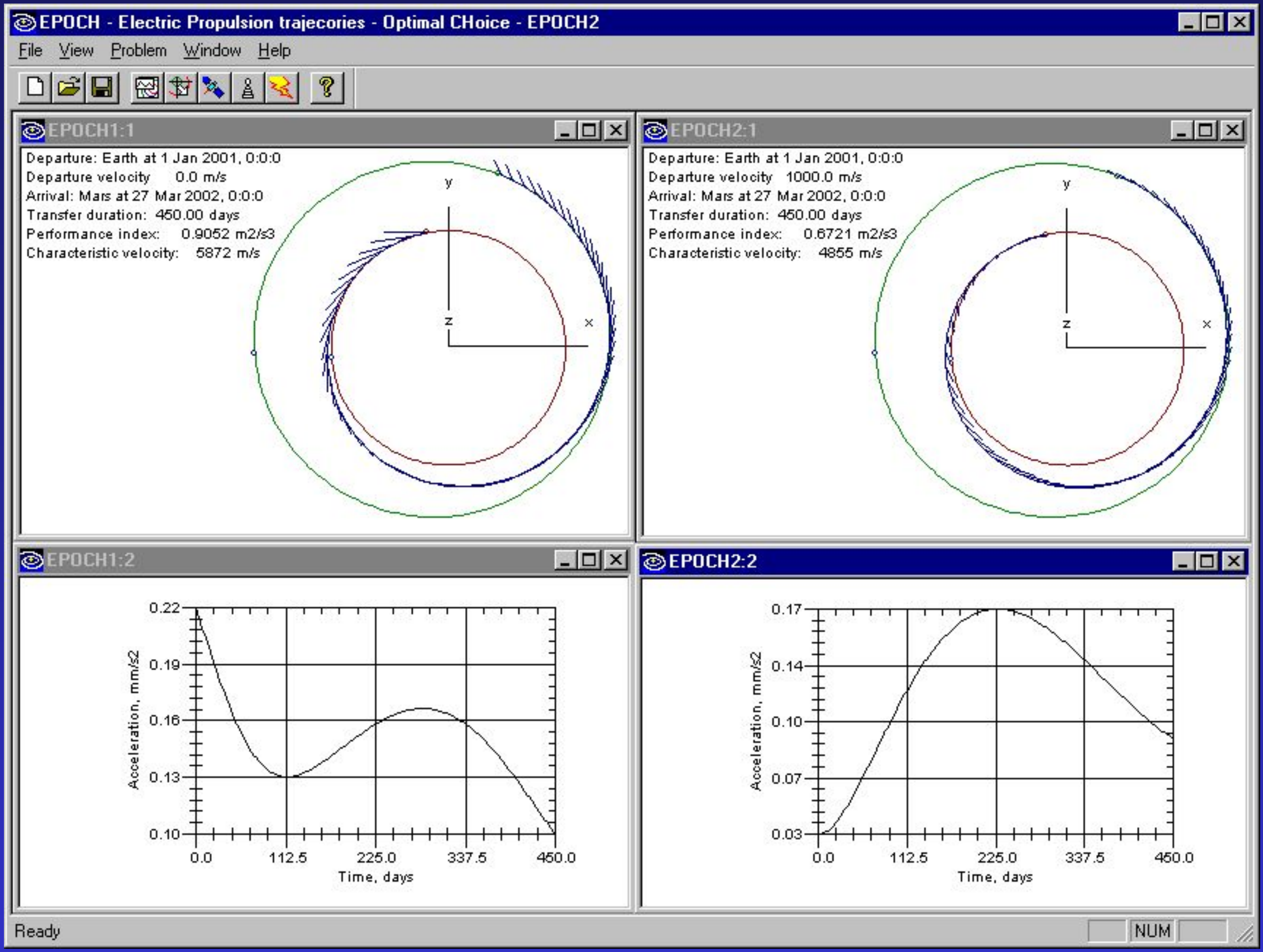
Поворот плоскости круговой орбиты на 90°



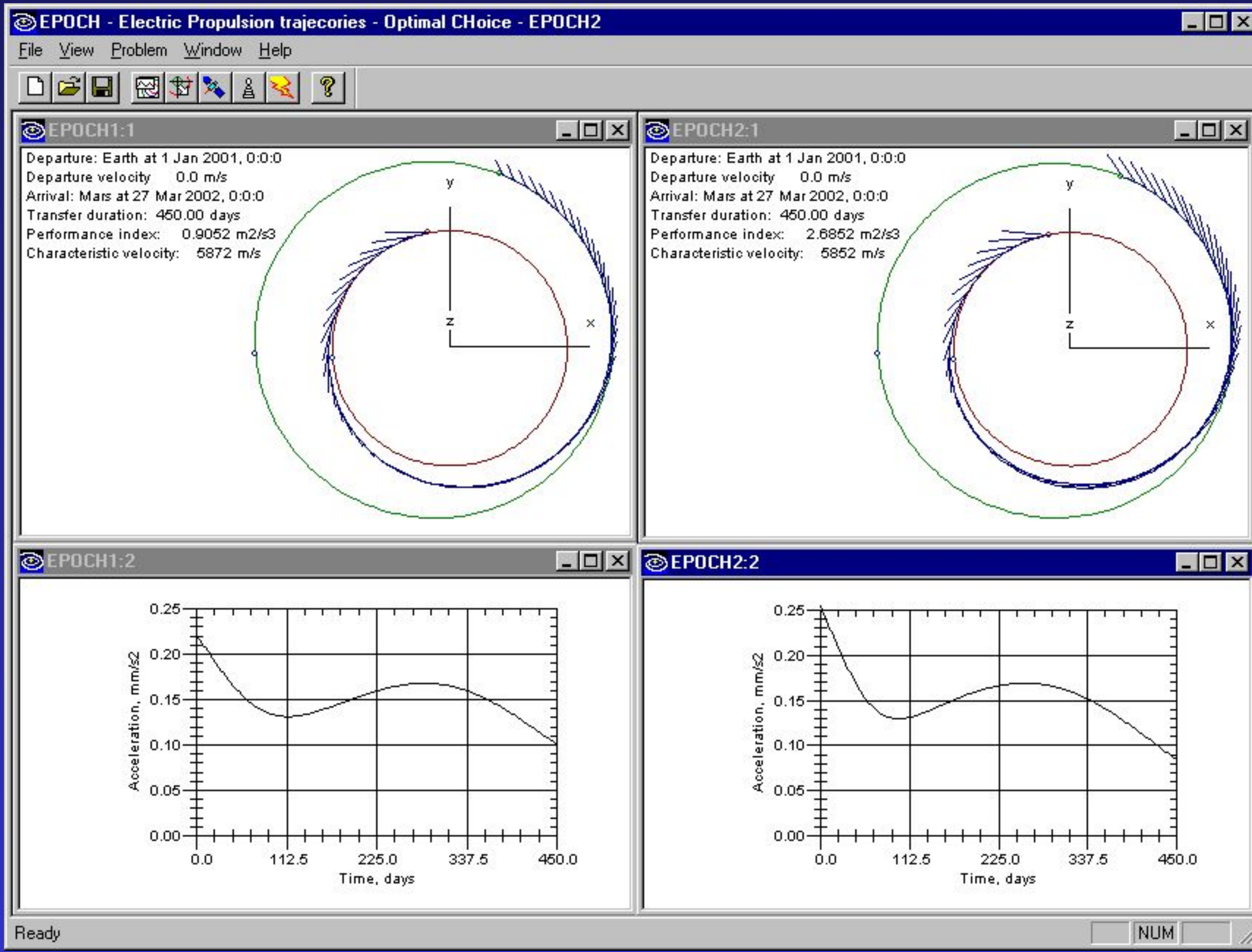
Поворот плоскости круговой орбиты на 120°



ПРИМЕР: ВЛИЯНИЕ ОТЛЕТНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИЗБЫТКА СКОРОСТИ



ПРИМЕР: ТРАЕКТОРИЯ КА С ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТЬЮ И С СОЛНЕЧНОЙ ЭРДУ



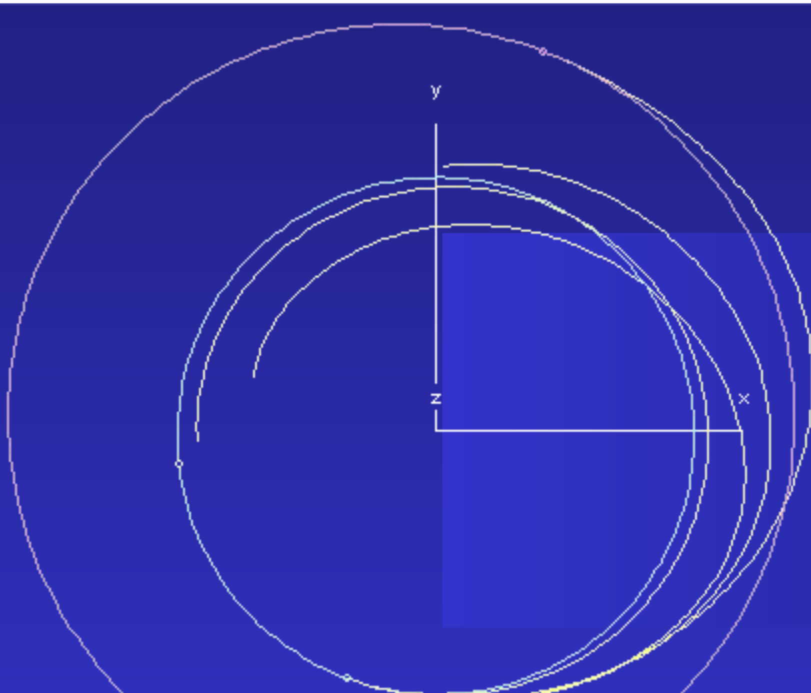
2.7. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ГРАВИТАЦИОННОМУ ПАРАМЕТРУ

Причины отказов метода продолжения: вырожденность матрицы чувствительности (ветвление решений)

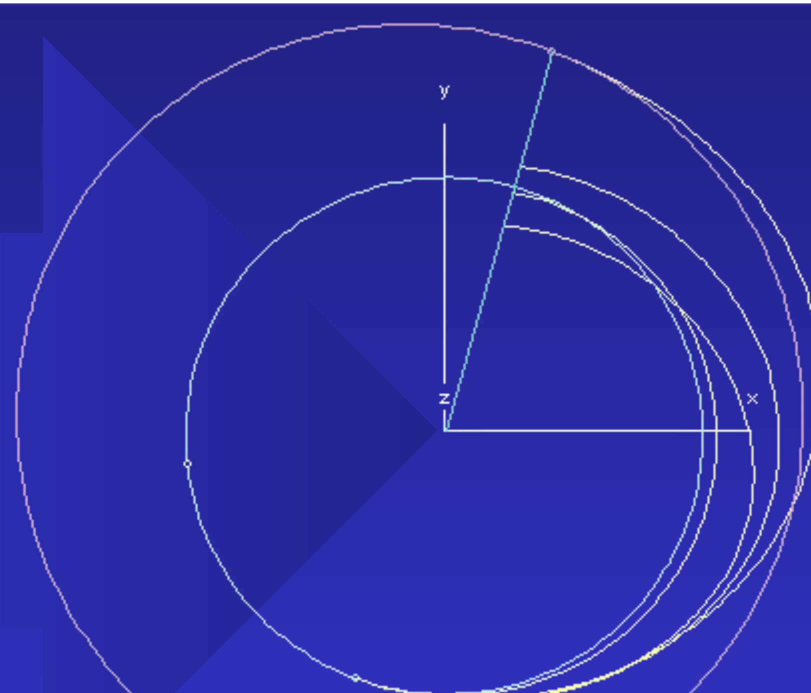
Для межпланетных перелетов бифуркации оптимальных решений чаще всего связаны с изменением числа целых витков вокруг Солнца

Если угловая дальность перелета в процессе продолжения будет оставаться постоянной, то путь продолжения в параметрическом пространстве не будет пересекать границ областей оптимальных решений различного типа, следовательно не будет вырождаться матрица чутвсительности

Цель модификации метода - зафиксировать угловую дальность перелета в процессе продолжения



