Байкальская Школа - 2011

Основные направления эконофизики. Фрактальный анализ финансовых рядов

Дубовиков Михаил Михайлович

Директор по стратегии

ИНТРАСТ управляющая компания

Эконофизика. Этапы развития

1995	Появление термина для обозначения работ *специалистов по статфизике* в области экономики и финансов
1997	*Workshop on Econophysics* в Будапеште
2001	Первая международная конференция на Бали
2002	Начало институциональной фазы развития
2009	Первый всероссийский конгресс в Москве
Настоящее время	Секция эконофизики – неотъемлемая часть многих ежегодных международных и националных конференций по социальным наукам (ESHIA (international Heterogeneous Interacting Agents), AKSOE и др.)

План доклада

История науки о финансовых временных рядах

Анализ эмпирических данных. Универсальные распределения

Фрактальный анализ финансовых рядов

Агентно – ориентированные модели в финансах

Другие разделы экономики

Эконофизика и мэйнстрим

Перспективы развития эконофизики в России

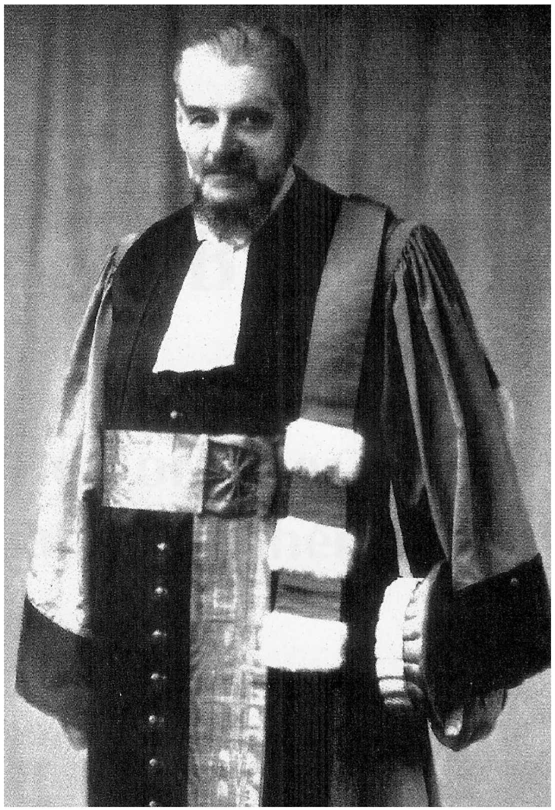
Финансовые временные ряды.
История. *Динамический подход.*

90-е гг. 19 в. – Формулировка принципов Ч. Доу (Ch. Dow).

30-е гг. 20 в. – Утверждение концепции. Создание основ технического анализа (J. Magee, W. Gann, R. Elliott, и т.д.)

80-е гг. 20 в. – Использование методов теории динамического хаоса. Теорема Такенса.
(D. Ruelle, F. Takens, N. Packard)

Финансовые временные ряды.
История. Стохастический подход.



L. Bachelier (1900)

ПЕРВЫЙ ПОСТУЛАТ.

Приращения цены на непересекающихся временных интервалах – независимы.

ВТОРОЙ ПОСТУЛАТ.

Приращения цены на любом интервале имеют нормальное (гауссово) распределение с плотностью

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{x^2/2\sigma^2}$$

Финансовые временные ряды

История. *Стохастический подход*

Отказ от постулата независимости

1. **Fractional Brownian motion** (*B. Mandelbrot, 1968)*

$$\sigma_t^2 = \sigma_0^2 \left| t - t_0 \right|^{2\mathrm{H}},$$

$$\text{где } \; t > t_0, \quad H - \text{показатель Херста}.$$

2. **Autoregressive conditional heteroscedasticity, ARCH**

(R. F. Engle, 1982)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_P x_{t-p}^2,$$

$$\text{где } \; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p - \text{положительные числа}, \mathrm{x}_\mathrm{t} - \text{случайная величина}$$

$$\text{с нулевым средним и дисперсией } \; \sigma_t^2.$$

Финансовые временные ряды

История. *Стохастический подход*

Отказ от постулата нормальности

(***B. Mandelbrot, 1963)***

Скейлинговый принцип:
на реальных рынках в условиях конкуренции не существует привилегированных временных интервалов. Это означает, что Функция доходности

$$R_{\Delta t} \equiv \ln X(t+\Delta t) - \ln X(t)$$

является масштабно-инвариантной.

Вывод: движение цены описывается «полетом Леви» (Levi flight)

Распределение Леви
(Levi, 1925)

Общий вид устойчивого распределения:

$$\ln\varphi(q) = \begin{cases} imq - \gamma|q|^{\alpha}\left[1 - i\beta\dfrac{q}{|q|}\,tg\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha\right)\right], & \textit{при}\ \alpha \neq 1 \\ imq - \gamma|q|\left[1 + i\beta\dfrac{q}{|q|}\dfrac{2}{\pi}\ln|q|\right], & \textit{при}\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\textit{где}\ \varphi(q) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{iqx}dx; \quad 0 < \alpha \leq 2; \quad \gamma > 0; \quad m \in \Re; \quad -1 < \beta < 1$$

$$\textit{При} \quad \alpha = 2, \quad \varphi_2(q) = e^{-\left(\sigma^2/2\right)q^2} = e^{-\gamma q^2}$$

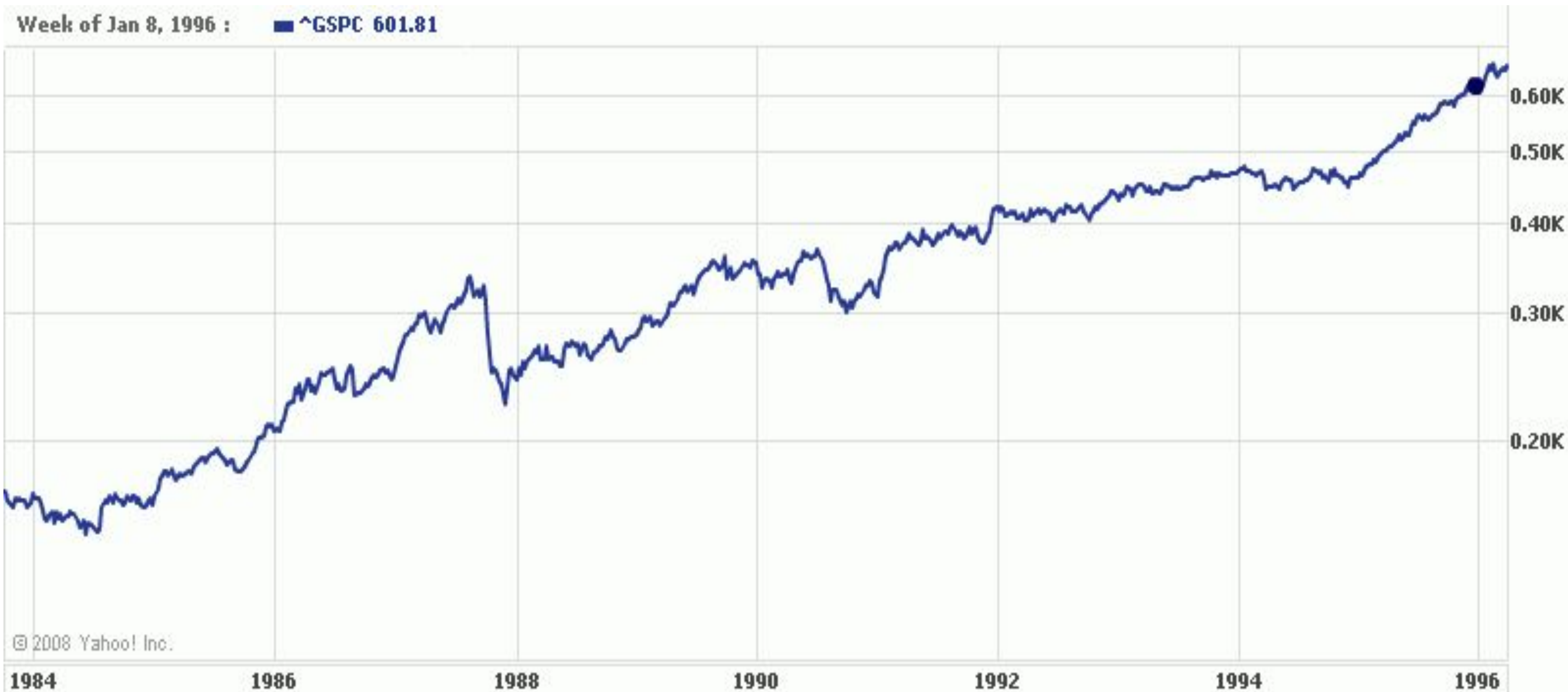
Распределение Леви

$$\textit{В случае} \quad \beta = 0, \quad m = 0; \quad P_L(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\gamma|q|^\alpha} \cos\left(qx\right)dq$$

$$\textit{При} \;\; \gamma \to 0, \quad |x| \to \infty; \qquad P_L(|x|) \sim |x|^{-(1+\alpha)}$$

При $\alpha < 2$, *распределение Леви имеет бесконечную дисперсию*

Индекс S&P 500 (пятисот крупнейших по капитализации американских компаний) за период с 1984 по 1996 гг.

