

Байкальская Школа - 2011

# Основные направления эконофизики. Фрактальный анализ финансовых рядов

Дубовиков Михаил Михайлович

Директор по стратегии



# Эконофизика. Этапы развития

1995	Появление термина для обозначения работ <i>специалистов по статфизике</i> в области экономики и финансов
1997	<i>Workshop on Econophysics</i> в Будапеште
2001	Первая международная конференция на Бали
2002	Начало институциональной фазы развития
2009	Первый всероссийский конгресс в Москве
Настоящее время	Секция эконофизики – неотъемлемая часть многих ежегодных международных и национальных конференций по социальным наукам (ESHIA (international Heterogeneous Interacting Agents), AKSOE и др.)

# План доклада

История науки о финансовых временных рядах

*Анализ эмпирических данных. Универсальные распределения*

Фрактальный анализ финансовых рядов

Агентно – ориентированные модели в финансах

Другие разделы экономики

Эконофизика и мейнстрим

Перспективы развития эконофизики в России

# Финансовые временные ряды. История. *Динамический подход.*

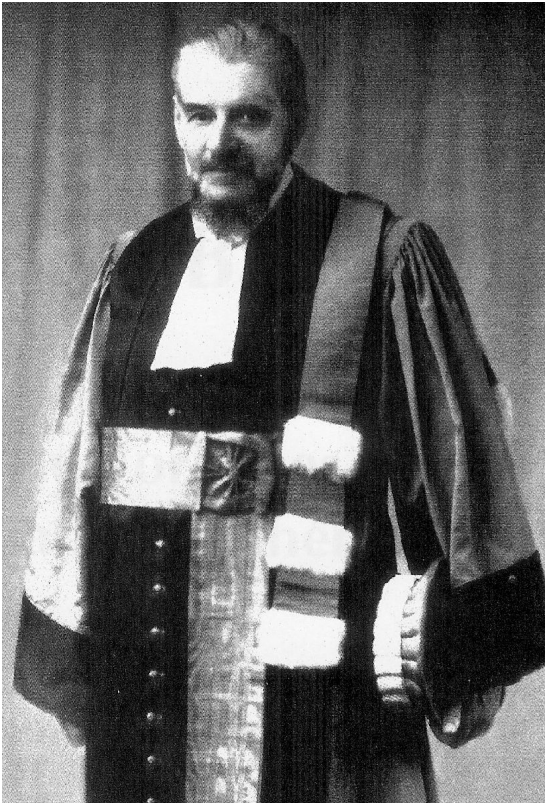


**90-е гг. 19 в.** – Формулировка принципов  
Ч. Доу (Ch. Dow).

**30-е гг. 20 в.** – Утверждение концепции.  
Создание основ технического анализа  
(J. Magee, W. Gann, R. Elliott, и т.д.)

**80-е гг. 20 в.** – Использование методов  
теории динамического хаоса. Теорема  
Такенса.  
(D. Ruelle, F. Takens, N. Packard)

# Финансовые временные ряды. История. Стохастический подход.



*L. Bachelier (1900)*

**ПЕРВЫЙ ПОСТУЛАТ.**

Приращения цены на непересекающихся временных интервалах – независимы.

**ВТОРОЙ ПОСТУЛАТ.**

Приращения цены на любом интервале имеют нормальное (гауссово) распределение с плотностью

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

# Финансовые временные ряды

## История. Стохастический подход

### Отказ от постулата независимости

#### 1. Fractional Brownian motion (*B. Mandelbrot, 1968*)

$$\sigma_t^2 = \sigma_0^2 |t - t_0|^{2H},$$

где  $t > t_0$ ,  $H$  – показатель Херста.

#### 2. Autoregressive conditional heteroscedasticity, ARCH (*R. F. Engle, 1982*)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p x_{t-p}^2,$$

где  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$  – положительные числа,  $x_t$  – случайная величина с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_t^2$ .

# Финансовые временные ряды

## История. Стохастический подход

### Отказ от постулата нормальности

(*B. Mandelbrot, 1963*)



**Скейлинговый принцип:**  
на реальных рынках в условиях конкуренции не существует привилегированных временных интервалов. Это означает, что  
Функция доходности

$$R_{\Delta t} \equiv \ln X(t + \Delta t) - \ln X(t)$$

является масштабно-инвариантной.