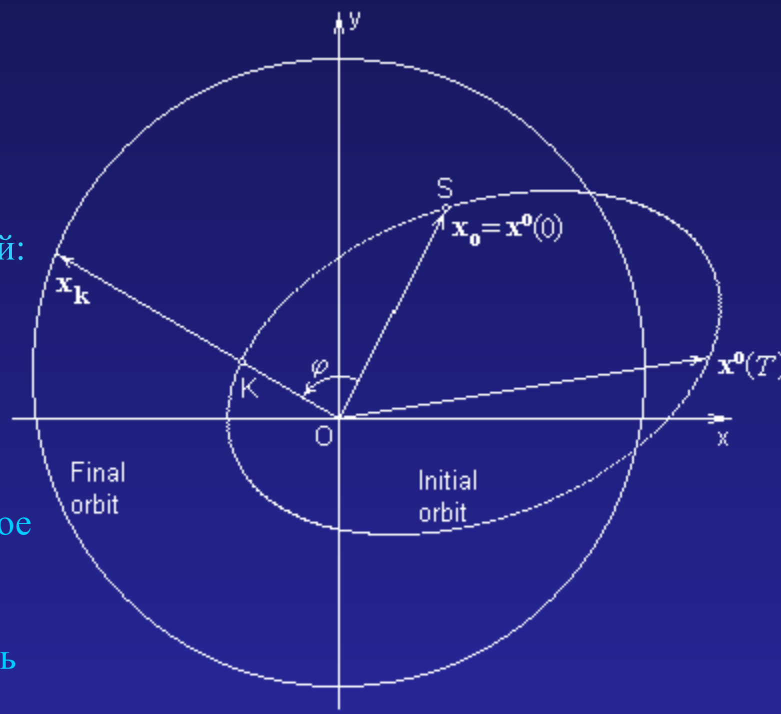
Последовательность вычисления траекторий при использовании базового метода продолжения



Последовательность вычисления траекторий при использовании метода продолжения по гравитационному параметру

Пусть $\mathbf{x}_0(0)$, $\mathbf{x}_0(T)$ - положение планеты старта при $t=0$ и $t=T$; $\mathbf{x}_k$ - положение планеты-цели при $t=T$. Будем считать гравитационный параметр Солнца линейной функцией параметра продолжения τ , и начальное значение этого гравитационного параметра μ_0 выберем из следующих условий:

1) угловые дальности перелета при τ=0 и τ=1 равны;
2) при τ=1 гравитационный параметр Солнца равен действительному физическому значению (1 для уравнений в безразмерных координатах)



В качестве начального приближения рассматривается пассивное движение КА по орбите планеты старта. Пусть начальная истинная аномалия КА в точке старта S равна ν_0, а конечная в точке K $\nu_k=\nu_0+\phi$ (ϕ - угол между $\mathbf{x}_0$ и проекцией $\mathbf{x}_k$ на плоскость начальной орбиты).

Решение уравнения Кеплера дает соответствующие значения средних аномалий M_0 и M_k ($M=E-e\cdot\sin E$, где $E=2\cdot\mathrm{arctg}\{[(1-e)/(1+e)]^{0.5}\mathrm{tg}(\nu/2)\}$ - эксцентрическая аномалия). Средняя аномалия - линейная функция времени на кеплеровской орбите: $M=M_0+n\cdot(t-t_0)$, где $n=(\mu_0/a^3)^{0.5}$ - среднее движение. Следовательно, должно выполняться: $M_k+2\pi N_{rev}=nT+M_0$. Отсюда начальное значение гравитационного параметра Солнца

$$\boxed{\mu_0=[(M_k+2\pi N_{rev}-M_0)/T]^2a^3},$$

а текущее

$$\boxed{\mu(\tau)=\mu_0+(1-\mu_0)\,\tau.}$$

Форма и размеры граничных орбит должны быть инвариантны относительно τ, отсюда

$$\boxed{\mathbf{v}(t,\tau)=\mu(\tau)^{0.5}\,\mathbf{v}(t,1).}$$

Уравнения движения: $\ddot{\mathbf{x}} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_{\mathrm{v}}, \quad \ddot{\mathbf{p}}_{\mathrm{v}} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_{\mathrm{v}}$

Краевые условия:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_0,$$
$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k, \quad \dot{\mathbf{x}}(T) = \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_k.$$

Функция невязок:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_k \\ \dot{\mathbf{x}}(T) - \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

Параметры краевой задачи: $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_{\mathrm{v}}(0), \mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{v}}(0)/\mathrm{d}t)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{p}_{\mathrm{v}0}, \dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{v}0}\right)^{\mathrm{T}}$

Уравнение метода продолжения:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z})\left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau}\right), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

где

$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \partial\mathbf{x}(T)/\partial\mathbf{p}_{\mathrm{v}0} & \partial\mathbf{x}(T)/\partial\dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{v}0} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\partial\mathbf{x}(T)/\partial\mathbf{p}_{\mathrm{v}0}\right) & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\partial\mathbf{x}(T)/\partial\dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{v}0}\right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \tau} - \dfrac{1}{2\mu^{1/2}(\tau)}\dfrac{\partial \mu}{\partial \tau}\mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}}\right) = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{xx}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}}}{\partial \mathbf{z}},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}}}{\partial \mathbf{z}}\right) = \mu(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_{\mathrm{v}}\right)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \Omega_{\mathbf{xx}}\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}}}{\partial \mathbf{z}}\right],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\Omega_{\mathbf{x}} + \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{xx}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}}}{\partial \mathbf{z}},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}}}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_{\mathrm{v}} + \mu(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_{\mathrm{v}}\right)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \Omega_{\mathbf{xx}}\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}}}{\partial \mathbf{z}}\right],$$

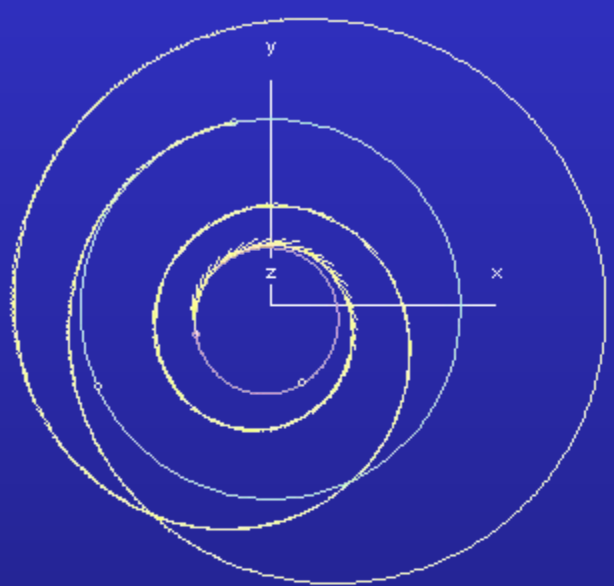
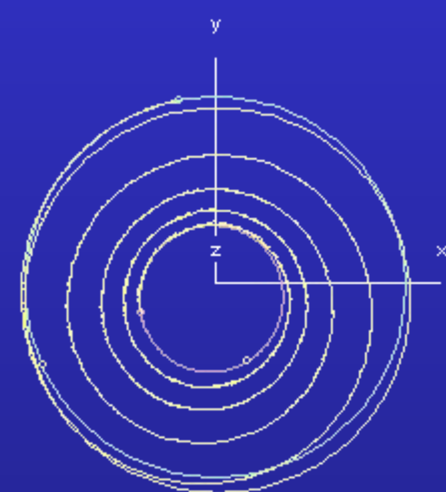
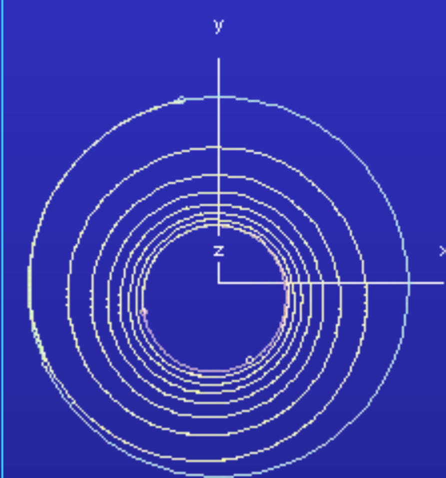
$$\frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial \tau} = \frac{1}{2\mu^{1/2}(\tau)}\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\mathbf{v}_0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}0}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{v}}(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{v}0}} = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}}(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{v}0}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{v}}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}0}} = \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathrm{v}}(0)}{\partial \tau} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{v}}(0)}{\partial \tau} = 0.$$

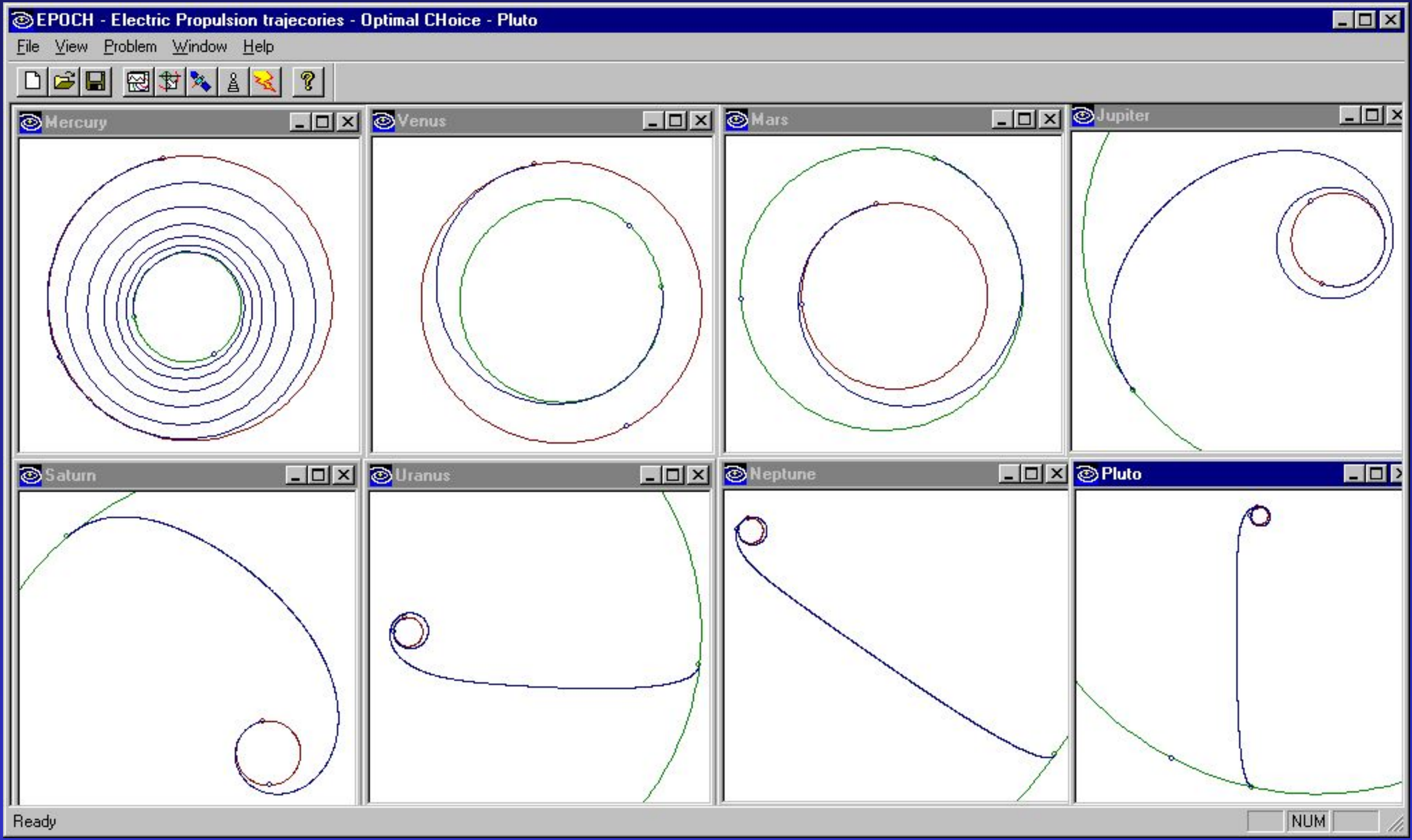
Численный пример: сопровождение Меркурия

Постоянная мощность, дата старта 1 января 2001 г., время перелета 1200 суток

Все решения получены с использованием нулевого начального приближения

Базовый вариант метода продолжения по параметру	Метод продолжения по гравитационному параметру	
	5 целых витков	7 целых витков
		

ПРИМЕРЫ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ К ПЛАНЕТАМ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ



3. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА НА ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

Рассматривается задача перелета КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги с геоцентрической орбиты на орбиту спутника Луны.
Траектория перелета разбивается на 4 участка:

1) Траектория геоцентрической спиральной раскрутки с начальной орбиты до некоторой промежуточной геоцентрической орбиты;

