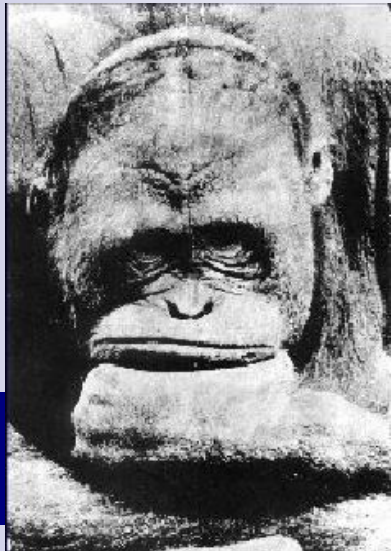
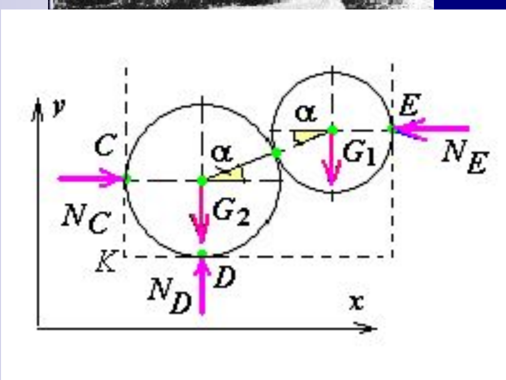
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий



Бондаренко А.Н.



Курс лекций по теоретической

Статика

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.
Завершение – Esc.
Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

- Лекция 8.

Сложение параллельных сил.

Центр параллельных сил.

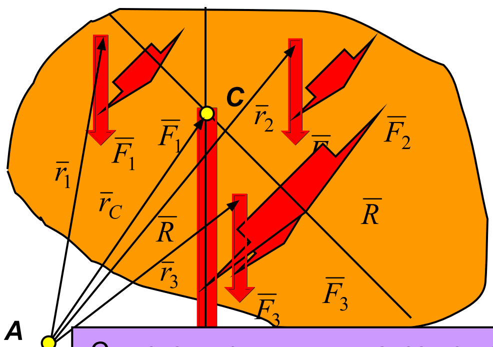
Центр тяжести. Определение положения центра тяжести однородных тел. Центры тяжести простейших фигур. Способы определения положения центров тяжести.

Лекция 8

- **Сложение параллельных сил** – Сложение двух параллельных сил подробно рассмотрено в демонстрационной программе автора по теории пар “Теория пар” на сайте МИИТа. Посмотреть…). Основной результат – две параллельные и направленные в одну сторону силы приводятся к одной силе – равнодействующей, приложенной в точке, делящей прямую на расстояния, обратно пропорциональные величинам сил.

  Последовательно складывая попарно параллельные силы приходим также к одной силе – равнодействующей ***R***: $\boxed{\overline{R} = \sum \overline{F}_i}$

  Поскольку силу можно переносить по линии ее действия, то точка приложения силы (равнодействующей) по существу не определена. Если все силы повернуть на один и тот же угол и вновь провести сложение сил, то получаем другое направление линии действия равнодействующей. Точка пересечения этих двух линий действия равнодействующих может рассматриваться, как точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол. Такая точка называется **центром параллельных сил**



Центр параллельных сил –точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол.

Для аналитического определения положения центра параллельных сил применим теорему Вариньона:

$\boxed{\overline{M}_A(\overline{R}) = \sum \overline{M}_{iA}}$ или $\boxed{\overline{r}_C \times \overline{R} = \sum \overline{r}_i \times \overline{F}_i}$.

Каждую из сил представим с помощью единичного вектора e , параллельному линиям действия сил:

$\boxed{\overline{F}_i = F_i \overline{e}}$ и $\boxed{\overline{R} = \sum \overline{F}_i = \sum F_i \overline{e}}$.