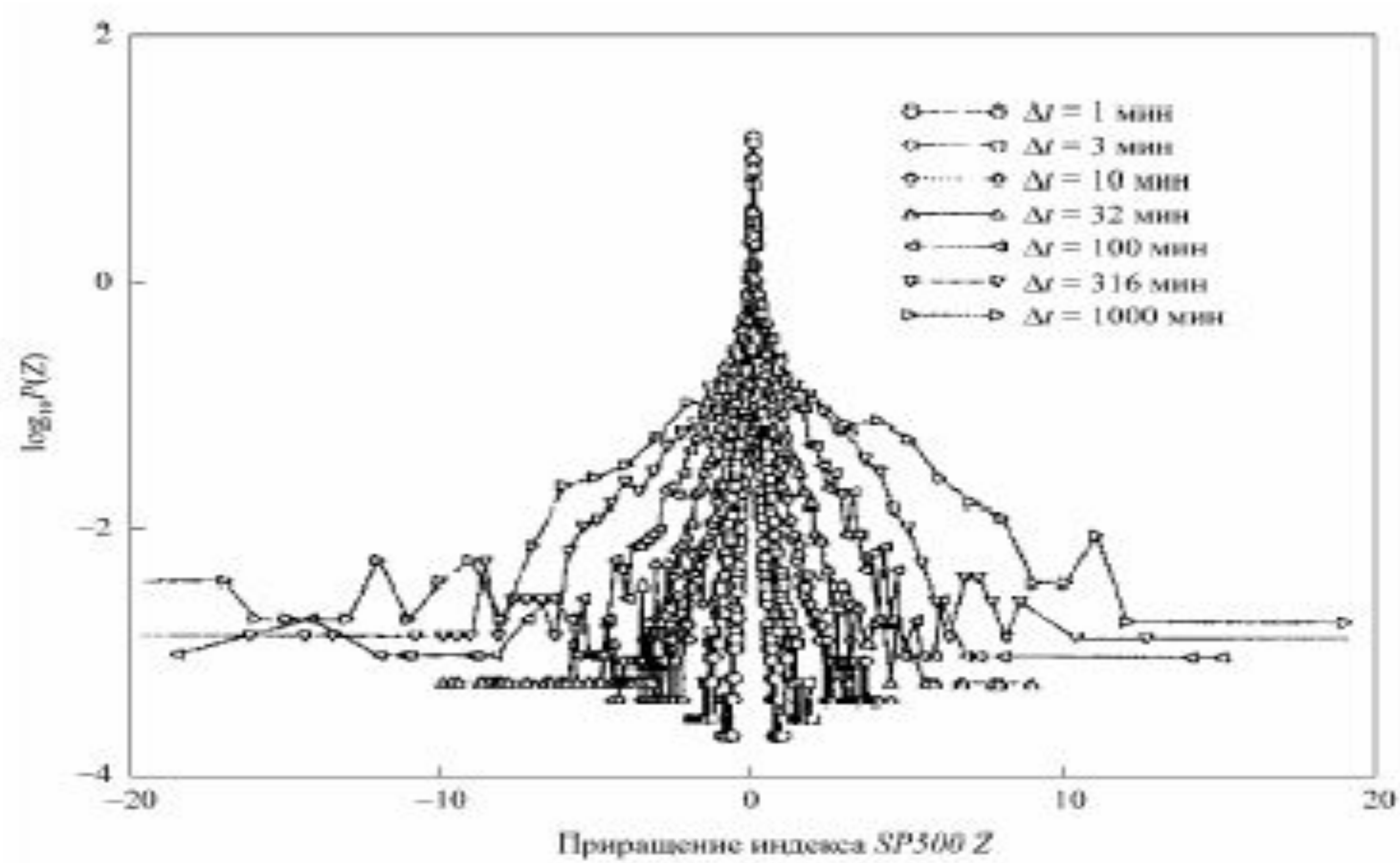


Исследование эмпирических данных.

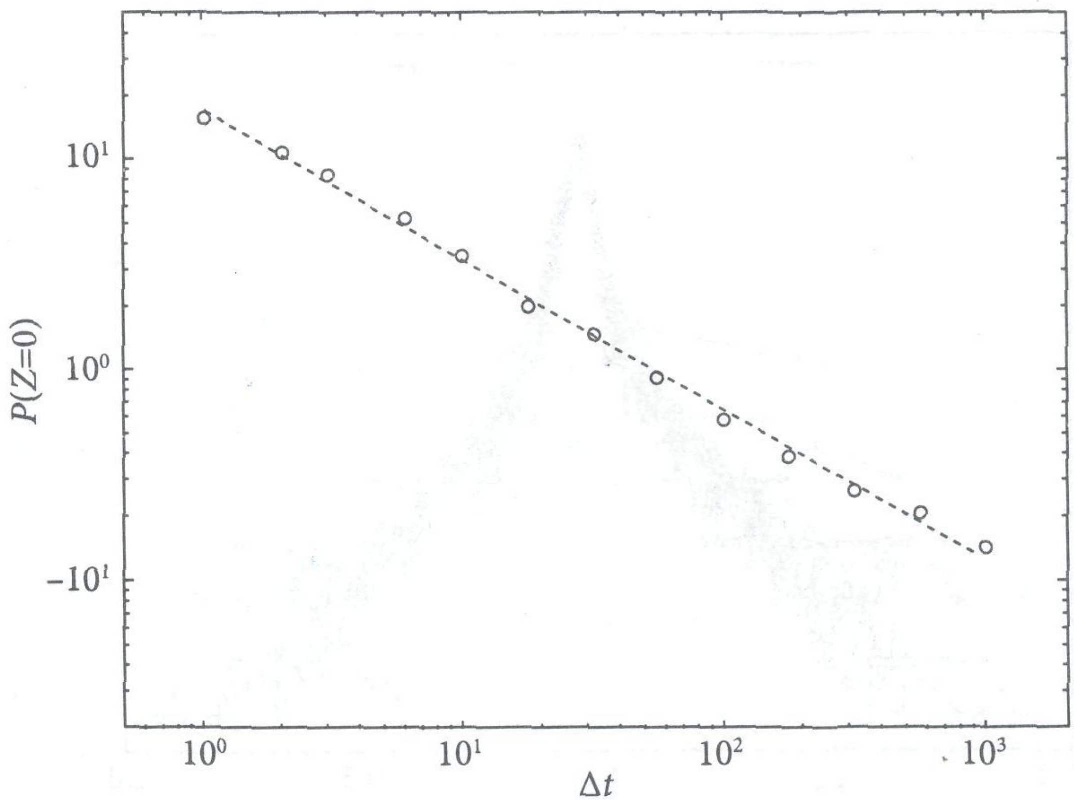
Индекс S&P 500 (H. Stanley, R. Mantegna)

$$Z_{\Delta t}(t) \equiv X(t+\Delta t) - X(t),$$

где $X(t)$ – *значение индекса в момент* t

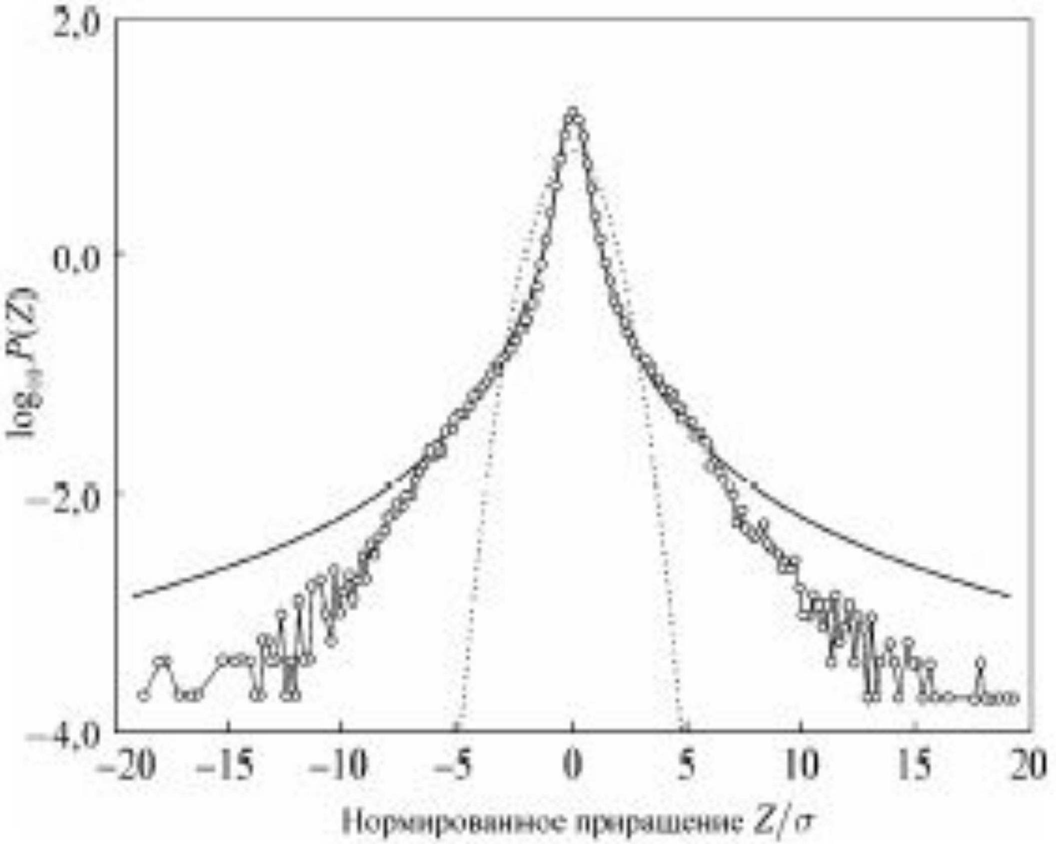


Исследование эмпирических данных.
Индекс S&P 500 (H. Stanley, R. Mantegna)