2) Траектория сопровождения точки либрации L_2 системы Земля-Луна;

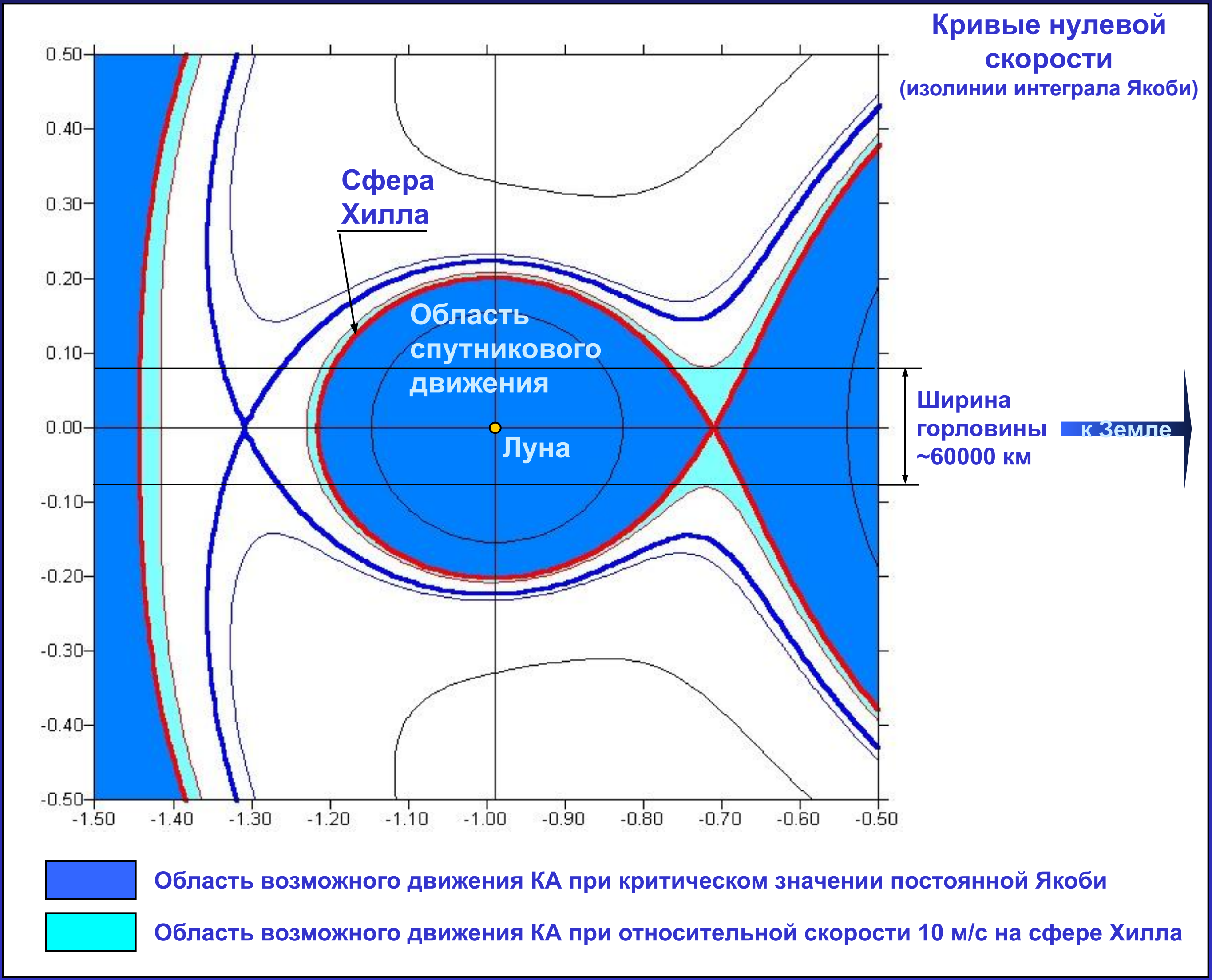
3) Траектория перелета из точки L_2 на некоторую промежуточную селеноцентрическую орбиту;

4) Траектория селеноцентрической скрутки до целевой орбиты.

1-й и 4-й участок могут отсутствовать в случае достаточно высоких начальной геоцентрической и конечной селеноцентрической орбит.

Траектории 2-го и 3-го участков определяются с помощью метода продолжения по параметру.

ОБОСНОВАНИЕ РАЗБИЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ НА УЧАСТКИ



1. Характерная длительность пребывания КА, движущегося по гиперболической траектории, в сфере действия Луны: ~1 сутки.

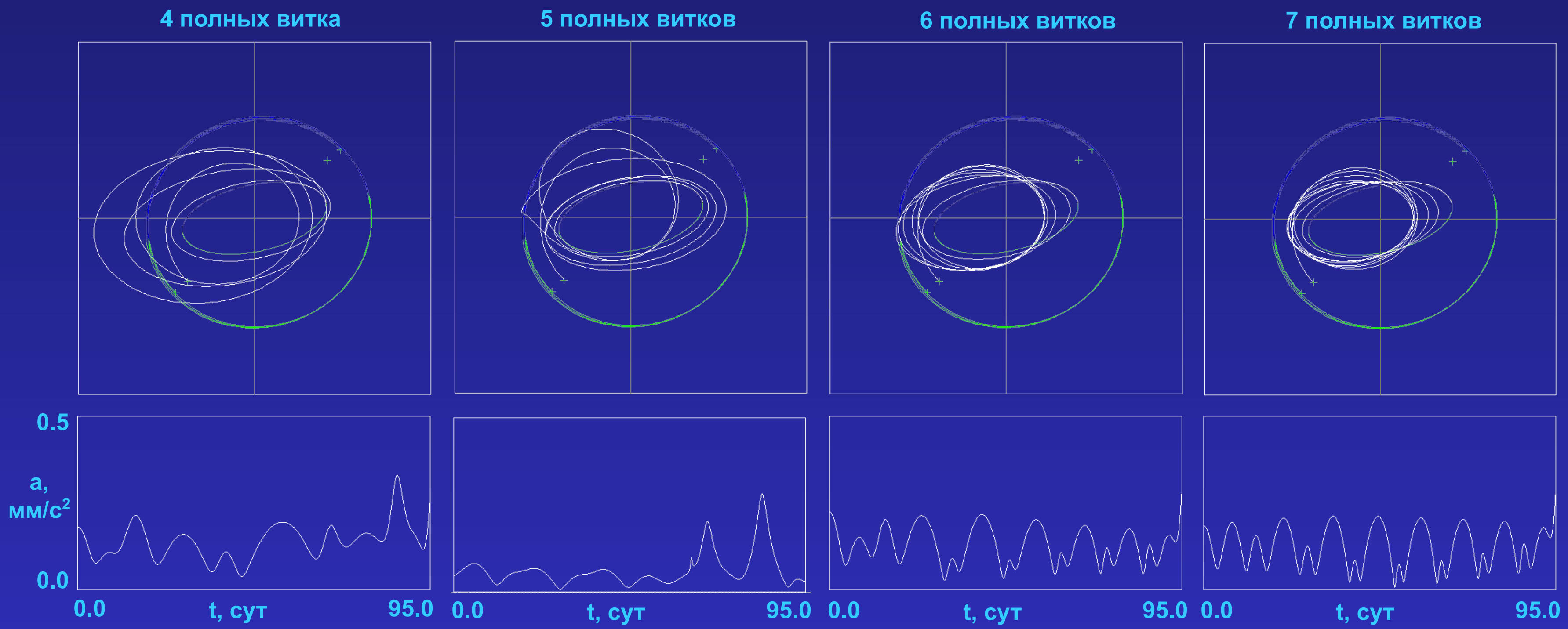
2. Характерное изменение скорости КА за счет работы двигателей малой тяги при реактивном ускорении ~0.1 мм/с^2: ~10 м/с.

3. Ширина горловины в окрестности точки либрации, соответствующей избытку относительной скорости КА на сфере Хилла в 10 м/с: ~60000 км.

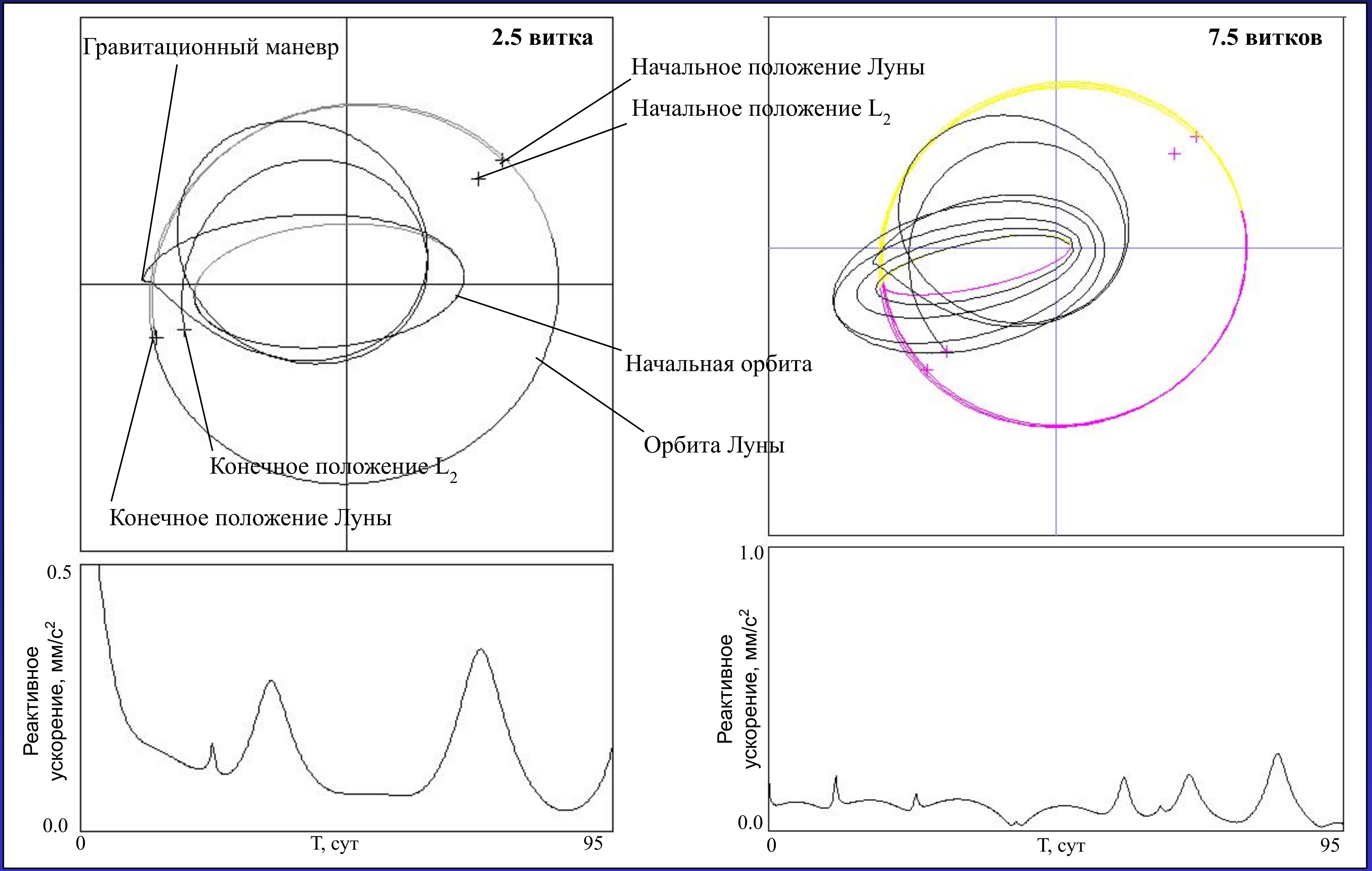
Для реализации захвата КА в область спутниковых движений с использованием двигателей малой тяги его скорость относительно точки либрации при пересечении сферы Хилла не должна превышать ~10 м/с, а удаление от точки либрации не должно превышать ~30000 км.