Тогда предыдущее равенство примет вид: $\boxed{\overline{r}_C \times (\sum F_i \overline{e}) = \sum \overline{r}_i \times F_i \overline{e}}$ или после перестановки скалярных

$\boxed{\ldots \overline{r}_i) \times \overline{e}}$

Из ра…

$\boxed{\overline{r}_C = \dfrac{\sum F_i \overline{r}_i}{\sum F_i}}$

Прое… …тические формулы для определения координат центра параллельных сил:

$$\boxed{x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}}$$

С учетом принятых гипотез при определении положения центра тяжести можно использовать формулы для определения положения центра параллельных сил:

$$\boxed{x_C = \frac{\sum \Delta G_i x_i}{\sum \Delta G_i}; \quad y_C = \frac{\sum \Delta G_i y_i}{\sum \Delta G_i}; \quad z_C = \frac{\sum \Delta G_i z_i}{\sum \Delta G_i}}$$

где ΔG_i – силы тяжести элементарных объемов.

- **Центр тяжести** – центр приложения равнодействующей сил тяготения (веса) материального тела.

  При определении положения центра тяжести тела используются гипотезы:

  1. Линии действия сил тяготения, приложенные к отдельным частицам тела, параллельны (рассматриваемые тела имеют размеры много меньшие радиуса Земли и углом между линиями действия сил тяготения частиц тел можно пренебречь);
  2. Ускорение свободного падения g = const (высота рассматриваемых тел много меньше радиуса Земли и изменением величины ускорения свободного падения по высоте тела можно пренебречь)
  3. Рассматриваемые тела – однородные (нет включений материалов с другой плотностью) и сплошные (нет пустот).

Лекция 8 (продолжение – 8.2)

- **Определение положения центра тяжести однородных тел –** Выделим *элементарный объем* $dV = dxdydz$. Сила тяжести такого объема равна $dG = \gamma dV$, где $\gamma = const$ - объемный вес. Замена суммирования дискретных сил тяжести ΔG_i непрерывным распределением приводит к интегральным выражениям по объему тела для определения координат центров тяжести, например, координаты x_C:

$$x_c = \frac{\int\limits_G x dG}{\int\limits_G dG} = \frac{\iiint x\gamma dxdydz}{\iiint \gamma dxdydz} = \frac{\int\limits_V x dV}{\int\limits_V dV}$$

Для всех трех координат получаются подобные выражения:

$$x_c = \frac{\int\limits_V x dV}{\int\limits_V dV} \qquad y_c = \frac{\int\limits_V y dV}{\int\limits_V dV} \qquad z_c = \frac{\int\limits_V z dV}{\int\limits_V dV}$$

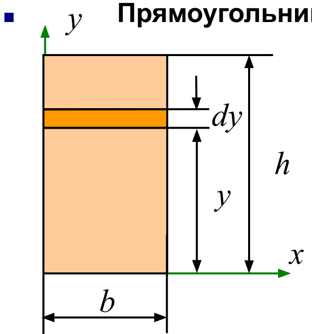
В частном случае плоского тела (постоянной толщины $H = const$), $dV = Hdxdy = HdS$:

$$x_c = \frac{\iint xHdxdy}{\iint Hdxdy} = \frac{\int\limits_S x dS}{\int\limits_S dS} \qquad x_c = \frac{\int\limits_S x dS}{\int\limits_S dS} \qquad y_c = \frac{\int\limits_S y dS}{\int\limits_S dS}$$

Для линейного тела (постоянного поперечного сечения S = const, ось – плоская кривая), $dV = SdL$:

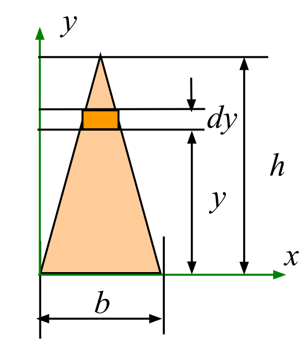
$$x_c = \frac{\int xSdL}{\int SdL} = \frac{\int\limits_L x dL}{\int\limits_L dL} \qquad x_c = \frac{\int\limits_L x dL}{\int\limits_L dL} \qquad y_c = \frac{\int\limits_L y dL}{\int\limits_L dL}$$

- **Определение положения центра тяжести простейших плоских тел:**
- **Прямоугольник:** $dS = bdy$