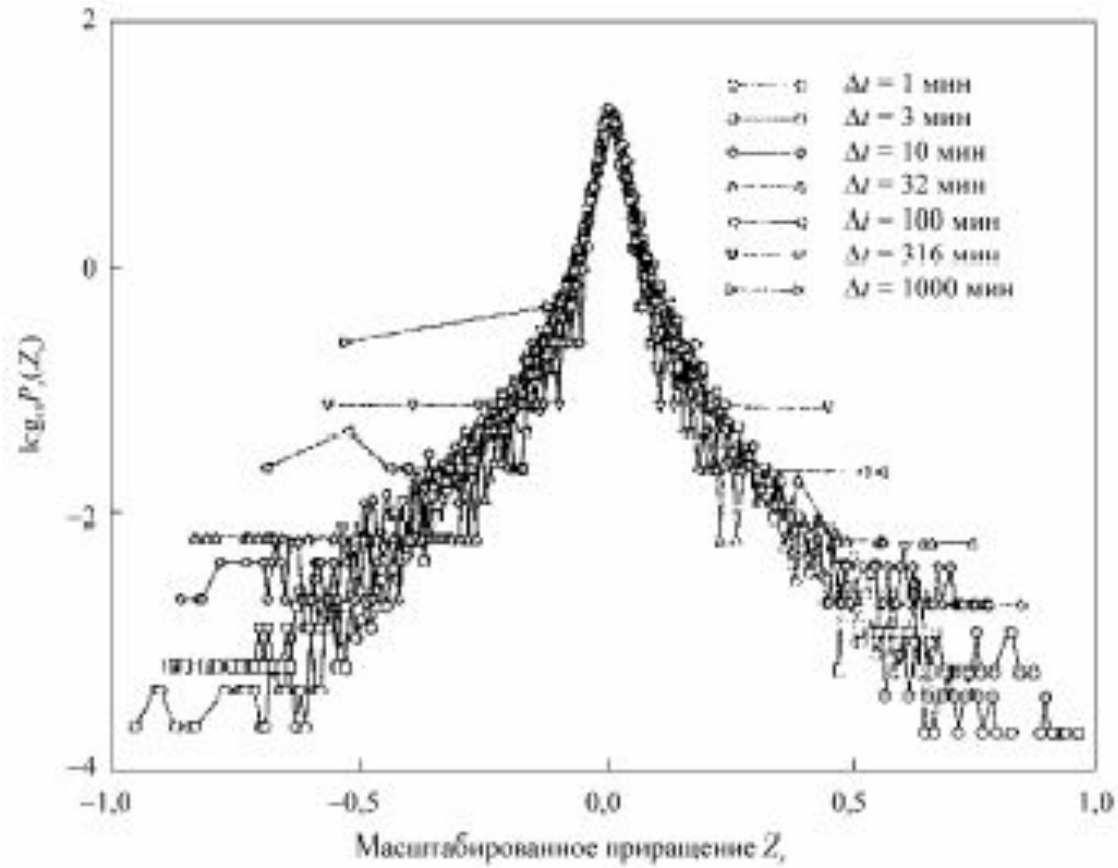
$$\textit{Масштабируемые переменные}: \quad \tilde{Z} = \frac{Z}{(\Delta t)^{1/\alpha}}; \quad P(\tilde{Z}) = \frac{P(Z)}{(\Delta t)^{-1/\alpha}}$$

Исследование эмпирических данных.
Индекс S&P 500 (H. Stanley, R. Mantegna)



Обозначим $Z_{\Delta t}/\sigma$ *через* η, *тогда*: $P_L(\eta) = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma \Delta t x^\alpha} \cos(\eta x) dx$, *где* $\alpha \approx 1{,}4$ $\gamma \approx 0{,}00375$

Исследование эмпирических данных. Индекс S&P 500 (H. Stanley, R. Mantegna)



Масштабируемые переменные: $\tilde{Z} = \frac{Z}{(\Delta t)^{1/\alpha}}; \quad P(\tilde{Z}) = \frac{P(Z)}{(\Delta t)^{-1/\alpha}}$

Исследование эмпирических данных редких событий

(P. Gopikrishnan, V. Plerou, H. Stanley)

$$P\left(\left|R_{\Delta t}\right| > x\right) \sim x^{-\xi_r}$$

$$P\left(\left|V_{\Delta t}\right| > x\right) \sim x^{-\xi_v}$$

$$P\left(\left|N_{\Delta t}\right| > x\right) \sim x^{-\xi_n}$$

Здесь $\mathrm{R}_{\Delta \mathrm{t}}$ *– доходность,* $V_{\Delta t}$ *– объем продаж,* $\mathrm{N}_{\Delta \mathrm{t}}$ *– число сделок на интервале* Δt;

$\xi_{\mathrm{r}} \approx 3$, $\xi_v \approx 1{,}5$, $\xi_n \approx 3{,}4$

Фракталы

Определение размерности (*F. Hausdorff*, 1919)

(для компактного множества в произвольном метрическом пространстве)

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)},$$

где $N(\delta)$ *– минимальное число шаров радиуса* δ, *покрывающих исходное множество.*

Мотивация: $N(\delta) \sim (1/\delta)^D$ *(D=1,2,3)*

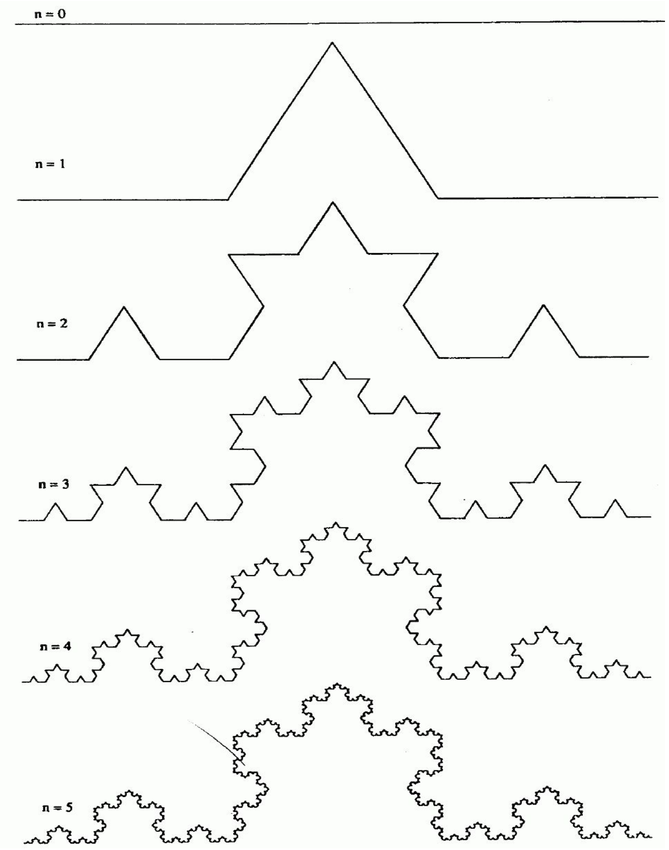
Фракталы

Определение (*B. Mandelbrot):*

Фрактал *– это множество, для которого хаусдорфова размерность* ***D*** *строго больше его топологической размерности* $\boldsymbol{D_T}$

Фракталы

Кривая Коха. Внутренняя размерность.



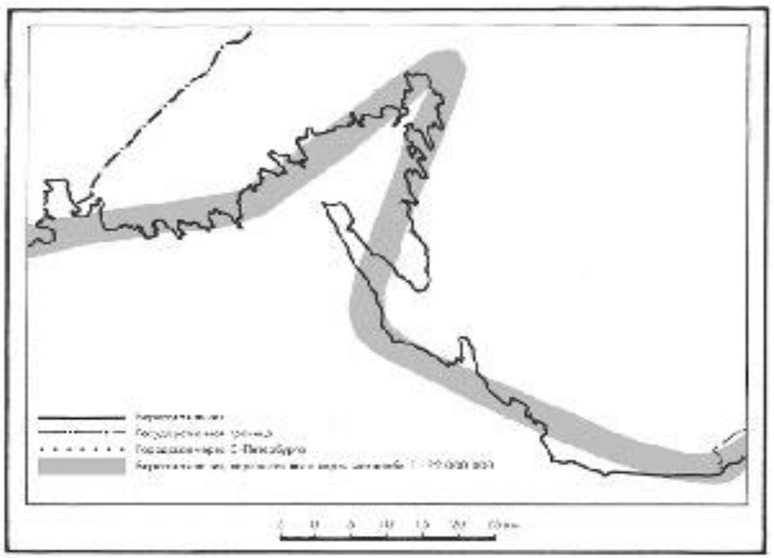
$$при \;\; \delta = (1/3)^n,$$

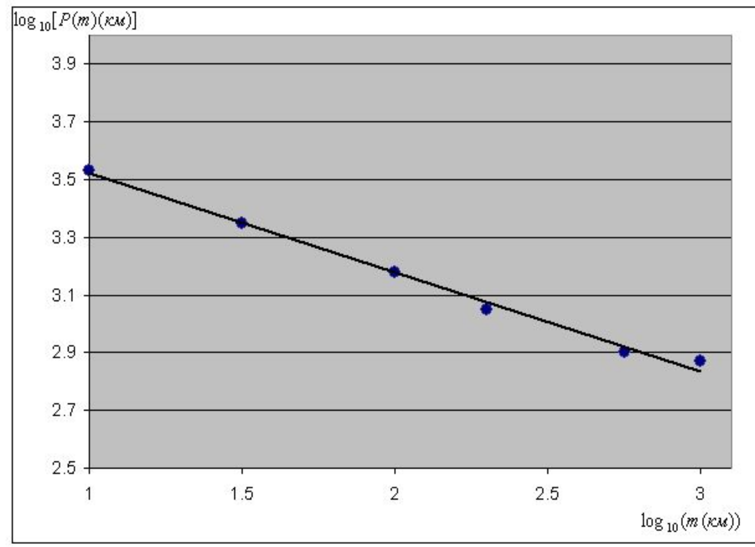
$$N(\delta) = 4^n$$

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$$

Фракталы

Береговая линия Британии (*L.F. Richardson*, 1961)





$$P(\delta) \sim \delta^{-\alpha} \qquad P(\delta) = N(\delta)\delta \qquad N(\delta) \sim \delta^{-(\alpha+1)}$$

$$D = \alpha + 1 = 1{,}24$$

Отличия природных фракталов от модельных

- *Во-первых*, естественные фракталы не бывают строго симметричными. Свойство же самоподобия для них выполняется лишь в среднем.
- *Во-вторых*, при вычислении размерности естественных фракталов, всегда исключаются масштабы, меньше некоторого минимального масштаба структуры.
- *В-третьих*, для естественных фракталов отсутствует система предфракталов. Поэтому система аппроксимаций симплексами, необходимая для определения размерности, является в общем случае достаточно произвольной.