**Вывод: движение цены описывается «полетом Леви» (Levi flight)**

# Распределение Леви

(Levi, 1925)

Общий вид устойчивого распределения:

$$\ln \varphi(q) = \begin{cases} imq - \gamma |q|^\alpha \left[ 1 - i\beta \frac{q}{|q|} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right) \right], & \text{при } \alpha \neq 1 \\ imq - \gamma |q| \left[ 1 + i\beta \frac{q}{|q|} \frac{2}{\pi} \ln |q| \right], & \text{при } \alpha = 1 \end{cases}$$

где  $\varphi(q) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{iqx} dx$ ;  $0 < \alpha \leq 2$ ;  $\gamma > 0$ ;  $m \in \mathfrak{R}$ ;  $-1 < \beta < 1$

При  $\alpha = 2$ ,  $\varphi_2(q) = e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)q^2} = e^{-\gamma q^2}$



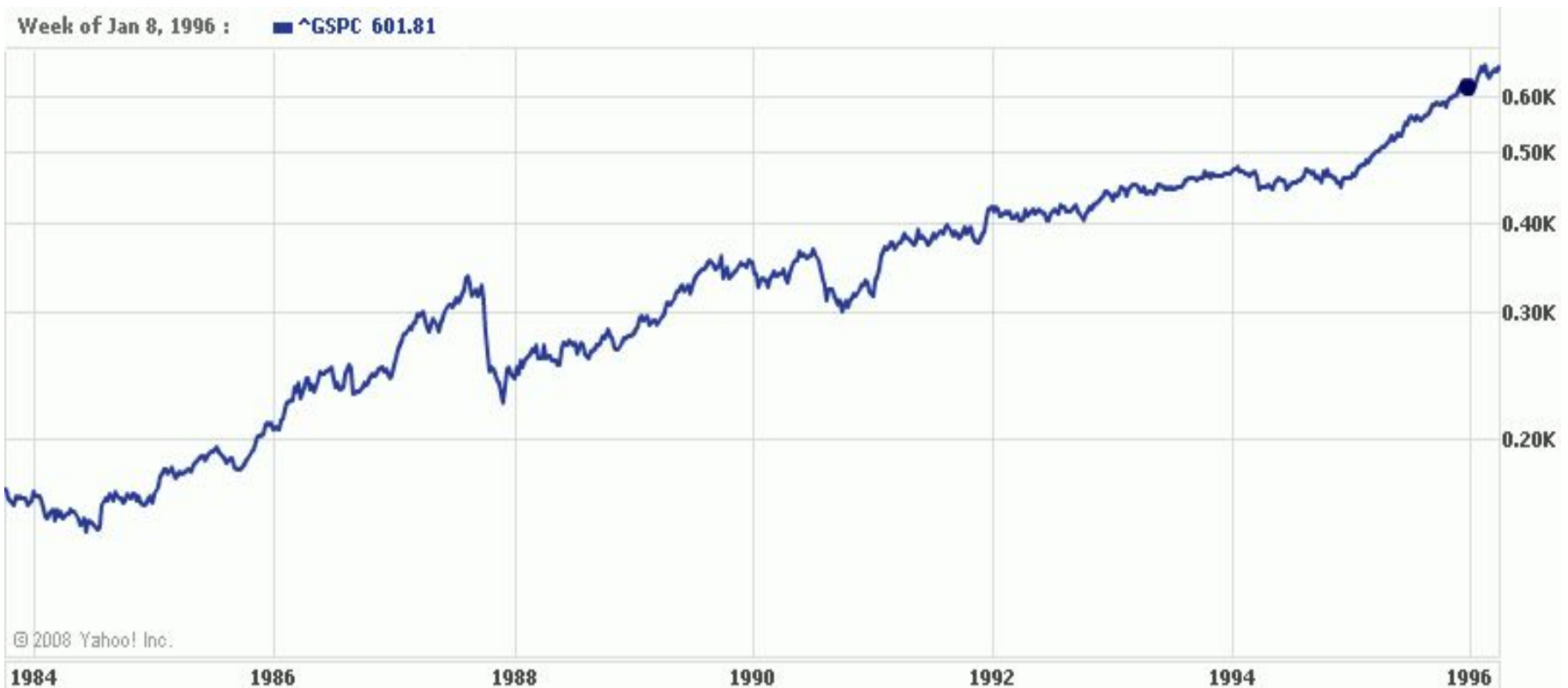
# Распределение Леви

В случае  $\beta = 0, m = 0$ ;  $P_L(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma|q|^\alpha} \cos(qx) dq$