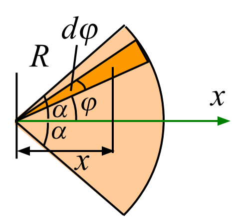
$$y_c = \frac{\int\limits_S y dS}{\int\limits_S dS} = \frac{\int_0^h ybdy}{\int_0^h bdy} = \frac{b\int_0^h ydy}{b\int_0^h dy} = \frac{b\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^h}{bh} = \frac{h}{2}$$

- **Треугольник:** $\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}; \qquad b_y = \frac{h-y}{h}b; \qquad dS = b_y dy = \frac{h-y}{h}bdy$



$$y_c = \frac{\int\limits_S y dS}{\int\limits_S dS} = \frac{\int_0^h y\frac{h-y}{h}bdy}{\int_0^h \frac{h-y}{h}bdy} = \frac{\frac{b}{h}\int_0^h (hy - y^2)dy}{\frac{b}{h}\int_0^h (h-y)dy} = \frac{\frac{b}{h}\left.\left(h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\right|_0^h}{\frac{b}{h}\left.\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\right|_0^h} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{1}{2}bh} = \frac{h}{3}$$

- **Круговой сектор:**



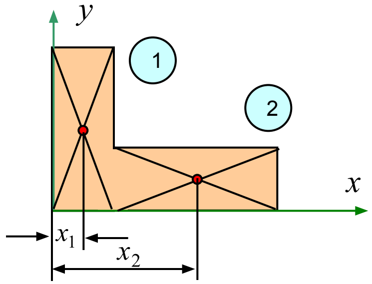
$$dS = \frac{1}{2}R(Rd\varphi) = \frac{1}{2}R^2 d\varphi$$

$$x_c = \frac{\int\limits_S x dS}{\int\limits_S dS} = \frac{2\int_0^\alpha \frac{2}{3}R\cos\varphi\frac{R^2}{2}d\varphi}{2\int_0^\alpha \frac{R^2}{2}d\varphi} = \frac{\frac{2}{3}R^3\left.\sin\varphi\right|_0^\alpha}{R^2\left.\varphi\right|_0^\alpha} = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

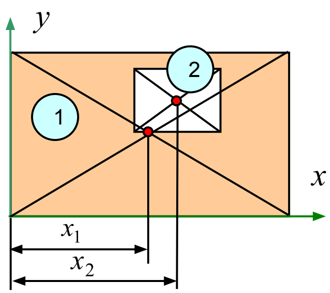
Лекция 8 (продолжение – 8.3)

Методы определения положения центра тяжести сложных фигур –

1. **Метод разбиения** – сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются:



$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}$$



2. **Метод отрицательных площадей** – так же, как и в методе разбиения, сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются, но при наличии отверстий или пустот удобно их представление в виде “отрицательных” областей. Например, следующая фигура вместо разбиения на 4 обычных прямоугольника, может быть представлена как совокупность двух прямоугольников, один из которых имеет отрицательную площадь:

$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 (-S_2)}{S_1 + (-S_2)}$$

Замечание. Поскольку координата, например, x2, может быть отрицательна, то не следует представлять это выражение с использованием разностей:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2}$$

3. **Метод симметрии** – при наличии у фигуры оси или плоскости симметрии центр тяжести лежит на этой оси или в этой плоскости. С учетом этого свойства уменьшается количество координат центра тяжести, подлежащих определению. См., например, определение положения центра тяжести кругового сектора.

4. **Метод интегрирования** – при наличии у фигуры достаточно простого контура, описываемым известным уравнением (окружность, парабола и т.п.), выбирается элементарная площадка или полоска и выполняется аналитическое интегрирование. См. например, определение положения центра тяжести треугольника или кругового сектора. При более сложном контуре, который может быть разбит на более простые граничные отрезки используется предварительно метод разбиения. При сложностях с аналитическим интегрированием используются численные методы интегрирования.

5. **Метод подвешивания** – экспериментальный метод, основанный на том, что при подвешивании тела или фигуры за какую-либо произвольную точку центр тяжести находится на одной вертикали с точкой подвеса. Для определения положения центра тяжести плоской фигуры достаточно ее подвесить поочередно за две любые точки и прочертить соответствующие вертикали, например, с помощью отвеса, и точка пересечений этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.