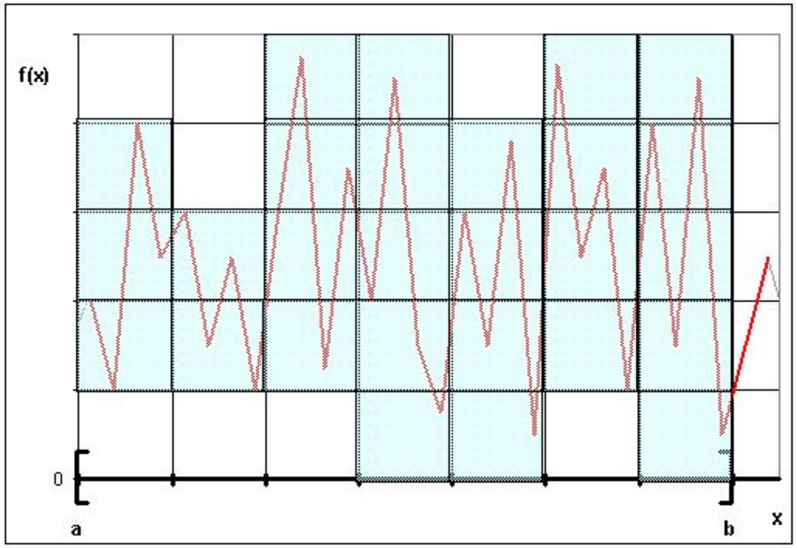
Фракталы

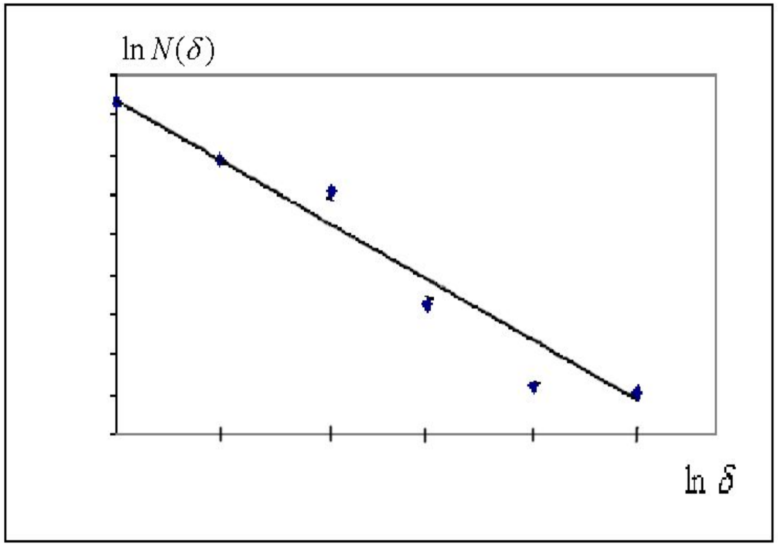
Финансовые временные ряды

Движения цен большинства финансовых инструментов внешне похожи, на разных масштабах времени и цены. По внешнему виду графика наблюдатель не может сказать, относятся ли данные к недельным, дневным или же часовым изменениям.

Фракталы

Финансовые временные ряды
Клеточная размерность





$$N(\delta) \sim \delta^{-D}$$

Фракталы

Финансовые временные ряды Показатель Херста H

При H $\approx$ 0,5 – временной ряд находится в состоянии случайного блуждания

При H > 0,5 – наблюдается тренд, который тем устойчивее, чем больше H

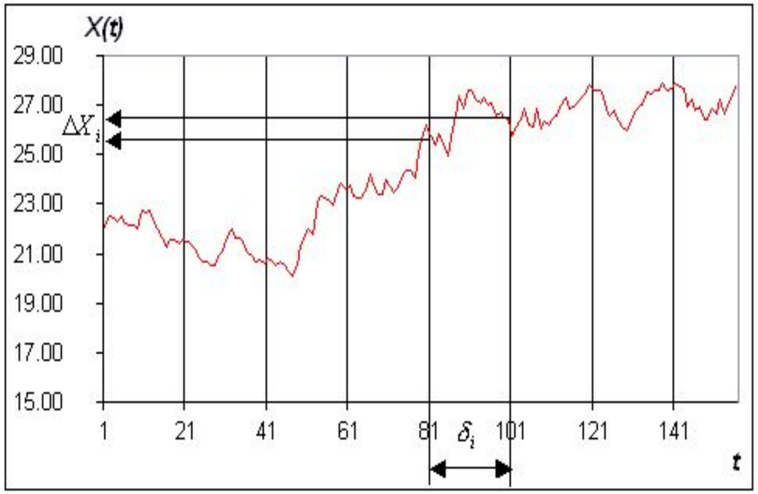
При H < 0,5 – наблюдается флэт

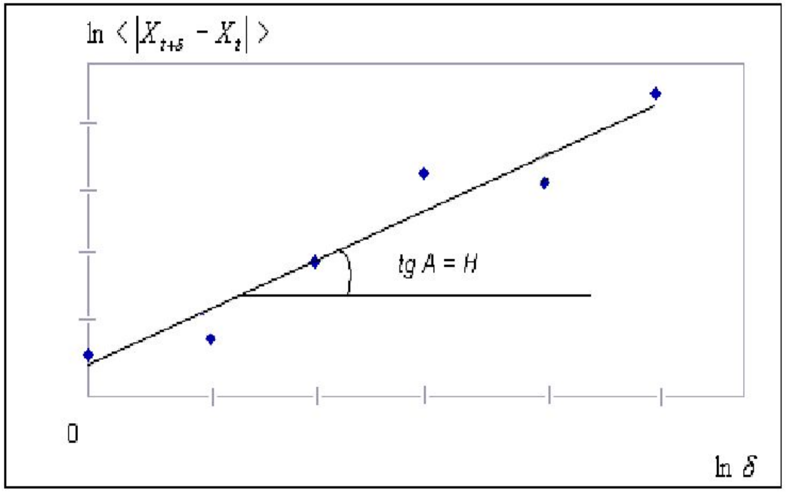
Для гауссовых случайных процессов

$D=2-H$

Фракталы

Финансовые временные ряды. Показатель Херста H

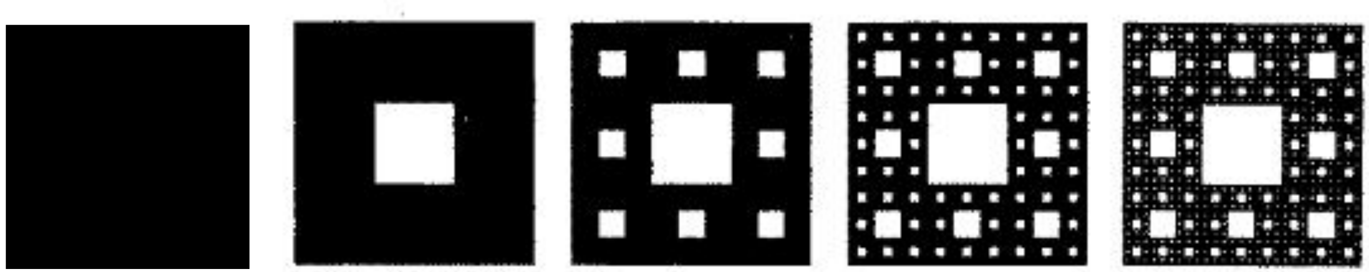




$$< \left| \Delta X(\delta) \right| > = < \left| X_{t+\delta} - X_t \right| > \sim \delta^H$$

Фракталы

Ковер Серпинского. Клеточная размерность

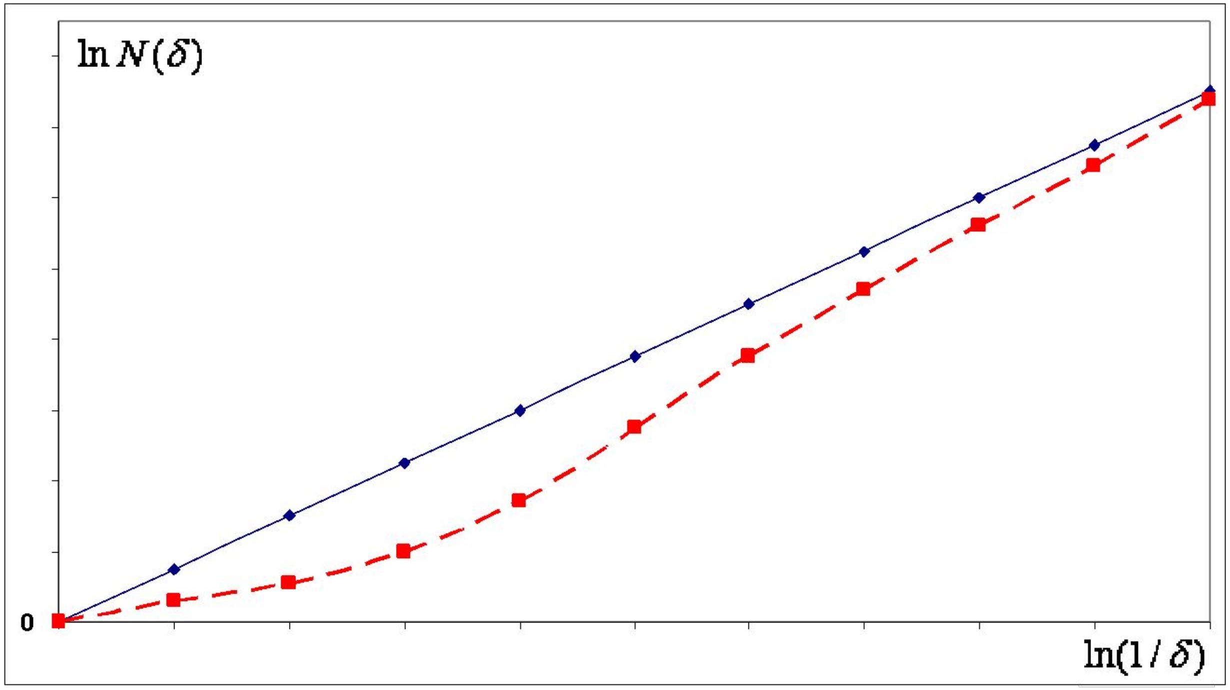


$$при\ \ \delta = (1/3)^n, \qquad N(\delta) = 8^n$$

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.89$$

Фракталы

Сравнение результатов использования различных аппроксимаций для ковра Серпинского



$$N(\delta) \sim \delta^{-D}$$

Фракталы

Финансовые временные ряды.