При  $\gamma \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$ ;  $P_L(|x|) \sim |x|^{-(1+\alpha)}$

При  $\alpha < 2$ , распределение Леви имеет бесконечную дисперсию

# Индекс S&P 500 (пятистот крупнейших по капитализации американских компаний) за период с 1984 по 1996 г.

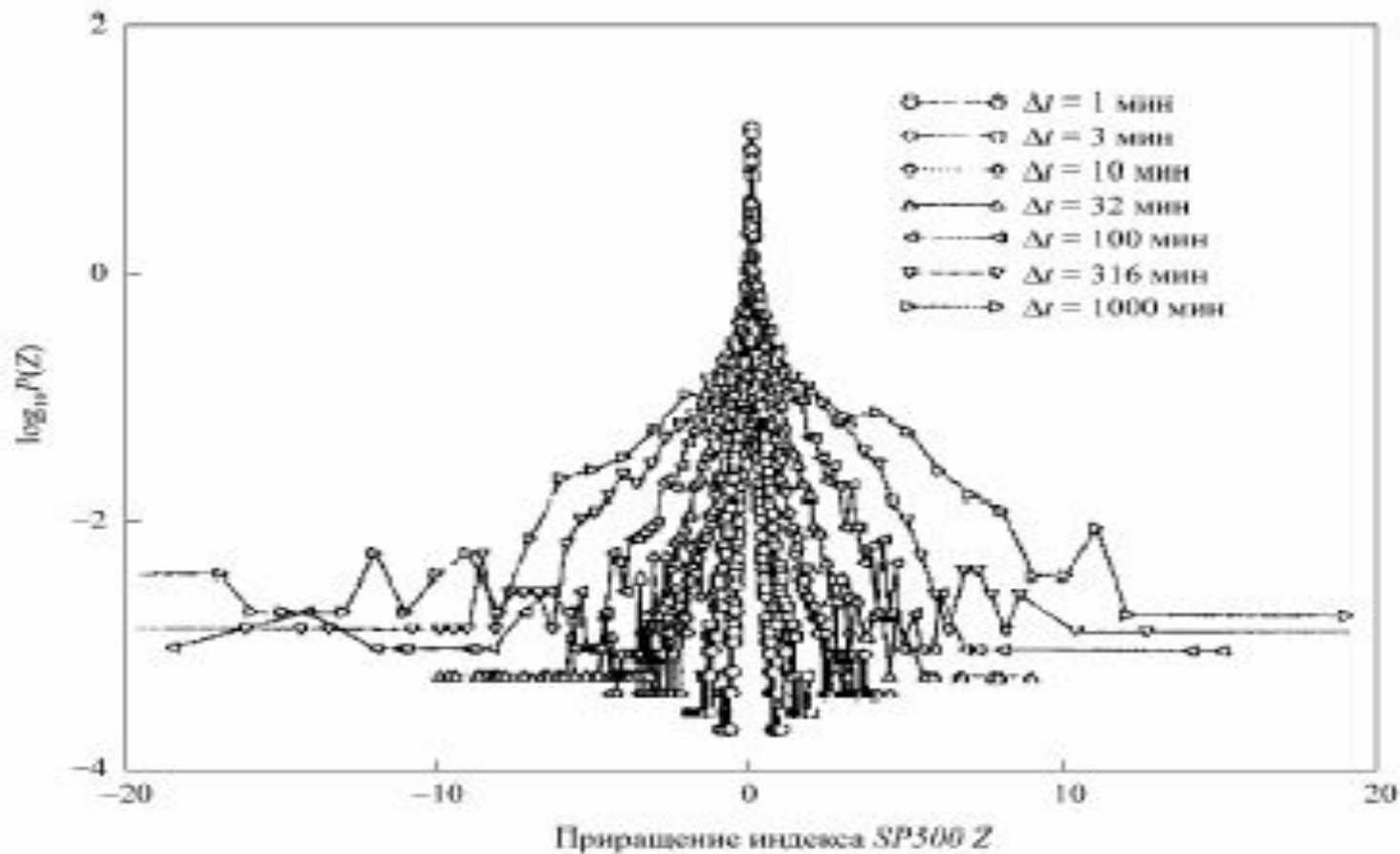


# Исследование эмпирических данных.

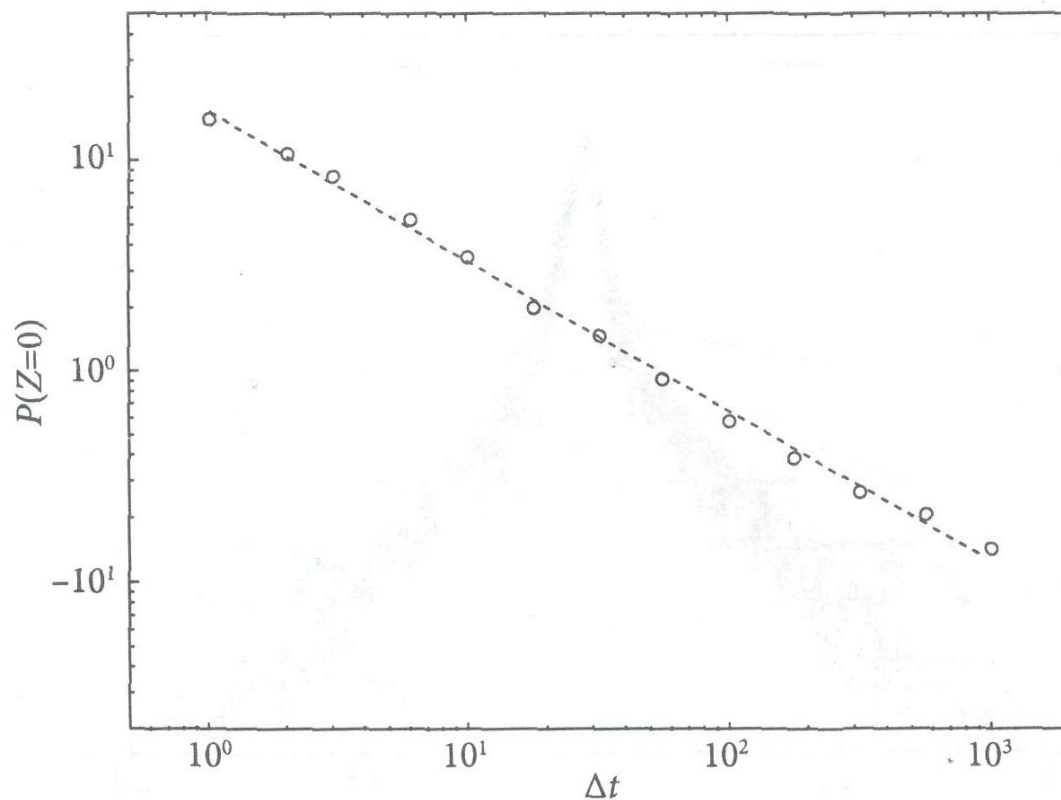
## Индекс S&P 500 (H. Stanley, R. Mantegna)