ТРАЕКТОРИИ СОПРОВОЖДЕНИЯ L_2

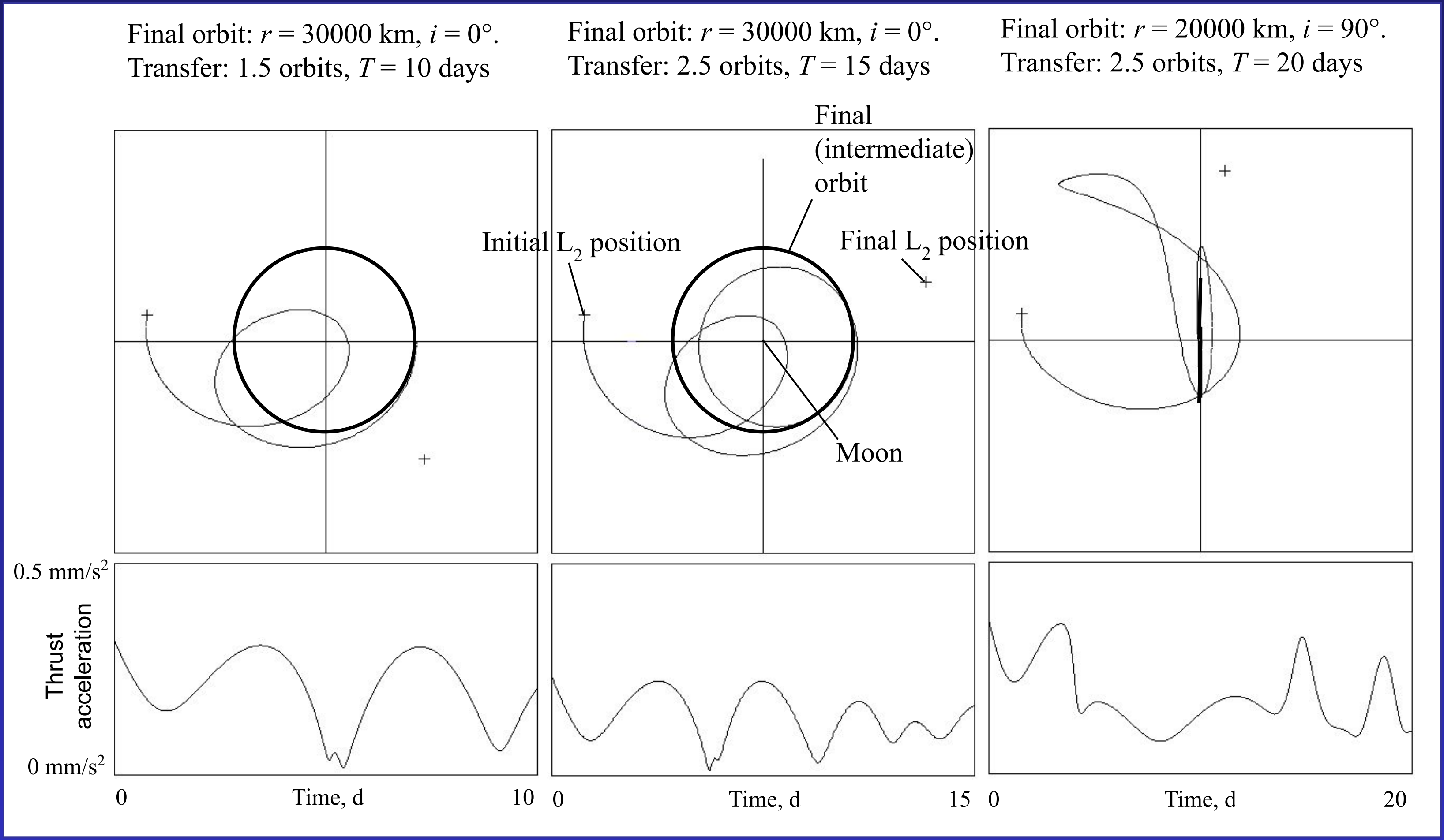
Модельная задача перелета с круговой околоземной орбиты (высота 250000 км, наклонение 63°, долгота восходящего узла 12°, аргумент широты 0°; дата старта 5 января 2001 г.)



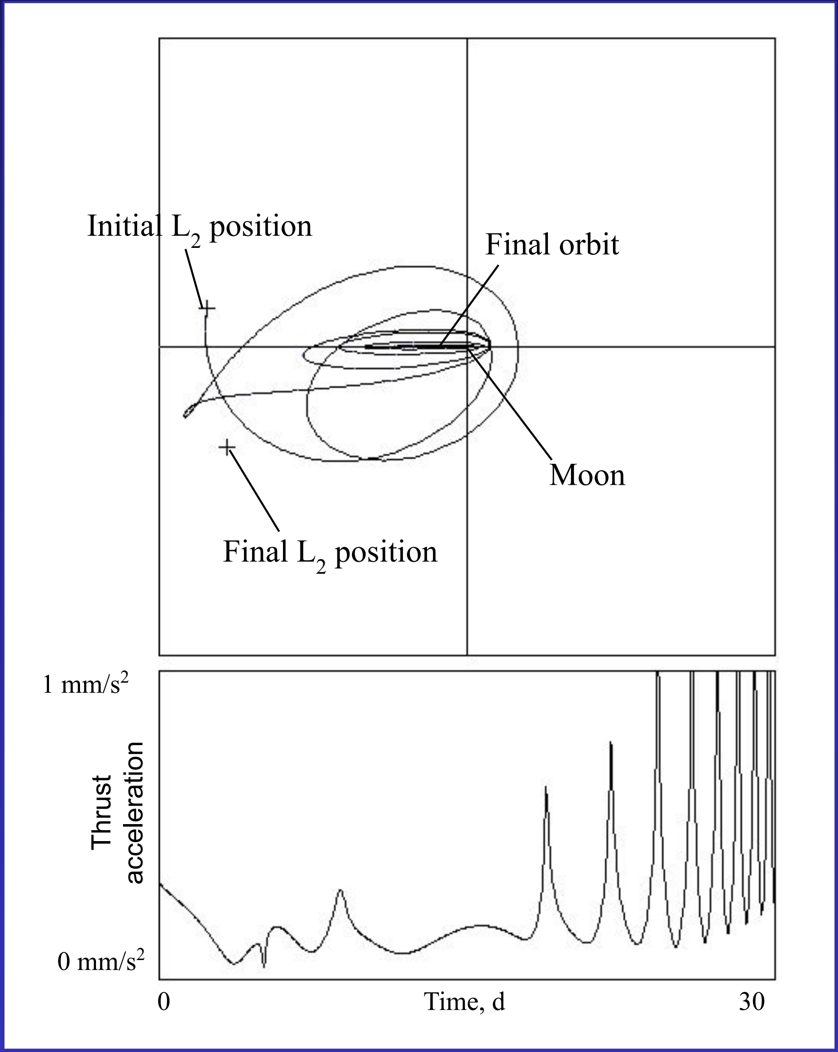
ТРАЕКТОРИИ СОПРОВОЖДЕНИЯ L_2 С ГРАВИТАЦИОННЫМ МАНЕВРОМ У ЛУНЫ



ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА ИЗ L_2 НА КРУГОВУЮ ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

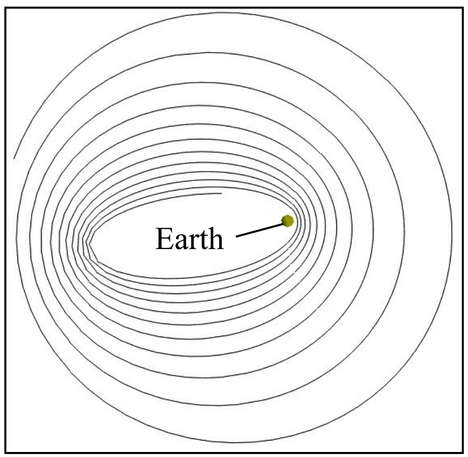


ТРАЕКТОРИЯ ПЕРЕЛЕТА ИЗ L_2 НА ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ (i=90°, h_p=300 км, h_a=10000 км, 10.5 витков)

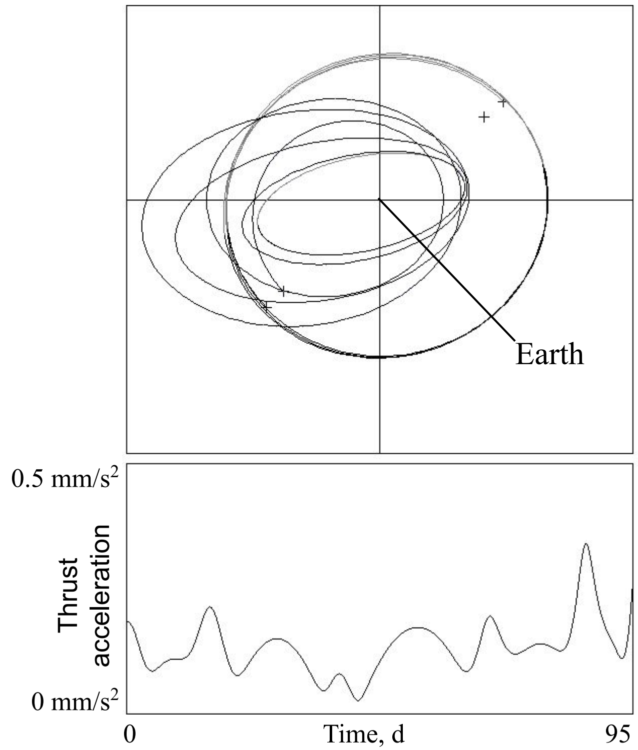


УЧАСТКИ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОКОЛОЗЕМНОЙ ОРБИТЫ НА КРУГОВУЮ ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

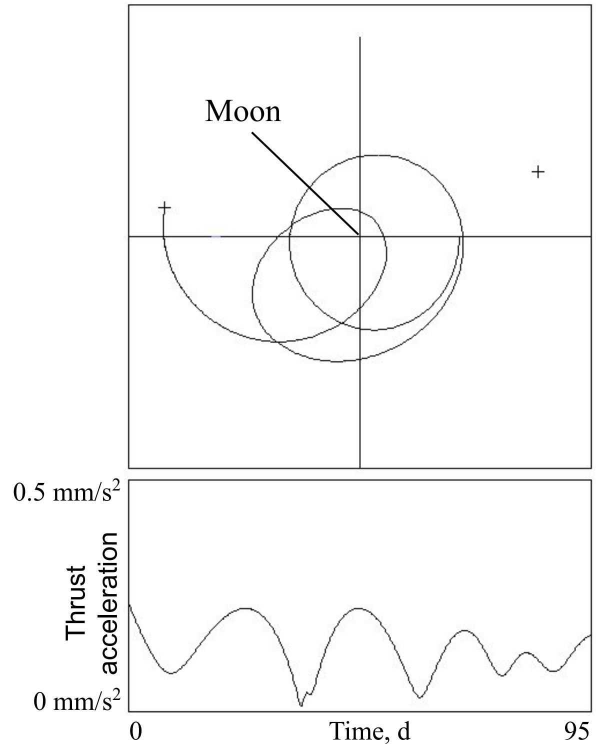
Геоцентрическая спиральная раскрутка



Траектория сопровождения L_2



Перелет из L_2 на круговую экваториальную 30000-км орбиту вокруг Луны



4. ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ

Уравнения орбитального движения КА записываются в равноденственных элементах, не имеющих особенностей при нулевом наклонении и эксцентриситете. Задача оптимального управления редуцируется к двухточечной краевой задаче применением принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Эта краевая задача, в свою очередь, формально редуцируется к задаче Коши с помощью метода продолжения по параметру. Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений оптимального движения (П-систему) и вычислить частные производные от конечного фазового вектора П-системы по начальным значениям сопряженных переменных.

При численном интегрировании П-системы ее правые части численно осредняются по истинной долготе КА. Частные производные от конечного фазового вектора П-системы по начальным значениям сопряженных переменных определяются по конечно-разностным соотношениям.

В результате первого интегрирования П-системы формируется вектор невязок решения краевой задачи. Для определения матрицы чувствительности с помощью конечных разностей требуется 6 дополнительных интегрирований П-системы. В результате, после решения системы линейных алгебраических уравнений формируется вектор правых частей системы дифференциальных уравнений метода продолжения.

Система дифференциальных уравнений метода продолжения численно интегрируется по параметру продолжения от 0 до 1, в результате чего определяется оптимальное решения.

4.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Компоненты реактивного ускорения в орбитальной системе координат:

$$a_\tau = \delta \frac{P}{m} \cos\vartheta \cos\psi \qquad a_r = \delta \frac{P}{m} \sin\vartheta \cos\psi \qquad a_n = \delta \frac{P}{m} \sin\psi$$

δ - функция выключения двигателя, P - реактивная тяга, m - масса КА, ϑ - тангаж, ψ - рысканье

Система равноденственных орбитальных элементов:

$$h = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \qquad e_x = e\cos(\Omega+\omega) \quad e_y = e\sin(\Omega+\omega) \quad i_x = \tan\frac{i}{2}\cos\Omega \quad i_y = \tan\frac{i}{2}\sin\Omega \qquad F = \nu + \omega + \Omega$$

μ - гравитационный параметр центрального тела; p, e, ω, ν, i, Ω - классические кеплеровские элементы.