Асимптотика для площади покрытий

$$N(\delta) \sim (1/\delta)^{D} \Rightarrow S(\delta) \sim \delta^{2-D},$$

$$при\ \ \delta \to 0$$

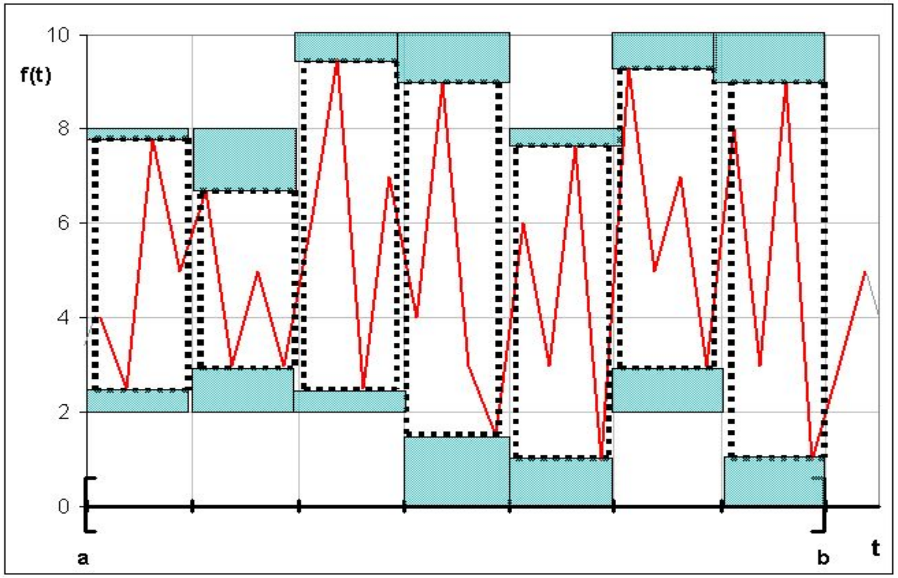
Фракталы

Финансовые временные ряды

Размерность минимального покрытия

Индекс фрактальности μ

Для функции f(t), определенной на [a,b] введем равномерное разбиение отрезка $\omega_n = [a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b]$, *где* $t_i - t_{i-1} = \delta = (b-a)/n \ (i = 1,2,...,n)$ и рассмотрим минимальное покрытие графика f(t). Тогда:



$$S_\mu(\delta) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\delta)\delta \sim \delta^{2-D},$$
$$\text{при} \quad \delta \to 0.$$

Здесь A_i *– амплитуда* f(t) на i-м интервале

Фракталы

Финансовые временные ряды

Размерность минимального покрытия

Индекс фрактальности μ

Введем обозначение: $$V_f(\delta) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\delta)$$

Поскольку $S_\mu(\delta) \sim \delta^{2-D_\mu}$ то $V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu}$,

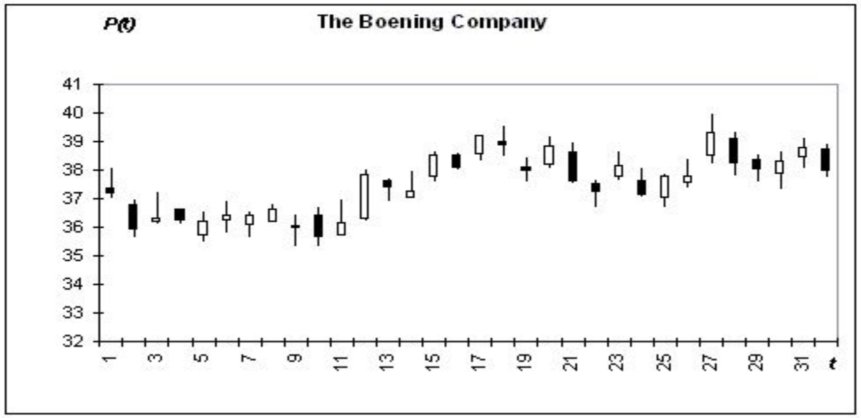
где $$\mu = D_\mu - 1 \equiv D_\mu - D_T$$

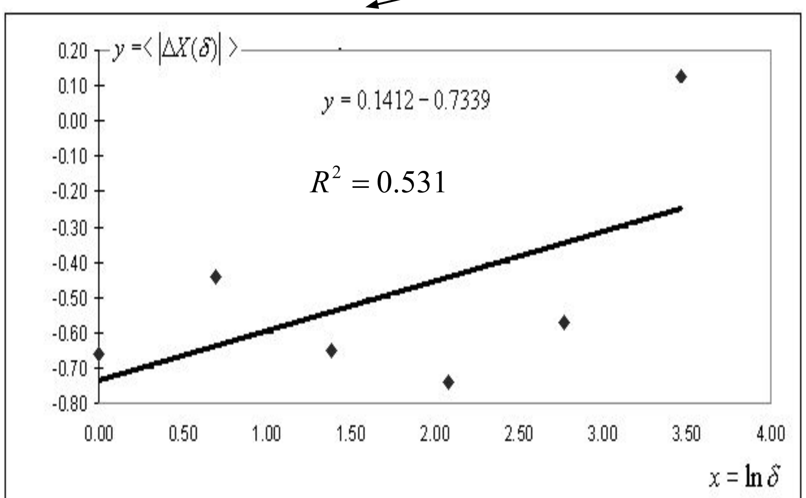
Назовем D_μ - ***размерностью минимального покрытия,***