$$Z_{\Delta t}(t) \equiv X(t + \Delta t) - X(t),$$

где  $X(t)$  – значение индекса в момент  $t$



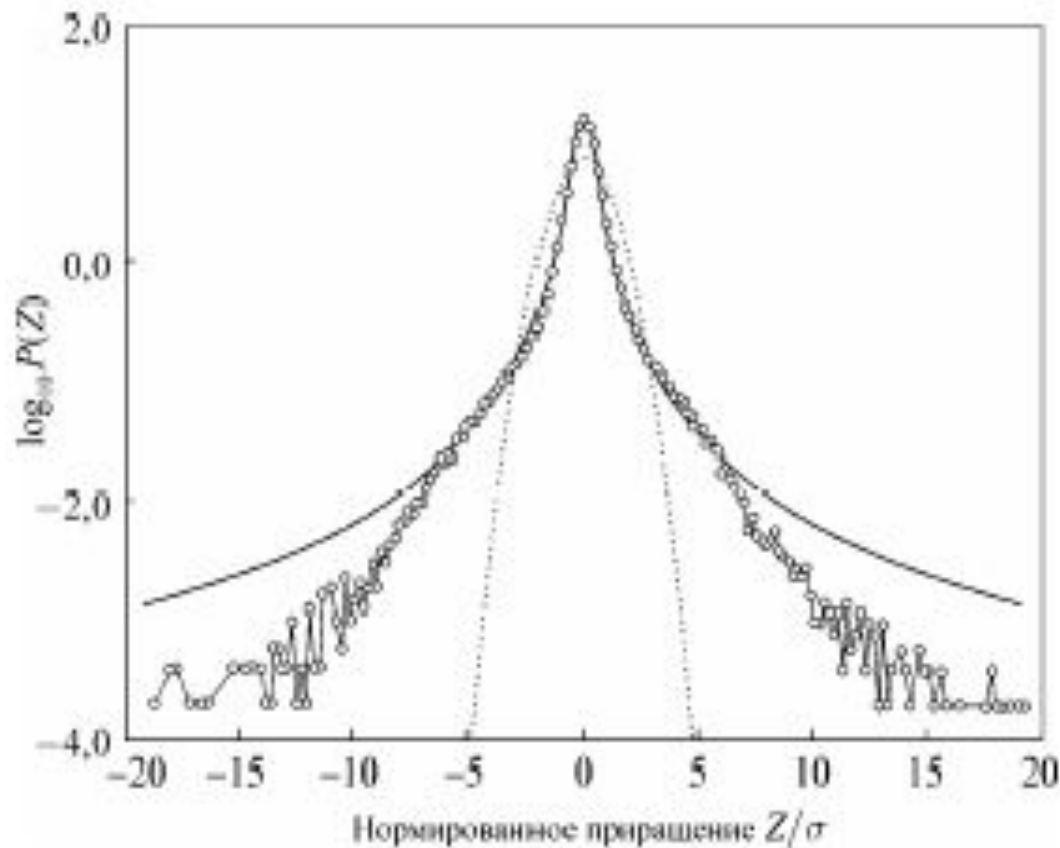
# Исследование эмпирических данных. Индекс S&P 500 (H. Stanley, R. Mantegna)



Масштабируемые переменные:  $\tilde{Z} = \frac{Z}{(\Delta t)^{1/\alpha}}$ ;  $P(\tilde{Z}) = \frac{P(Z)}{(\Delta t)^{-1/\alpha}}$

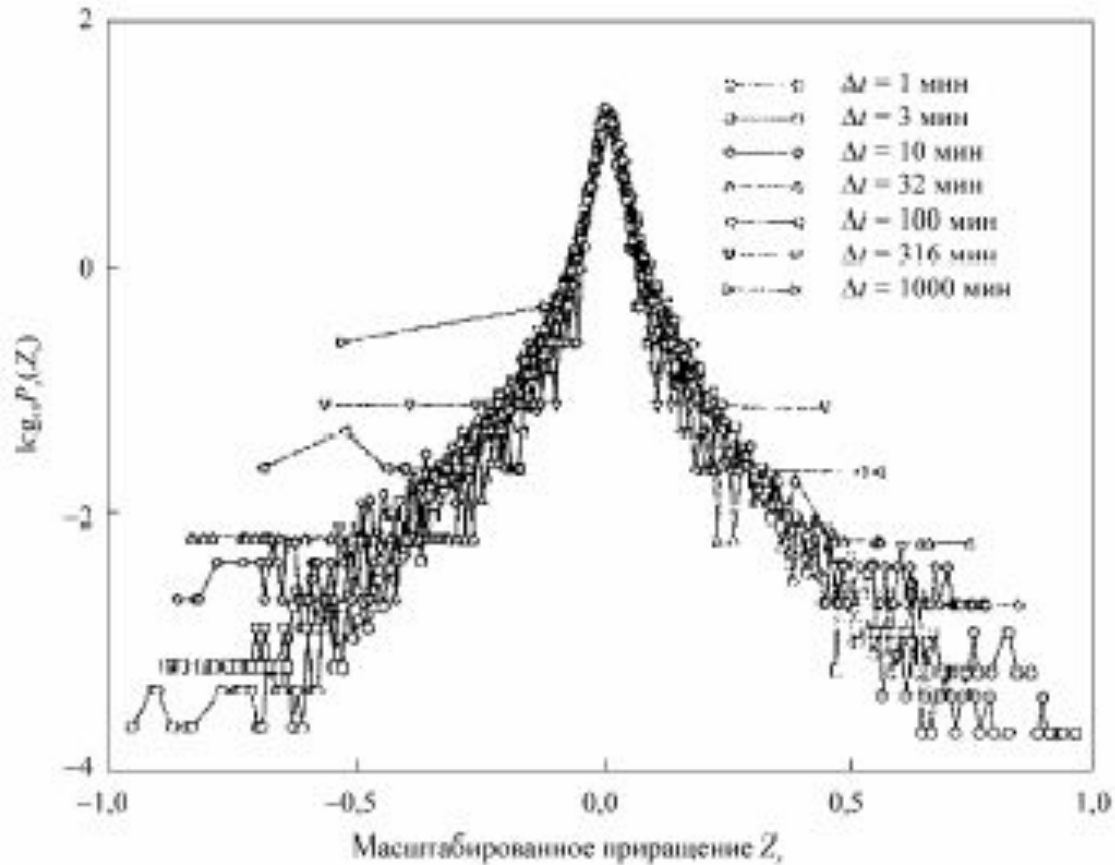
# Исследование эмпирических данных.