Уравнения движения в равноденственных элементах:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \delta \frac{P}{m}\frac{h}{\xi} \cdot h\cos\vartheta\cos\psi,\\
\frac{de_x}{dt} &= \delta \frac{P}{m}\frac{h}{\xi}\left\{\xi\sin F\sin\vartheta\cos\psi + \left[(\xi+1)\cos F + e_x\right]\cos\vartheta\cos\psi - e_y\eta\sin\psi\right\},\\
\frac{de_y}{dt} &= \delta \frac{P}{m}\frac{h}{\xi}\left\{-\xi\cos F\sin\vartheta\cos\psi + \left[(\xi+1)\sin F + e_x\right]\cos\vartheta\cos\psi + e_x\eta\sin\psi\right\},\\
\frac{di_x}{dt} &= \delta \frac{P}{m}\frac{h}{\xi} \cdot \frac{1}{2}\varphi\cos F\sin\psi,\\
\frac{di_y}{dt} &= \delta \frac{P}{m}\frac{h}{\xi} \cdot \frac{1}{2}\varphi\sin F\sin\psi,\\
\frac{dF}{dt} &= \frac{\xi^2}{h^3} + \delta \frac{P}{m}\frac{h}{\xi} \cdot \xi\eta\sin\psi,\\
\frac{dm}{dt} &= -\delta \frac{P}{w},
\end{aligned}\right\}$$

$$\xi = 1 + e_x\cos F + e_y\sin F$$

$$\eta = i_x\sin F - i_y\cos F$$

$$\varphi = 1 + i_x^2 + i_y^2$$

w - скорость истечения

Краевые условия: $t = 0$: $h = h_0, e_x = e_{x0}, e_y = e_{y0}, i_x = i_{x0}, i_y = i_{y0}, m = m_0$ $\quad t = T$: $h = h_k, e_x = e_{xk}, e_y = e_{yk}, i_x = i_{xk}, i_y = i_{yk}$

4.2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Функционал:

$$J = \int_0^T \delta \frac{P}{w} dt \to \min$$

Гамильтониан:

$$H = -\delta \frac{P}{w}(1 + p_m) + \frac{\xi^2}{h^3} p_F + \delta \frac{P}{m}\frac{h}{\xi}\left(A_\tau \cos\vartheta \cos\psi + A_r \sin\vartheta \cos\psi + A_n \sin\psi\right)$$

$$A_\tau = hp_h + \left[(\xi + 1)\cos F + e_x\right]p_{ex} + \left[(\xi + 1)\sin F + e_y\right]p_{ey}$$

$$A_r = \xi\left(\sin F \cdot p_{ex} - \cos F \cdot p_{ey}\right)$$

$$A_n = \eta\left(-e_y p_{ex} + e_x p_{ey}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\varphi}\left(\cos F \cdot p_{ix} + \sin F \cdot p_{iy}\right) + \xi\eta \cdot p_F$$

Оптимальное управление:

$$\cos\vartheta = \frac{A_r}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}} \qquad \cos\psi = \frac{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}} \qquad \delta = \begin{cases} 1, \psi_s > 0 \\ 0, \psi_s \le 0 \end{cases} \quad \text{или } \delta \equiv 1$$

$$\sin\vartheta = \frac{A_r}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}} \qquad \sin\psi = \frac{A_n}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}} \qquad \psi_s = -\frac{1 + p_m}{w} + \frac{h}{m\xi}\left(A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2\right)^{1/2}$$

Оптимальный гамильтониан:

$$H = -\delta \frac{P}{w}(1 + p_m) + \frac{\xi^2}{h^3} p_F + \delta \frac{P}{m}\frac{h}{\xi}\left(A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2\right)^{1/2}$$

Осредненный функционал не зависит от F, поэтому после осреднения $\frac{dp_F}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial F} = 0$. Так как рассматриваются межорбитальные перелеты, конечное значение $F=F(T)$ не фиксировано $\Rightarrow p_F(T)=0$ (условие трансверсальности) $\Rightarrow p_F \equiv 0 \Rightarrow$ в гамильтониане можно опустить члены с $p_F \Rightarrow$ $H = -\delta \frac{P}{w}(1 + p_m) + \delta \frac{P}{m}\left(\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2\right)^{1/2}$ где $\tilde{A}_\tau = \frac{h}{\xi}A_\tau, \tilde{A}_r = \frac{h}{\xi}A_r, \tilde{A}_n = \frac{h}{\xi}A_n$

4.3. УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ (П-СИСТЕМА)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \delta \frac{P}{m}\left(\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2\right)^{-1/2}\left(\tilde{A}_\tau \frac{\partial \tilde{A}_\tau}{\partial \mathbf{p}} + \tilde{A}_n \frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial \mathbf{p}} + \tilde{A}_n \frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial \mathbf{p}}\right),\\
&\frac{dm}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m} = -\delta \frac{P}{m},\\
&\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\delta \frac{P}{m}\left(\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2\right)^{-1/2}\left(\tilde{A}_\tau \frac{\partial \tilde{A}_\tau}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{A}_n \frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{A}_n \frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial \mathbf{x}}\right),\\
&\frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} = \delta \frac{P}{m^2}\left(\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2\right)^{1/2},
\end{aligned}\right\}$$

где $\mathbf{x} = \left(h, e_x, e_y, i_x, i_y\right)^{\mathrm{T}}, \mathbf{p} = \left(p_h, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}\right)^{\mathrm{T}}$ - фазовый и сопряженный векторы,

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial \mathbf{p}} = \frac{h}{\xi}\frac{\partial A_i}{\partial \mathbf{p}}, i = \tau, r, n.$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial h} = \frac{1}{\xi}\left(A_i + h\frac{\partial A_i}{\partial h}\right); \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial e_x} = \frac{h}{\xi}\left(-\frac{\cos F}{\xi}A_i + \frac{\partial A_i}{\partial e_x}\right); \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial e_y} = \frac{h}{\xi}\left(-\frac{\sin F}{\xi}A_i + \frac{\partial A_i}{\partial e_y}\right);$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial i_x} = \frac{h}{\xi}\frac{\partial A_i}{\partial i_x}; \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial i_x} = \frac{h}{\xi}\frac{\partial A_i}{\partial i_x}; \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial F} = \frac{h}{\xi}\left[\frac{e_x \sin F - e_y \cos F}{\xi}A_i + \frac{\partial A_i}{\partial F}\right], i = \tau, r, n.$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial p_h}=h;\ \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{ex}}=\left[(\xi+1)\cos F+e_x\right];\ \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{ey}}=\left[(\xi+1)\sin F+e_y\right];\ \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{ix}}=\frac{\partial A_\tau}{\partial p_{iy}}=\frac{\partial A_\tau}{\partial p_F}=0;$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial p_h}=0;\ \frac{\partial A_r}{\partial p_{ex}}=\xi\sin F;\ \frac{\partial A_r}{\partial p_{ey}}=-\xi\cos F;\ \frac{\partial A_r}{\partial p_{ix}}=\frac{\partial A_r}{\partial p_{iy}}=\frac{\partial A_r}{\partial p_F}=0;$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial p_h}=0;\ \frac{\partial A_n}{\partial p_{ex}}=-\eta e_y;\ \frac{\partial A_n}{\partial p_{ey}}=\eta e_x;\ \frac{\partial A_n}{\partial p_{ix}}=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}\cos F;\ \frac{\partial A_n}{\partial p_{iy}}=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}\sin F;\ \frac{\partial A_n}{\partial p_F}=\xi\eta.$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial h}=p_h;\ \frac{\partial A_\tau}{\partial e_x}=\left(\cos^2F+1\right)p_{ex}+\cos F\sin F\cdot p_{ey};\ \frac{\partial A_\tau}{\partial e_y}=\left(\sin^2F+1\right)p_{ey}+\cos F\sin F\cdot p_{ex};$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial i_x}=\frac{\partial A_\tau}{\partial i_y}=0;$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial F}=\left[(e_y\cos F-e_x\sin F)\cos F-(\xi+1)\sin F\right]p_{ex}+\left[(e_y\cos F-e_x\sin F)\sin F+(\xi+1)\cos F\right]p_{ey};$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial h}=0;\ \frac{\partial A_r}{\partial e_x}=\cos F\cdot\left(p_{ex}\sin F-p_{ey}\cos F\right);\ \frac{\partial A_r}{\partial e_y}=\sin F\cdot\left(p_{ex}\sin F-p_{ey}\cos F\right);$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial i_x}=\frac{\partial A_r}{\partial i_y}=0;\ \frac{\partial A_r}{\partial F}=\left(-e_x\sin F+e_y\cos F\right)\left(p_{ex}\sin F-p_{ey}\cos F\right)+\xi\left(p_{ex}\cos F+p_{ey}\sin F\right);$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial h}=0;\ \frac{\partial A_n}{\partial e_x}=\eta p_{ey}+\eta p_F\cos F;\ \frac{\partial A_n}{\partial e_y}=-\eta p_{ex}+\eta p_F\sin F;\ \frac{\partial A_n}{\partial i_x}=\frac{\partial A_n}{\partial i_y}=0;$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial F}=\left(i_x\cos F+i_y\sin F\right)\left(e_xp_{ey}-e_yp_{ex}\right)+\frac{1}{2}\tilde{\varphi}\left(p_{iy}\cos F-p_{ix}\sin F\right)+$$
$$+\left(e_y\cos F-e_x\sin F\right)\eta p_F+\left(i_x\cos F+i_y\sin F\right)\eta p_F.$$

4.4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В задаче с фиксированным временем T уравнение невязок краевой задачи имеет вид:

$$\mathbf{f}=\begin{pmatrix} h(T)-h_k \\ e_x(T)-e_{xk} \\ e_y(T)-e_{yk} \\ i_x(T)-i_{xk} \\ i_y(T)-i_{yk} \\ p_m(T) \end{pmatrix}=0$$

Это уравнение должно быть решено относительно неизвестных начальных значений сопряженных переменных $\mathbf{p}(0)$, $p_m(0)$.

В задаче оптимального быстродействия $\delta \equiv 1$, а уравнения для m и p_m можно не рассматривать, заменив массу на выражение $m = m_0 - (P/w)\, t$. Уравнение невязок для задачи оптимального быстродействия имеет вид:

$$\mathbf{f}=\begin{pmatrix} h(T)-h_k \\ e_x(T)-e_{xk} \\ e_y(T)-e_{yk} \\ i_x(T)-i_{xk} \\ i_y(T)-i_{yk} \\ \partial H(T)/\partial T \end{pmatrix}=0$$

Это уравнение должно быть решено относительно неизвестных начальных значений сопряженных переменных $\mathbf{p}(0)$ и времени перелета T.

Уравнение метода продолжения: $\dfrac{d\mathbf{z}}{d\tau}=-\left[\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1}\mathbf{b}$, где $\mathbf{z}=\begin{pmatrix} p_h \\ p_{ex} \\ p_{ey} \\ p_{ix} \\ p_{iy} \\ T \end{pmatrix}$ (быстродействие) или $\mathbf{z}=\mathbf{p}$ (фиксированное время);

$\mathbf{b}=\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$ - вектор невязок при начальном значении $\mathbf{z}$ (при $\tau=0$). Краевая задача решается интегрированием дифференциальных уравнений метода продолжения по τ от 0 до 1. Частные производные от вектора невязок $\mathbf{f}$ по параметрам краевой задачи $\mathbf{z}$ и решение системы линейных уравнений для определения правых частей этих дифференциальных уравнений определяются численно.

4.5. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Краевая задача решается методом продолжения по параметру.

Для вычисления невязок **f** интегрируются осредненные по истинной долготе F уравнения оптимального движения. Эти уравнения имеют особенность при **p**=0, поэтому использовать нулевое начальное приближение для вектора сопряженных переменных нельзя.

В задаче оптимального быстродействия при использовании метода продолжения по параметру в качестве начального приближения для **p**(0) выбиралось $p_h=1$, если большая полуось конечной орбиты превышает большую полуось начальной орбиты и $p_h=-1$ в противном случае. Остальные компоненты вектора **p** выбирались равными 0, а начальное приближение для безразмерного времени перелета $T|_{\tau=0}=1$ (в единицах начальной орбиты). С таким начальным приближением удалось решить задачи об оптимальном по быстродействию перелете с высокоэллиптической промежуточной орбиты (ПО) на ГСО при наклонении ПО 0°-75° и высоте апогея ПО 10000-120000 км. Если высота апогея ПО находилась вне этого диапазона, для решения задачи в качестве начального приближения приходилось использовать предварительно полученное решение задачи перелета с ПО с достаточно близкой высотой апогея.