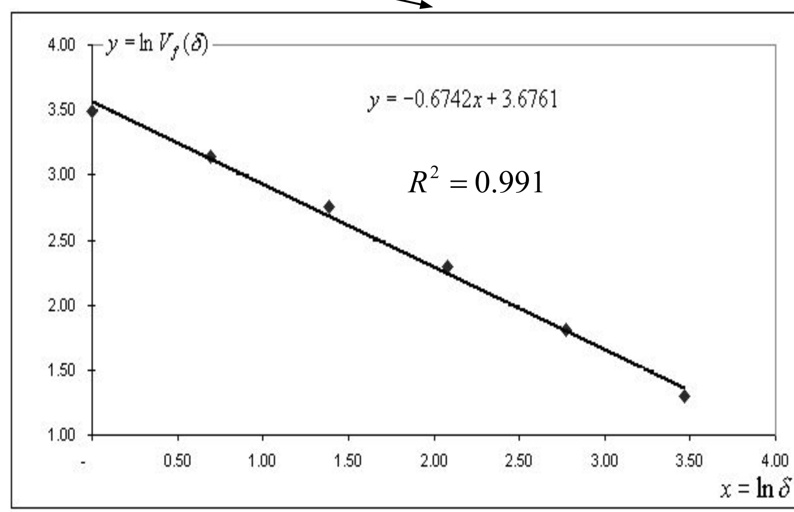
μ - ***индексом фрактальности***

Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

Быстрый выход на степенную асимптотику

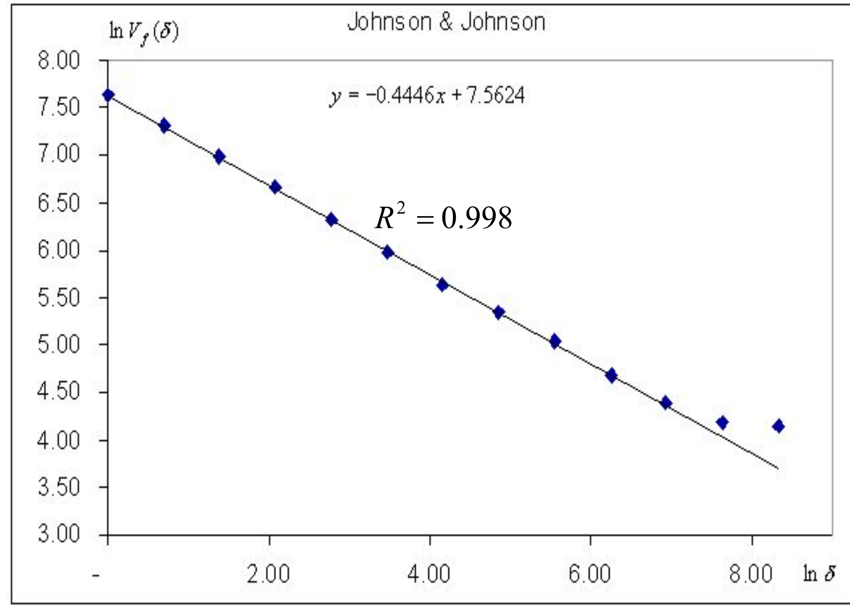






Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

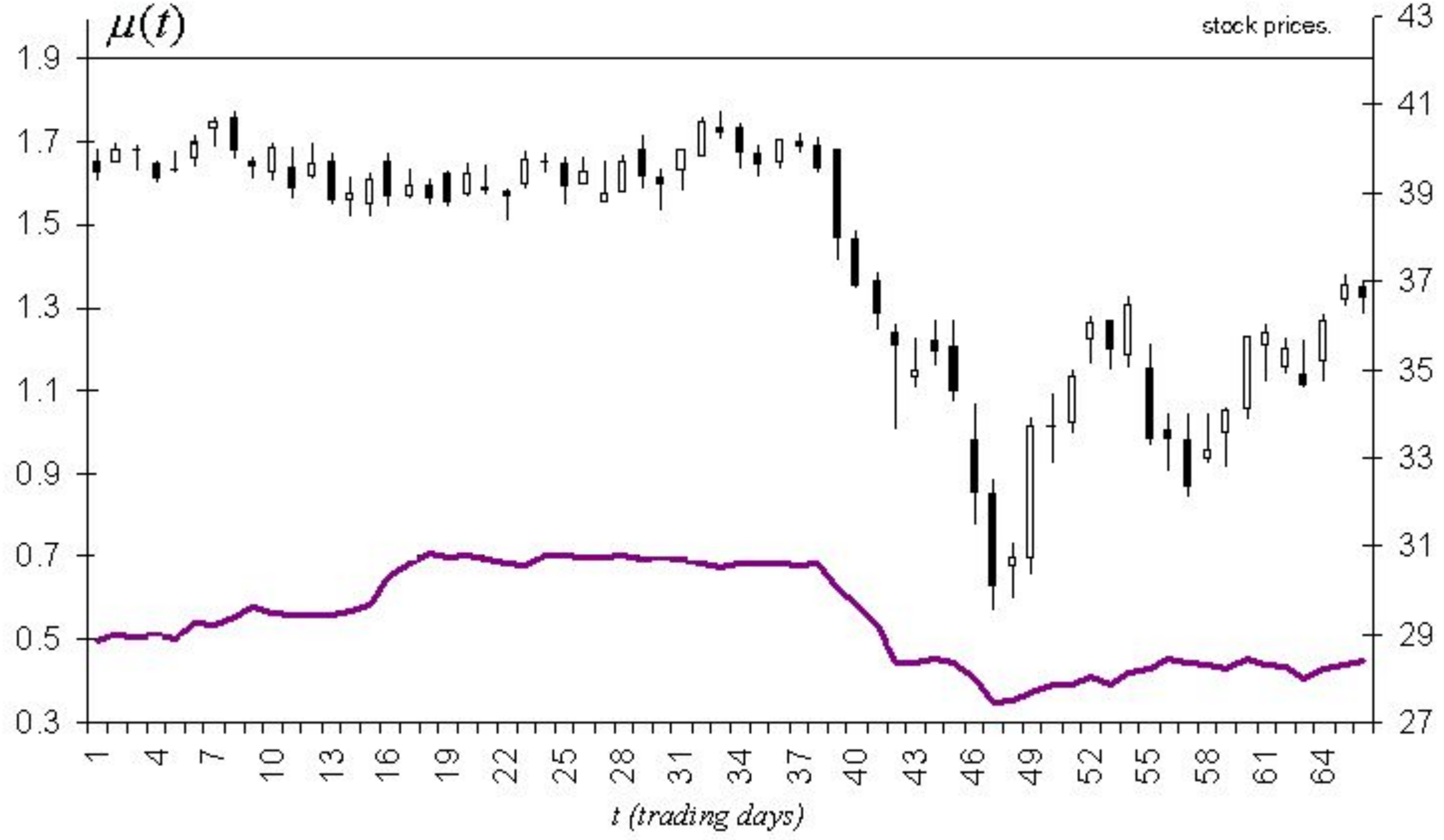
Быстрый выход на степенную асимптотику



Типичная диаграмма для вычисления μ при длине исходного ряда 4096 дней:

Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

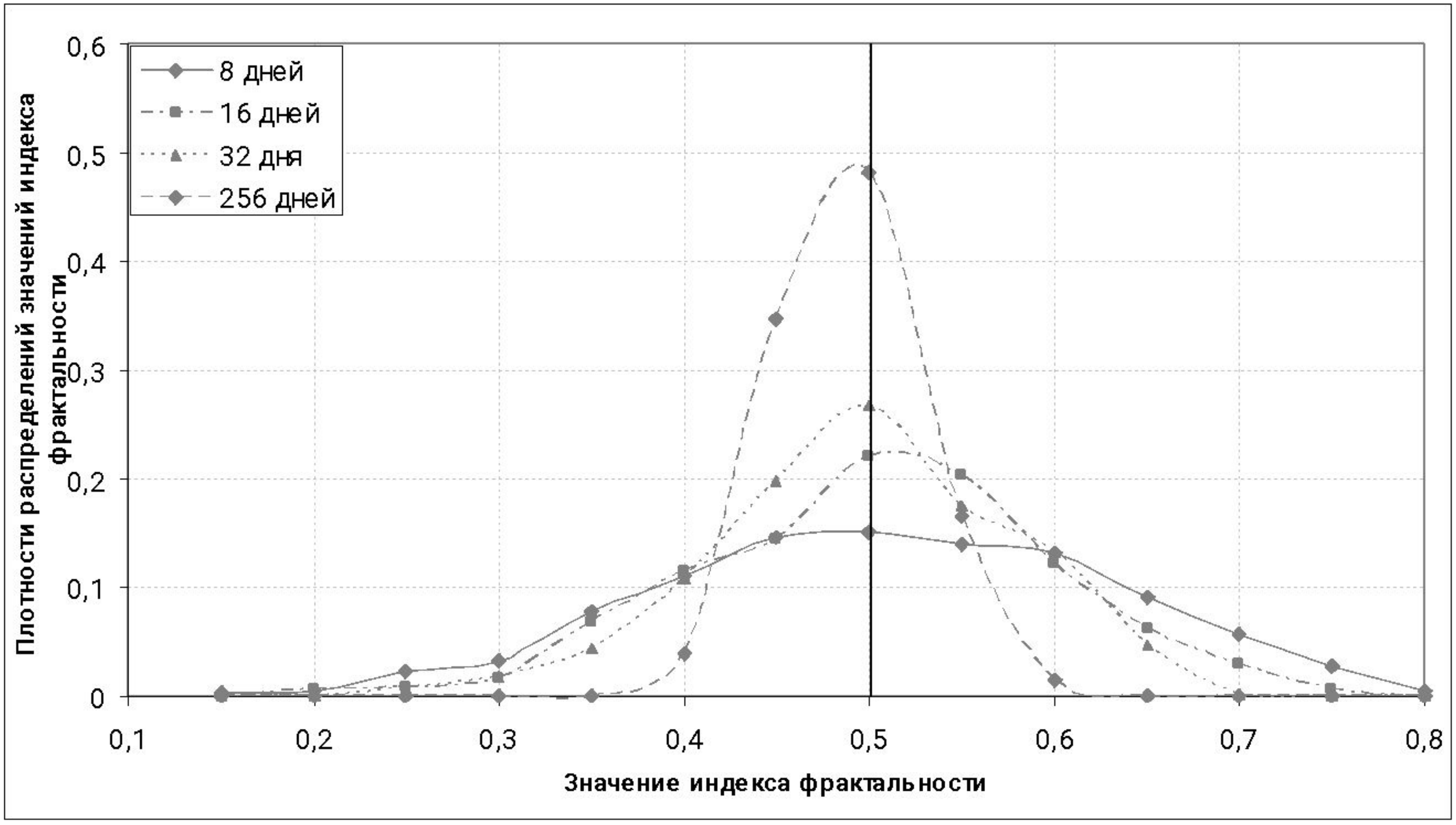
Типичное поведение ряда и функции μ_t



Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

Распределения вероятности значений индекса μ_t

(на примере дневных цен акций компании Ford за период с 03.01.2000 по 30.11.2010)

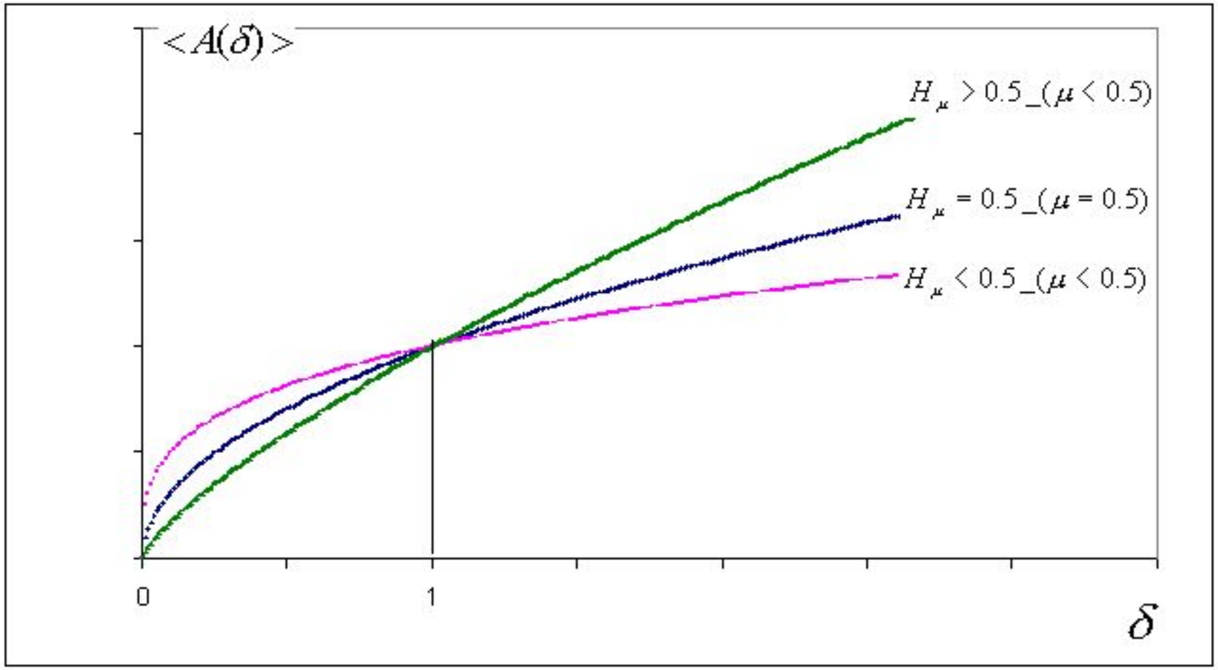


Эффект увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных

Введем $< A(\delta) > \equiv V_f(\delta)/n$

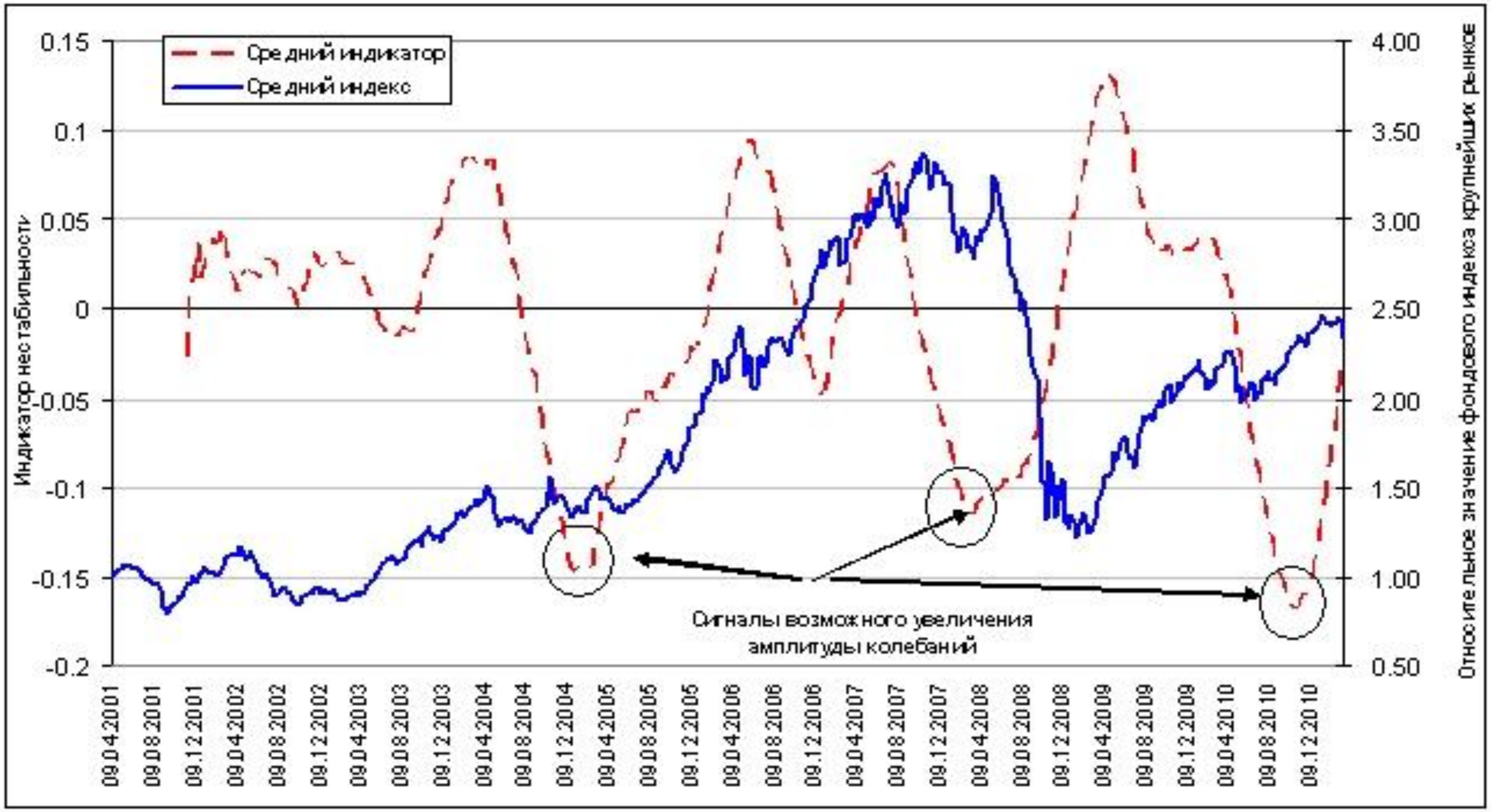
$$1/n \sim \delta \quad \Rightarrow \quad < A(\delta) > \sim V_f(\delta)\,\delta \sim \delta^{1-\mu} \equiv \delta^{H_\mu},$$

где $H_\mu = 1 - \mu$



Эффект увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных

Индикатор Старченко.



Модели обвалов на финансовом рынке

1. Инвесторы и спекулянты. Самоорганизованная критичность (P. Back)

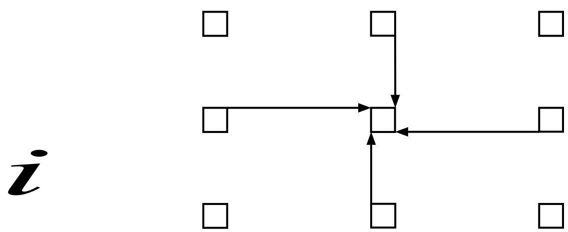
2. Модели взаимодействующих агентов (D. Sornette, J-P. Bouchaud, T. Lux)

$$s_i(t) = sign\left(\mathrm{K} \sum_{j \in N_i} s_j (t - \Delta t) + \varepsilon_i \right), \qquad \mathrm{K}>0$$

где $\operatorname{sign}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1, & \textit{при} \quad \mathrm{x} > 0 \\ -1, & \text{при} \quad \mathrm{x} \le 0 \end{cases}$ $\quad K$ *– коэффициент влияния*, $\mathrm{N_i}$ *– число соседей, влияющих на решение* i-го агента, ε_i *– гауссов шум с нулевым средним и единичной дисперсией, определяющий собственное мнение агента*

Модели обвалов на финансовом рынке

2. а) Решетчатые модели. Модель Изинга. Перколяция.

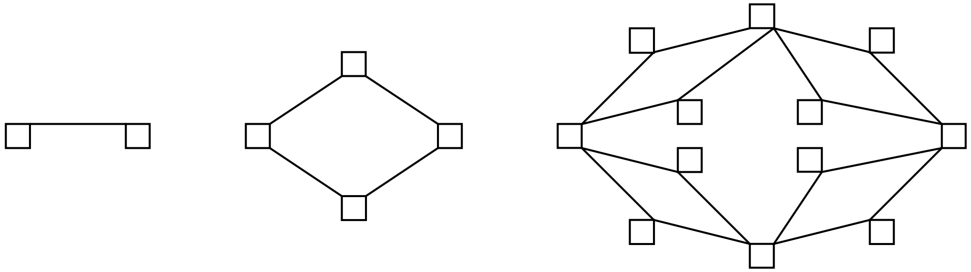


$$X(t) = a_0 + a_1 (t_c - t)^\nu$$

где t_c *– точка наибольшего риска обвала,* a_0, a_1, ν *– константы*

Модели обвалов на финансовом рынке

2. а) Иерархические модели.



$\mathrm{m} = 0 \qquad \mathrm{m} = 1 \qquad \mathrm{m} = 2$

После m повторений имеем $\frac{2}{3}\left(2+4^{m}\right)$ *агентов и* 4^{m} *связей*

Модели обвалов на финансовом рынке

2. а) Иерархические модели. Логопериодические колебания.

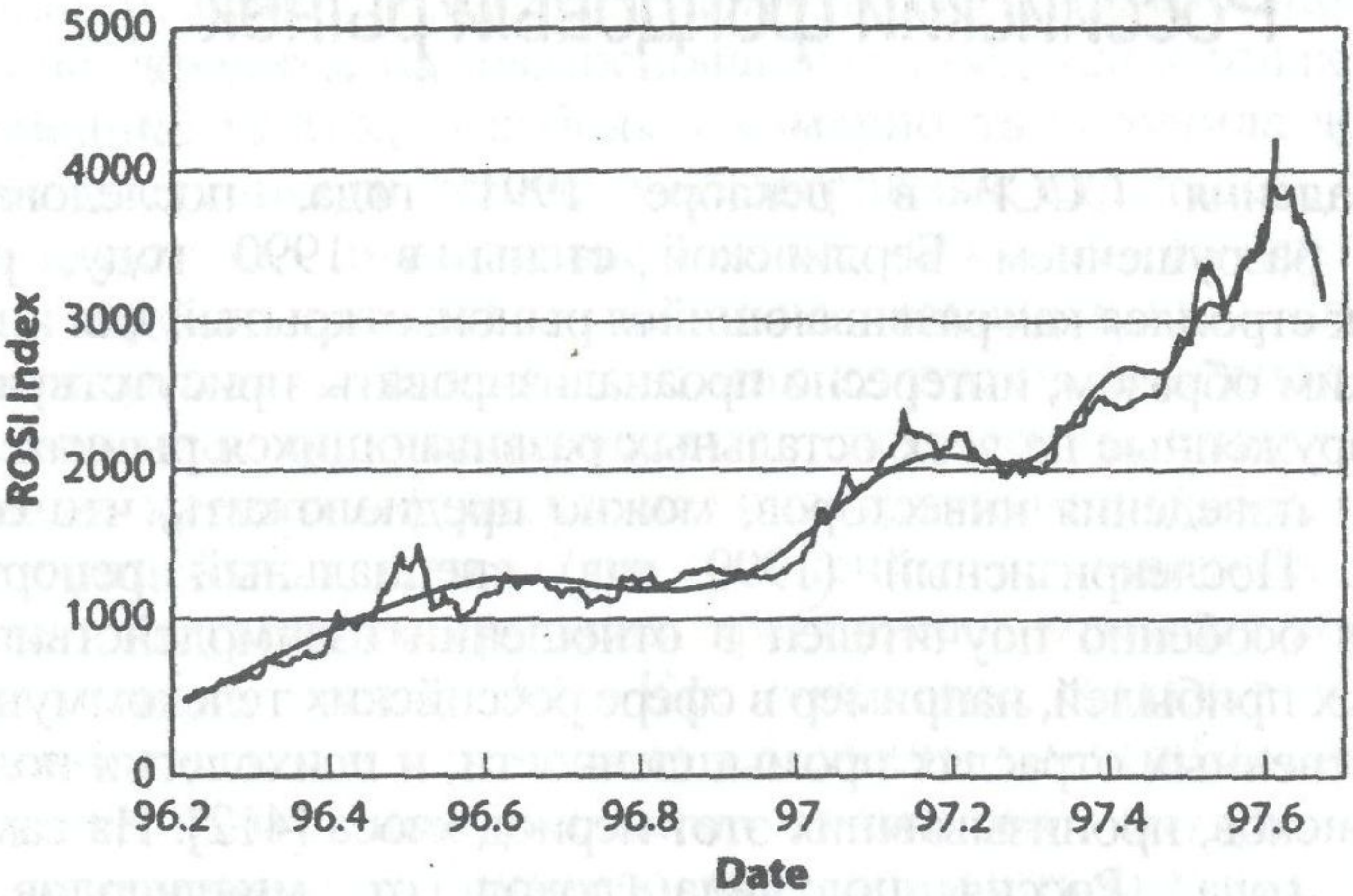
$$X(t) = a_0 + a_1(t_c - t)^{\nu}\left[1 + b\cos(\omega \ln(t_c - t) + C)\right],$$

где $\mathrm{t_c}$ *– точка наибольшего риска обвала,* $a_0, a_1, \nu, b, \omega, C$ *– константы*