Осреднение уравнений оптимального движения по истинной долготе F осуществляется численно в процессе интегрирования этих уравнений.

Вычисление частных производных от функции невязок **f** по параметрам краевой задачи **p**(0), T, необходимых для применения метода продолжения, производится также численно по конечно-разностным формулам первого порядка.

Таким образом, для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжение используется численное интегрирование численно осредненных уравнений оптимального движения и полученные численным дифференцированием частные производные от функции невязок краевой задачи по ее параметрам.

4.6. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В НЕОСРЕДНЕННОМ ДВИЖЕНИИ

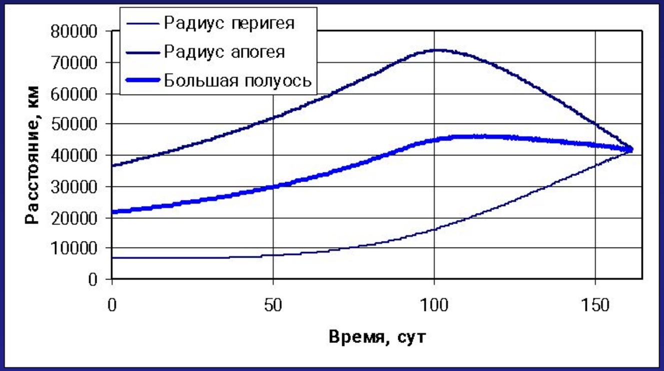
Малый уровень реактивного ускорения (по сравнению с гравитационным) обуславливает близость эволюции орбитальных элементов в осредненном и неосредненном движении в эллиптическом случае.

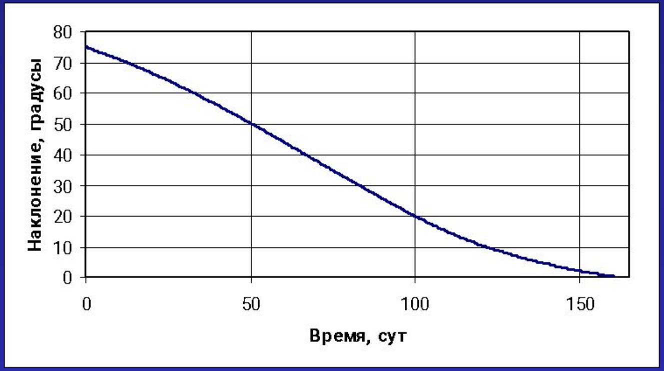
Для проверки применимости найденного для осредненных уравнений движения оптимального управления, найденные оптимальные начальные значения параметров краевой задачи подставлялись в неосредненные уравнения оптимального движения, и эти уравнения численно интегрировались. Начальное значение истинной долготы F выбиралось достаточно произвольно (обычно соответствующее перигею или апогею начальной орбиты), а начальное значение сопряженной к ней переменной p_F принималось равной 0 (см. замечание выше).

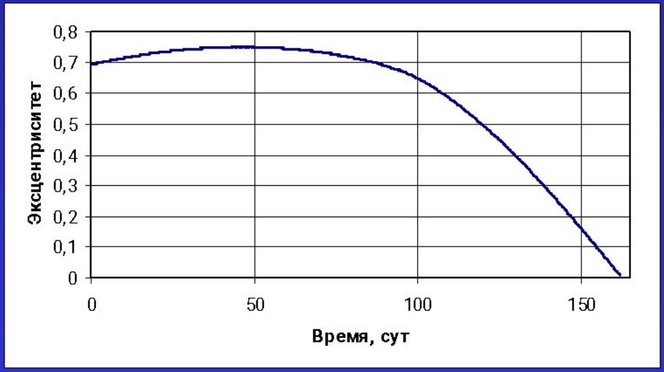
В результате этого численного интегрирования определялись фактические невязки на правым конце траектории и программа оптимального управления. Для перелетов на ГСО с высокоэллиптических промежуточных орбит при уровне реактивного ускорения 0.1-0.5 мм/с^2 разница в невязках при решении осредненной и неосредненной задач имела величину порядка 0.1%.

Примеры использования оптимального управления, полученного для осредненной задачи к неосредненным уравнениям движения приводятся в следующем разделе.

4.7. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТЫ В ОПТИМАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ И ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ (ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ)



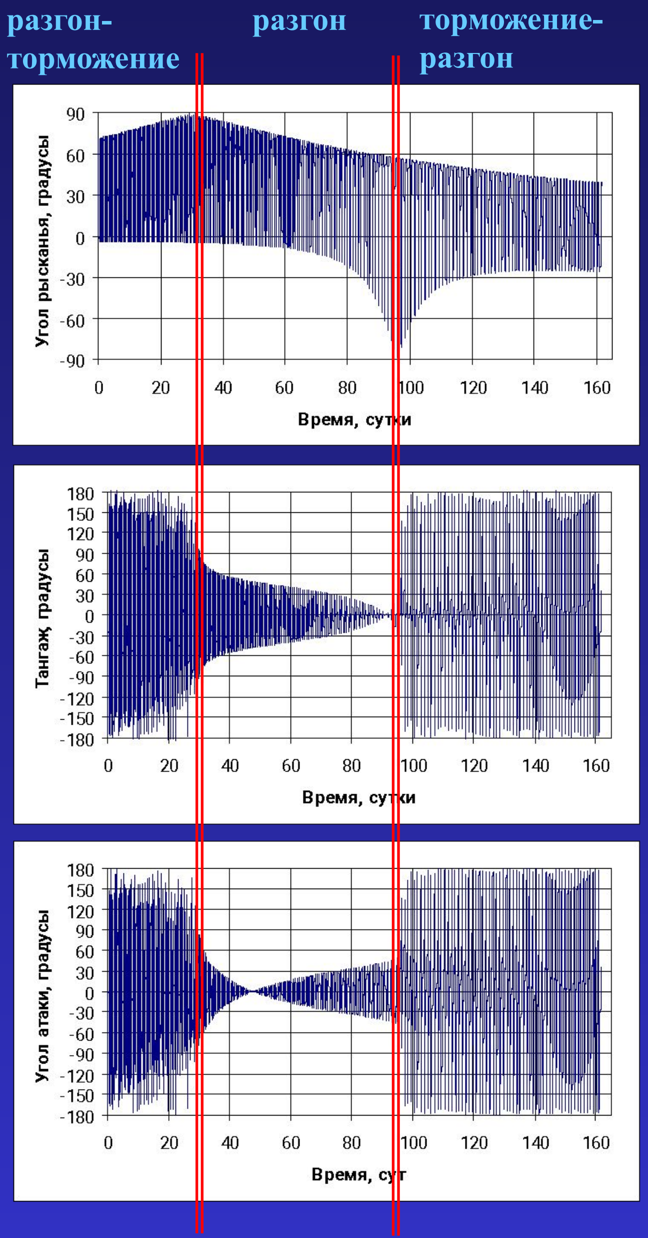




Эволюция орбитальных элементов при высоте апогея промежуточной орбиты ниже оптимальной (h_a = 30000 км, i = 75°)

1. Средние за виток значения радиуса апогея, большой полуоси и эксцентриситета имеют максимум.

2. Радиус перигея монотонно возрастает.



Оптимальное управление вектором тяги при высоте апогея промежуточной орбиты ниже оптимальной (h_a = 30000 км, i = 75°)

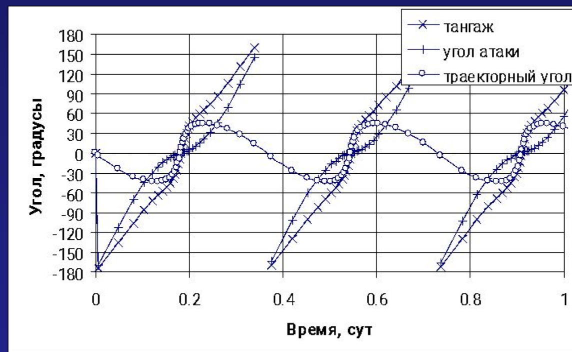
Траектория перелета имеет 3 фазы.

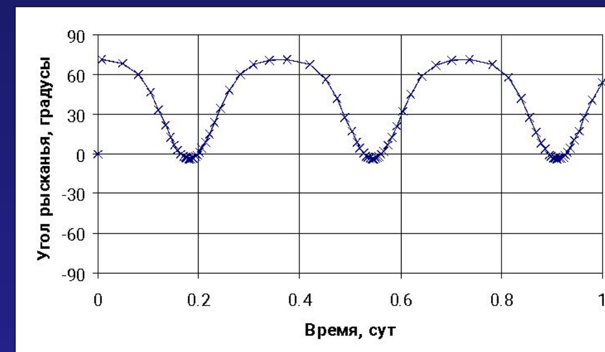
На 1-й фазе осуществляется разгон всюду кроме небольшой дуги орбиты в окрестности апогея (этим частично компенсируется увеличение высоты перигея), а максимальное значение угла рысканья в апогее на витке возрастает с ~70° в начале перелета до 90° при достижении максимального эксцентриситета. Максимальный угол рысканья в перигее примерно постояннен и составляет менее 10°.

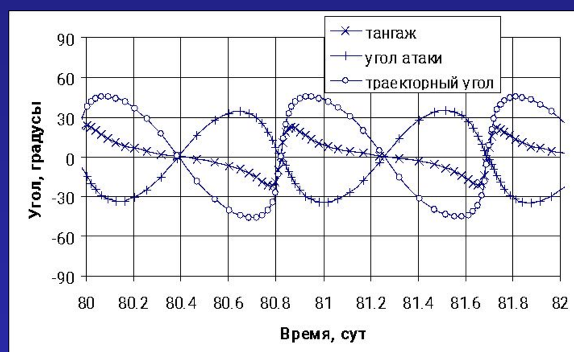
На 2-й фазе происходит разгон на всем витке до достижения максимального значения высоты апогея. Максимальное значение угла рысканья в апогее уменьшается почти линейно по времени от 90° до ~60°, а в перигее - увеличивается, достигая 90° при достижении максимальной высоты апогея. Угол рысканья в перигее достигает больших значений, чем угол рысканья в апогее, что можно объяснить большей эффективностью подъема высоты перигея на этом участке.

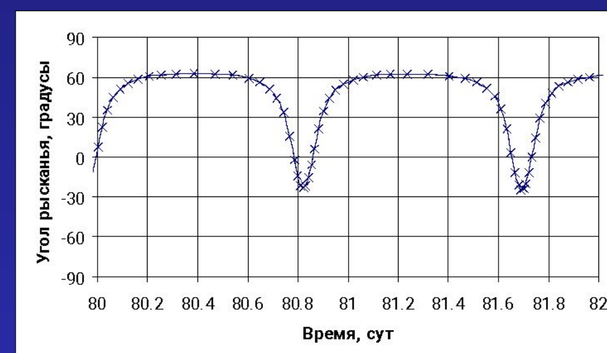
На 3-й фазе происходит разгон в апогее и торможение в перигее, а максимальный угол рысканья на витке снижается до ~40° в апогее и до ~25° в перигее.