Поскольку отношение двух последовательных периодов осциляций остается постоянным, то исходя из положения трех локальных максимумов $\mathrm{t_n}, t_{n+1}, t_{n+2}$ *можно оценить значение* $\mathrm{t_c}$ *по формуле*:

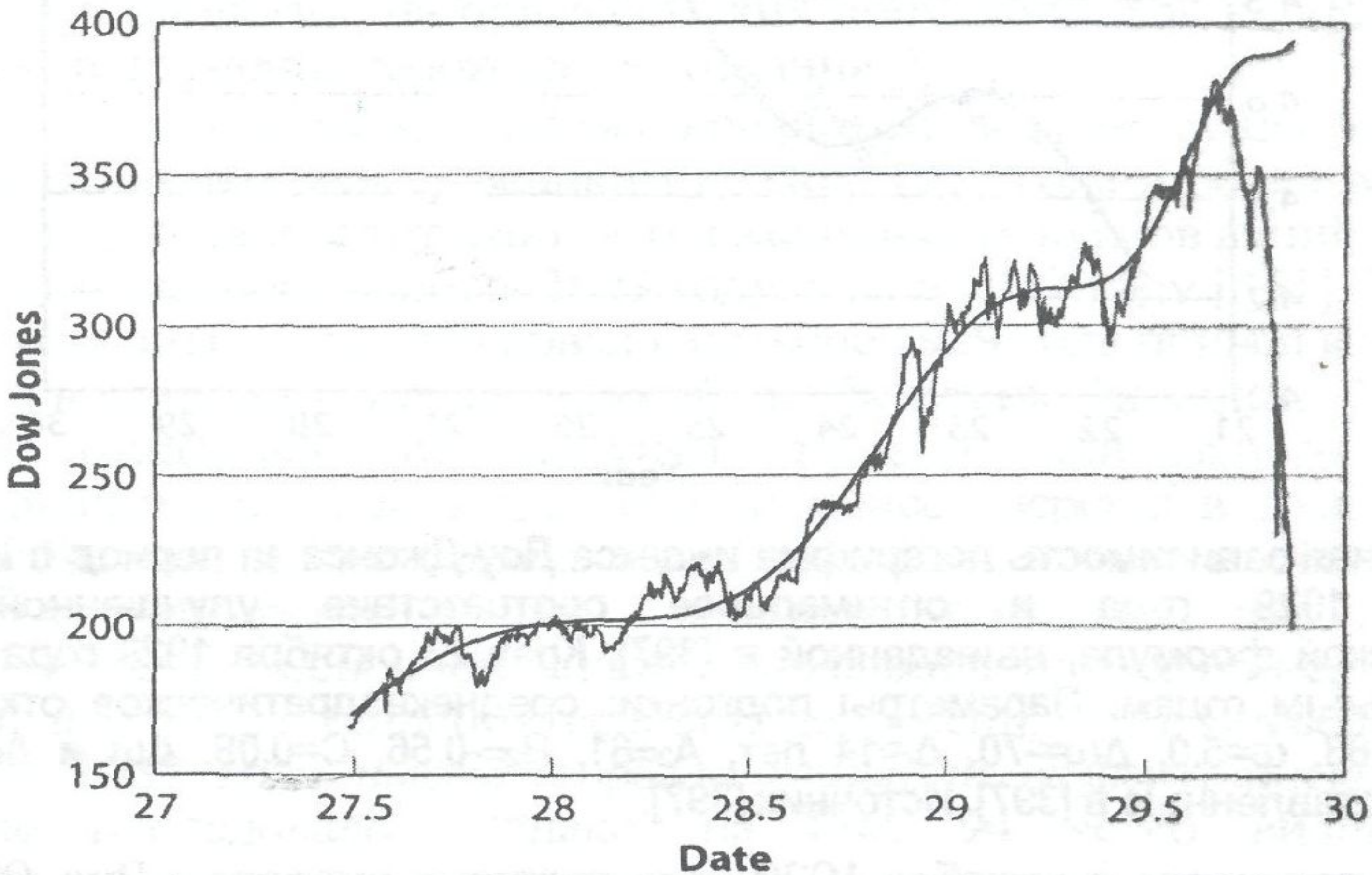
$$\mathrm{t_c} = \frac{t_{n+1}^{\ \ 2} - t_{n+2}t_n}{2t_{n+1} - t_n - t_{n+2}}$$

Логопериодические колебания.



Индекс ROSI

Логопериодические колебания.



Индекс Доу-Джонса до краха на Уолл-Стрит в октябре 1929 года.

Minority Game

Модели взаимодействующих агентов

$$s_i(t) = sign\left(\mathrm{K} \sum_{j \in N_i} s_j(t - \Delta t) + \varepsilon_i \right), \qquad \mathrm{K}<0$$

где $\mathrm{sign}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1, & \textit{при} \quad \mathrm{x} > 0 \\ -1, & \text{при} \quad \mathrm{x} \le 0 \end{cases}$ $\quad K$ – *коэффициент влияния*, $\mathrm{N_i}$ – *число соседей*, *влияющих на решение* i-го агента, ε_i – *гауссов шум с нулевым средним и единичной дисперсией*, *определяющий собственное мнение агента*

Minority Game

(Arthur W.B., Challet D., Lux T., Marsili M., Zhang Y-C)

$$a_i(t) \in \{1; -1\}, \quad i = 1, \ldots N, \quad t = 0, 1, \ldots \infty, \quad A(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t) \quad - \textit{общий выигрыш}$$

$$\mathrm{u_i}(t) = -\, a_i(t)\, g[A(t)] - \textit{индивидуал ьный выигрыш} \quad (\text{варианты}: \ \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathit{sign}(x); \quad g(x) = x / N)$$

В игре с акциями цена $\mathrm{X}(\mathrm{t})$ *определяет ся из соотношени я баланса спроса и предложени я по формуле* : $\mathrm{X}(\mathrm{t}) = X(t-1)\dfrac{N + A(t)}{N - A(t)}$, *где* $\mathrm{A}(t)$ – *разность между количество м ордеров на покупку и на продажу акций* (*общий выигрыш*).

Стратегия – это функция $\nu(\mathrm{t})$, которая по результата м игры на истории глубины m выдает прогноз в момент t.

Minority Game

(Arthur W.B., Challet D., Lux T., Marsili M., Zhang Y-C)

Некоторые результаты:

1. Существует функция ***H = f (m)*** , которая определяет ценность информации для получения прибыли

2. В игре с индуктивной динамикой существует управляющий параметр $\alpha = \frac{J}{N}$ определяющий кооперативные эффекты игры

(здесь $J = 2^m - \textit{показатель информированности игроков}$)

При этом:

- если $\alpha > \alpha_c \approx 0{,}3$, то $H \neq 0$ (рынок не эффективен)

- если $\alpha < \alpha_c$, то $H = 0$ (рынок эффективен, симметричная фаза)

Другие разделы экономики:

1. Распределение богатства
(V. Yakovenko, A. Dragulescu, M. Романовский)

2. Фирмы.(L. Amaral, S. Buldyrev, H. Stanley)

3. Влияние рекламы на объем продаж
(D. Sornette)

4. Макроэкономика и финансовая система
(В.П. Маслов, В.М. Полтерович, И.Г. Поспелов, Д.С. Чернавский)

Эконофизика и мэйнстрим

«Лежащее в основе современной экономической теории представление о человеке, который, исходя из рациональной оценки существующих возможностей, руководствуется лишь собственной выгодой, на самом деле является результатом достаточно позднего установления.

К счастью так было не всегда. Например, в позднем Средневековье представление о «справедливых ценах» доминировало в экономическом мышлении. Уровень цен, который устанавливался гильдиями, городским управлением и государственными контролерами, обеспечивал приемлемую прибыль для торговцев и в то же время позволял покупателям удовлетворять свои потребности без сверхзатрат. Купцы сознавали, что они должны руководствоваться не только стремлением к прибыли, но и какими-то социальными обязательствами по отношению к окружающим…

Эконофизика и мэйнстрим

. . . *Но в Новое Время ситуация изменилась. Бурное развитие международной торговли вывело экономику из-под контроля отдельных правительств и государств. В большинстве крупных европейских городов расцвели международные торговые рынки, вследствие чего регулирование цен пришло в упадок, а купцы получили возможность продавать товары по максимальным ценам, которые могли снести покупатели. Неудивительно, что в такой обстановке очень быстро возникли и развились сугубо эгоистические формы общения. Такая система торговли нуждалась лишь в объяснении механизма своего действия, что и сделал Адам Смит, создав экономическую теорию, объясняющую и фактически оправдывающую возникшую систему».*

Philip Ball: CRITICAL MASS

Эконофизика и мэйнстрим

Литература:

- 1. Мантенья Р.Н., Стенли Г.Ю. Введение в эконофизику. URSS. М.: 2009
- 2. Сорнетте Дидье. Как предсказывать крахи финансовых рынков. Критические события в комплексных финансовых системах. М.: Интернет-Трейдинг, 2003
- 3. Романорвский М.Ю., Романовский Ю.М. Введение в эконофизику. М.: 2007
- 4. Bouchaud J.-P., Potters M. Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 2000
- 5. Dubovikov M.M., Starchenko N.S., Dubovikov M.S. Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series // Physica. 2004. A 339. P. 591 – 608
- 6. Ball Ph. Critical mass. Farrar, Straus and Giroux, New York, 2004
- 7. Mantegna R.N., Stanley H.E. Scaling behavior in the dynamics of an economic index // Nature. 1995. 376. P. 46 – 49
- 8. Gabaix X., Gopikrishnan P., Plerou V., Stanley H.E. A theory of power-law distri-butions in financial market fluctuations // Nature. 2003. 423. P. 267 – 270
- 9. Bak Per, Paczuski, M. Shubik, Price Variations in a Stock Market with Many Agents, Working paper 96-05-078, Santa Fe Institute Economics Research Pro-gramm, 1996
- 10.Challet D., Chessa A., Marsili M., Zhang Y-C. From minority games to real mar-kets // Quantitative Finance. 2001. 1(1). P. 168 – 176

ИНТРАСТ
УПРАВЛЯЮЩАЯ
КОМПАНИЯ

Спасибо за внимание