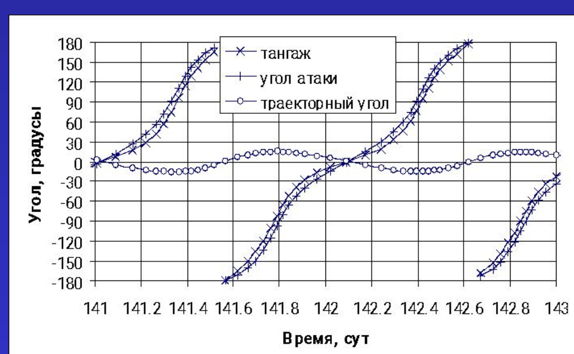
ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРОМ ТЯГИ

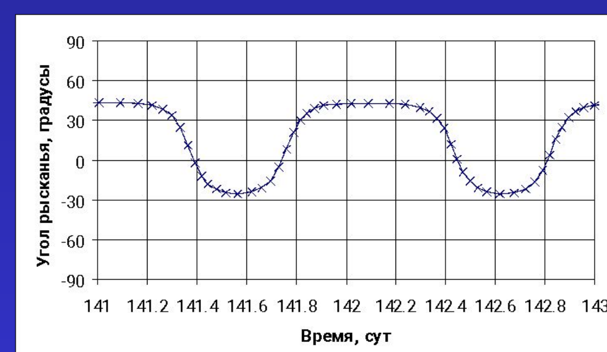




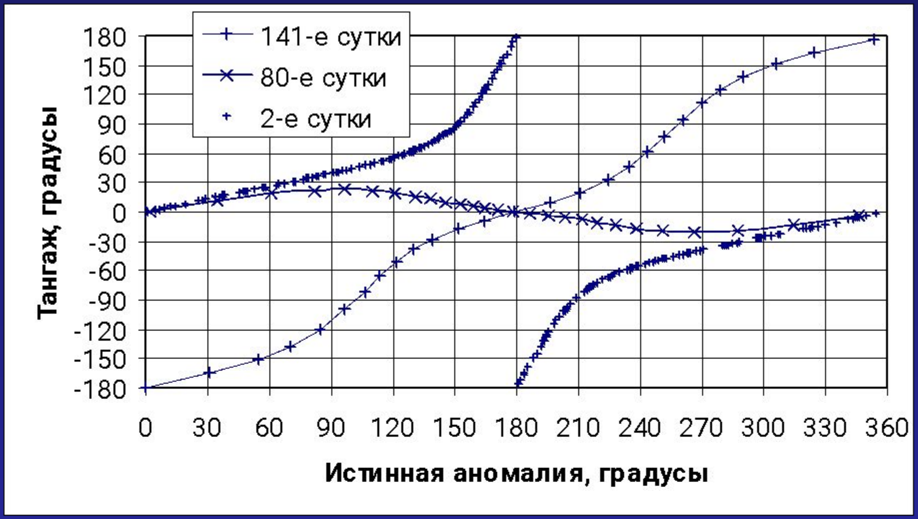


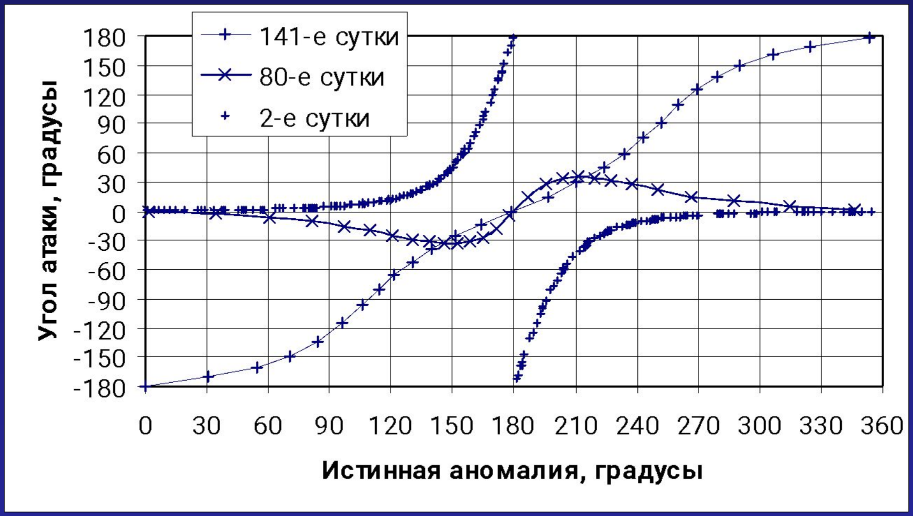




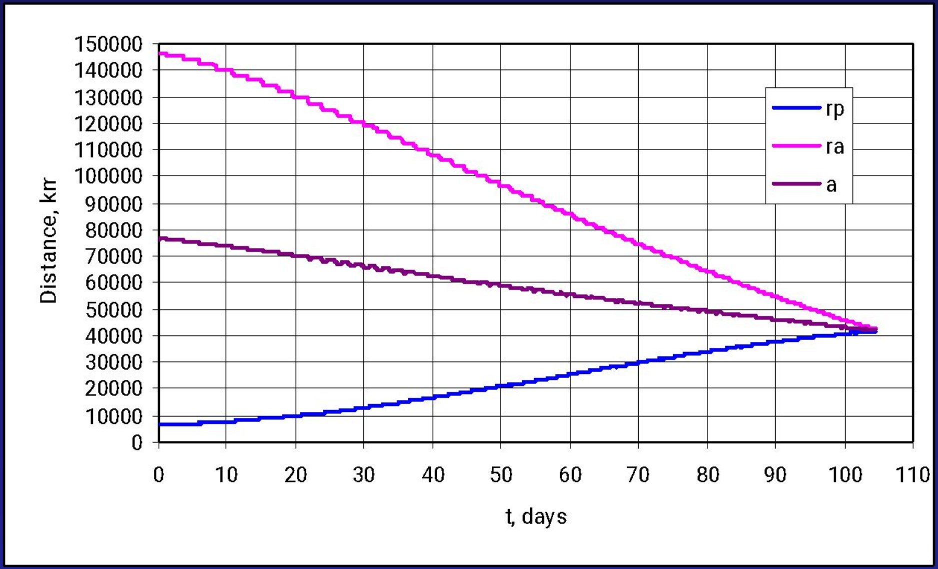


ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРОМ ТЯГИ





Эволюция орбитальных элементов и управление вектором тяги при оптимальной высоте апогея промежуточной орбиты (h_a = 140000 км, i = 65°)

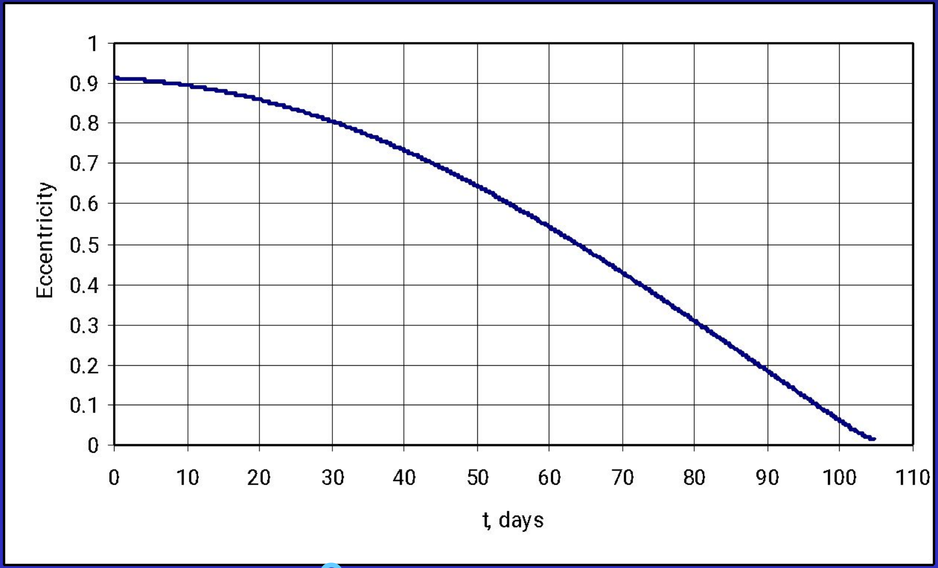


Радиусы перигея, апогея и большая полуось

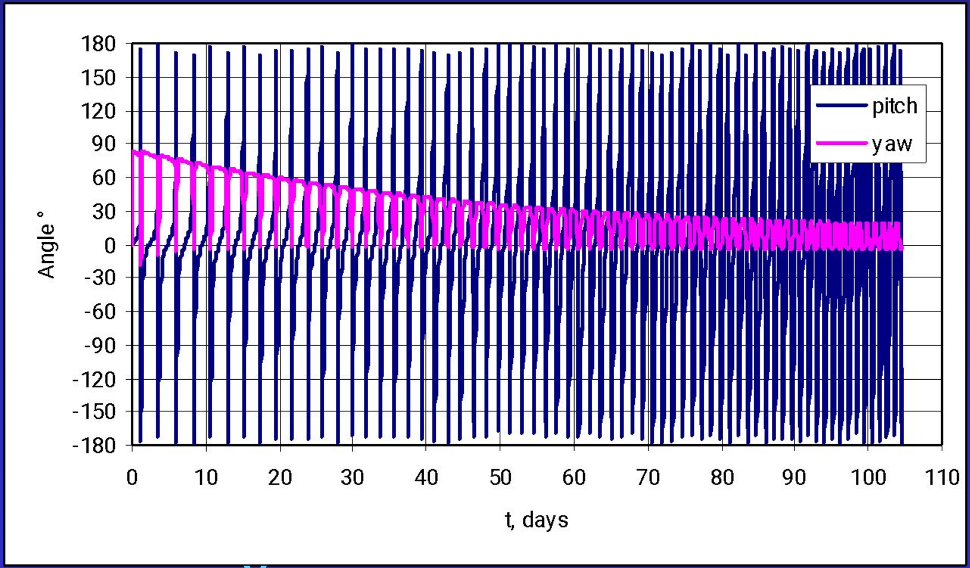
1. Средние за виток значения радиуса апогея, большой полуоси и эксцентриситета монотонно уменьшаются.

2. Средний за виток радиус перигея монотонно растет.

3. Траектория перелета имеет 1 фазу. В апогее происходит разгон, а в перигее - торможение. Максимальный угол рысканья на витке монотонно снижается с 90° до ~30°.

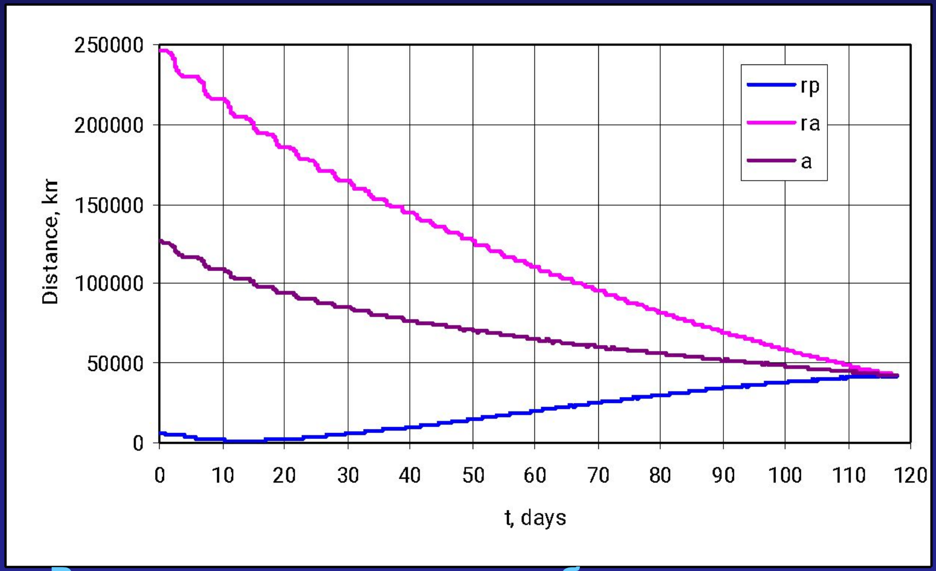


Эксцентриситет



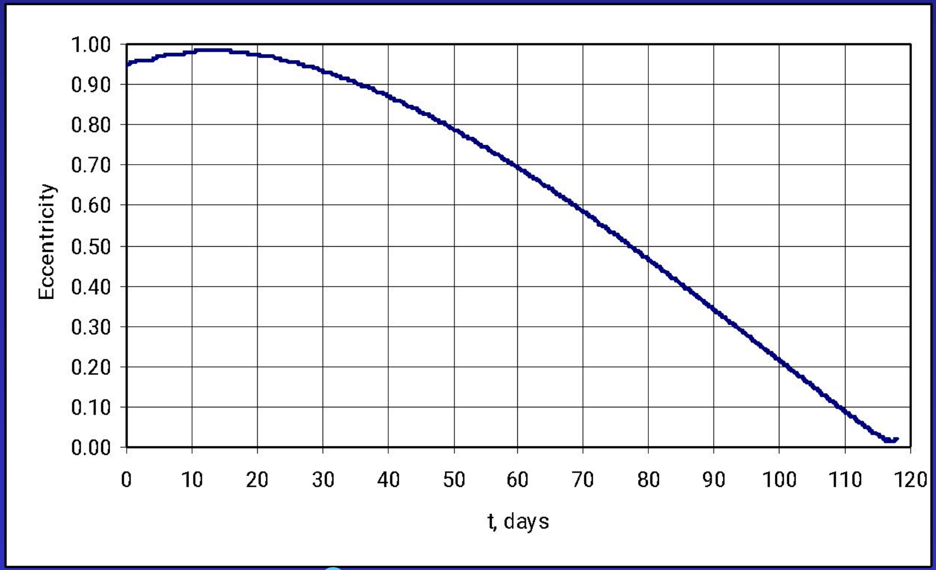
Углы тангажа и рысканья

Эволюция орбитальных элементов и управление вектором тяги при высоте апогея промежуточной орбиты выше оптимальной (h_a = 240000 км, i = 65°)

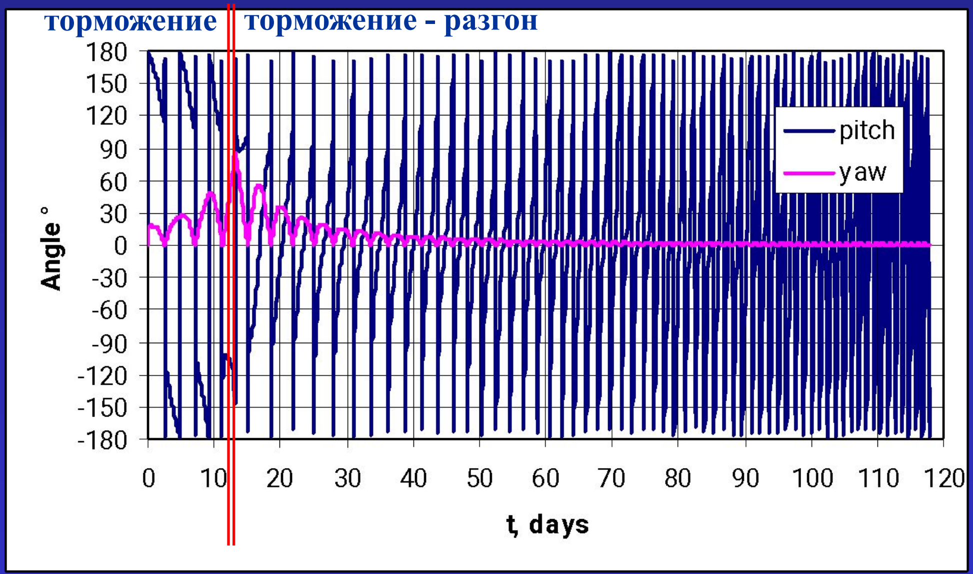


Радиусы перигея, апогея и большая полуось

1. Средние за виток значения радиуса апогея и большой полуоси монотонно уменьшаются.
2. В начале перелета радиус перигея уменьшается, а эксцентриситет - растет.
3. Траектория перелета имеет 2 фазы. На 1-й фазе осуществляется торможение на всем витке, а максимальный угол рысканья на витке увеличивается до ~90° при достижении максимального эксцентриситета. На 2-й фазе происходит разгон в апогее и торможение в перигее, а максимальный угол рысканья на витке снижается почти до 0.

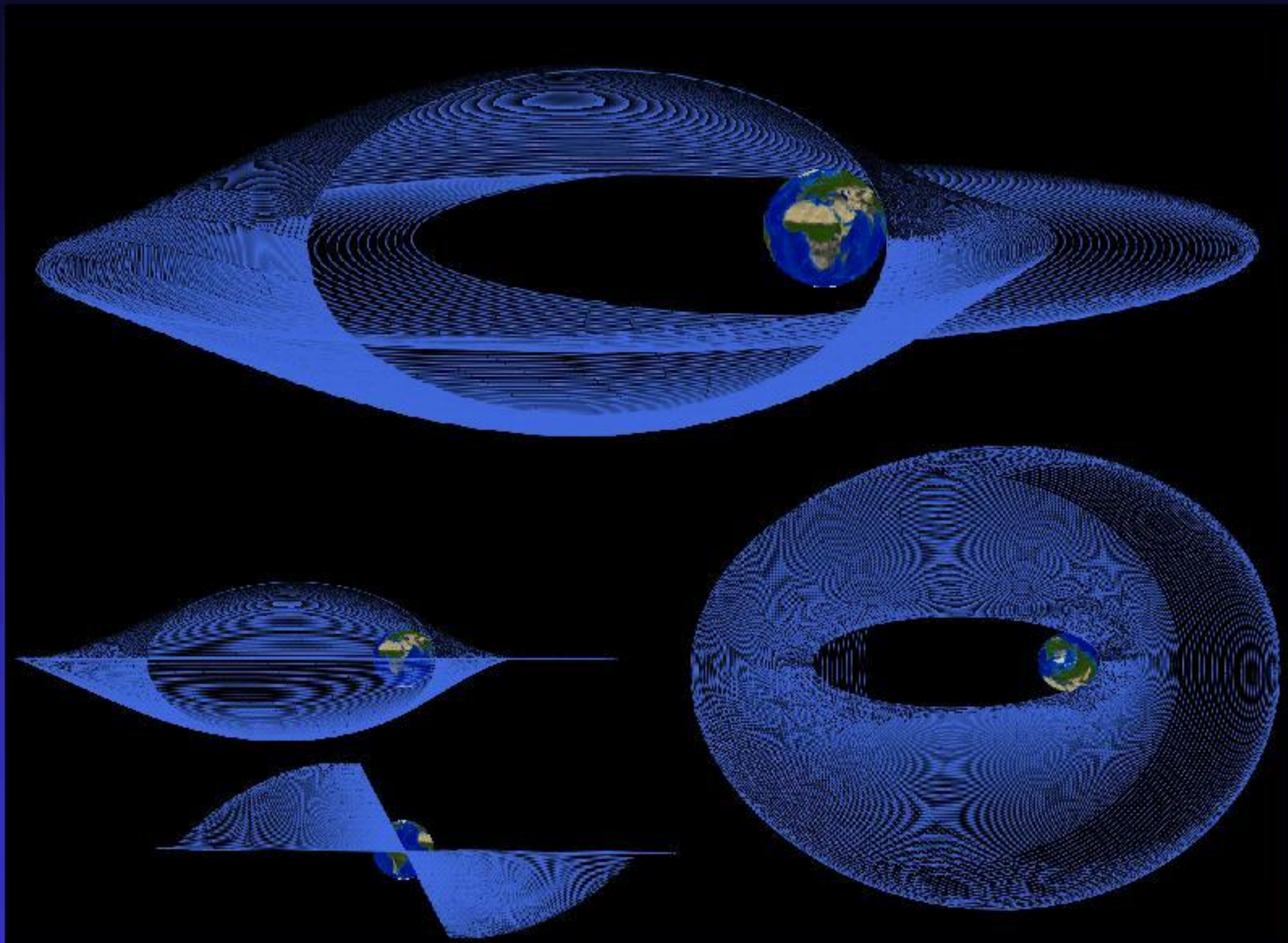


Эксцентриситет



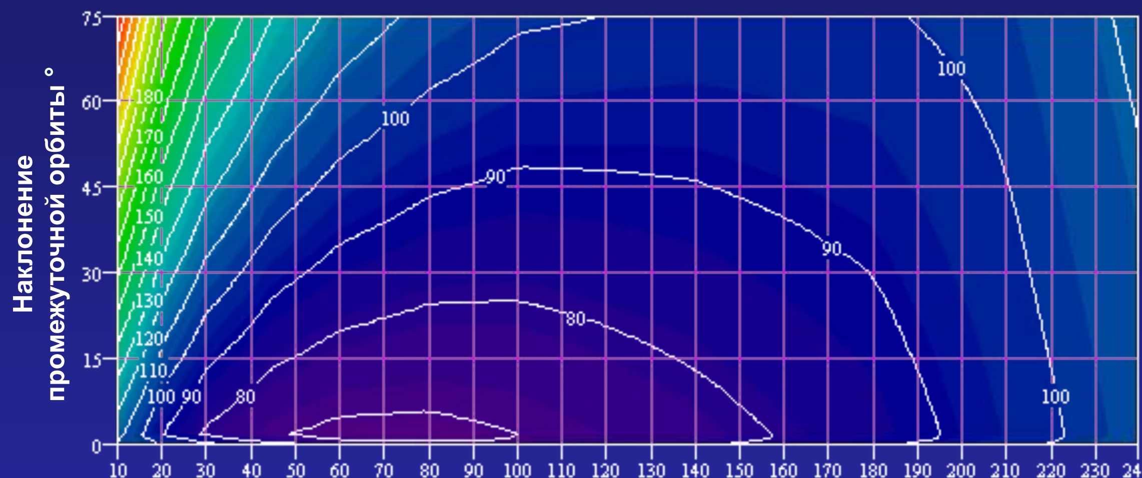
Углы тангажа и рысканья

ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА НА ГСО

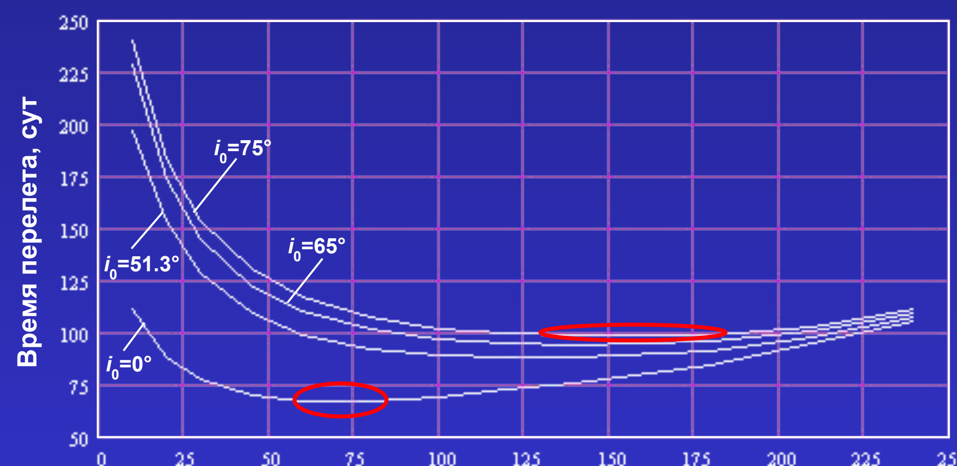


4.8. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЕТОВ НА ГСО С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТЫ

Высота перигея промежуточной орбиты 250 км, масса КА на ГСО 450 кг, тяга ЭРДУ 0.166 Н, удельный импульс ЭРДУ 1500 с



Высота апогея промежуточной орбиты, тыс. км



Высота апогея промежуточной орбиты, тыс. км

4.9. ВЫВОДЫ

1. Метод продолжения по параметру можно эффективно использовать для оптимизации многовитковых перелетов с малой тягой, что продемонстрировано на примере оптимизации по быстродействию перелетов с эллиптической промежуточной орбиты на ГСО.

2. В настоящее время не обнаружено каких-либо существенных ограничений на возможность использования разработанного метода в задачах с фиксированным временем и с различными краевыми условиями (межорбитальный перелет, набор заданной орбитальной энергии, разворот плоскости орбиты и т.д.).

3. Не обнаружено каких-либо ограничений на возможность учета внешних возмущающих сил при оптимизации траектории КА разработанным методом. Возмущающие силы, выраженные как через орбитальные элементы, так и через фазовый вектор КА, относительно легко могут быть введены в уравнения разработанного метода так как операции осреднения уравнений движения и вычисления производных от невязок краевой задачи по ее параметрам реализованы в рамках этого метода численно. Для учета возмущающих ускорений в уравнениях движения необходимы выражения для частных производных первого порядка от компонент этих ускорений по орбитальным элементам.

4. Разработанный метод позволил провести исчерпывающий анализ оптимальных по быстродействию перелетов с эллиптической промежуточной орбиты на ГСО, включая анализ влияния параметров промежуточной орбиты и основных проектных параметров КА на характеристики перелета и определение номинальных программ управления вектором тяги электроракетной двигательной установки КА.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный метод продолжения показал высокую эффективность для задачи оптимизации траекторий КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги. Комбинация двух вариантов метода продолжения - базового метода и метода продолжения по гравитационноиу параметру - позволяет быстро и исчерпывающе проводить анализ межпланетных траекторий.

С использованием метода продолжения были оптимизированы траектории КА с малой тягой, оканчивающиеся или начинающиеся в точке либрации L_2 системы Земля-Луна. Эти траектории использовались для построения квазиоптимальных траекторий перелета между орбитами искусственных спутников Земли и Луны.

Специально разработанная версия метода продолжения позволила провести полномасштабный анализ оптимальных по быстродействию пространственных траекторий перелета КА с малой тягой с эллиптической промежуточной орбиты на ГСО.

Таким образом, характеристики метода продолжения делают его полезным и эффективным инструментом анализа траекторий КА с ЭРДУ.