## Индекс S&P 500 (H. Stanley, R. Mantegna)



Обозначим  $Z_{\Delta t} / \sigma$  через  $\eta$ , тогда:  $P_L(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma \Delta t x^\alpha} \cos(\eta x) dx$ , где  $\alpha \approx 1,4$   $\gamma \approx 0,00375$

# Исследование эмпирических данных. Индекс S&P 500 (H. Stanley, R. Mantegna)



Масштабируемые переменные:  $\tilde{Z} = \frac{Z}{(\Delta t)^{1/\alpha}}$ ;  $P(\tilde{Z}) = \frac{P(Z)}{(\Delta t)^{-1/\alpha}}$

# Исследование эмпирических данных редких событий

(P. Gopikrishnan, V. Plerou, H. Stanley)

$$P(|R_{\Delta t}| > x) \sim x^{-\xi_r}$$

$$P(|V_{\Delta t}| > x) \sim x^{-\xi_v}$$

$$P(|N_{\Delta t}| > x) \sim x^{-\xi_n}$$

Здесь  $R_{\Delta t}$  – доходность,  $V_{\Delta t}$  – объем продаж,  $N_{\Delta t}$  – число сделок на интервале  $\Delta t$ ;

$\xi_r \approx 3$ ,  $\xi_v \approx 1,5$ ,  $\xi_n \approx 3,4$

# Фракталы

## Определение размерности (F. Hausdorff, 1919)



*(для компактного множества в произвольном метрическом пространстве)*

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)},$$

*где  $N(\delta)$  – минимальное число шаров радиуса  $\delta$ , покрывающих исходное множество.*

*Мотивация:  $N(\delta) \sim (1/\delta)^D$  ( $D=1,2,3$ )*



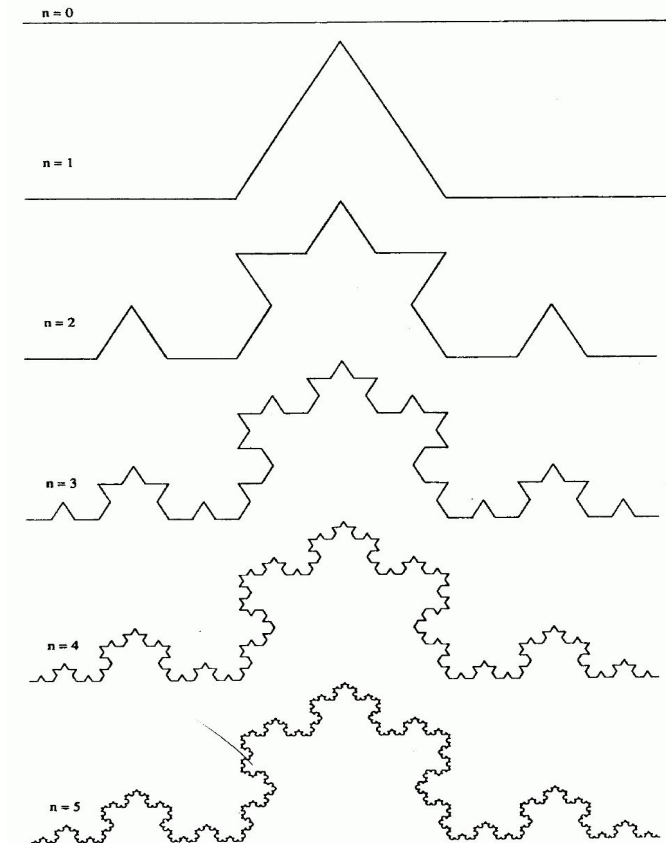
# Фракталы

**Определение** (*B. Mandelbrot*):

**Фрактал** – это множество, для которого хаусдорфова размерность  $D$  строго больше его топологической размерности  $D_T$

# Фракталы

## Кривая Коха. Внутренняя размерность.



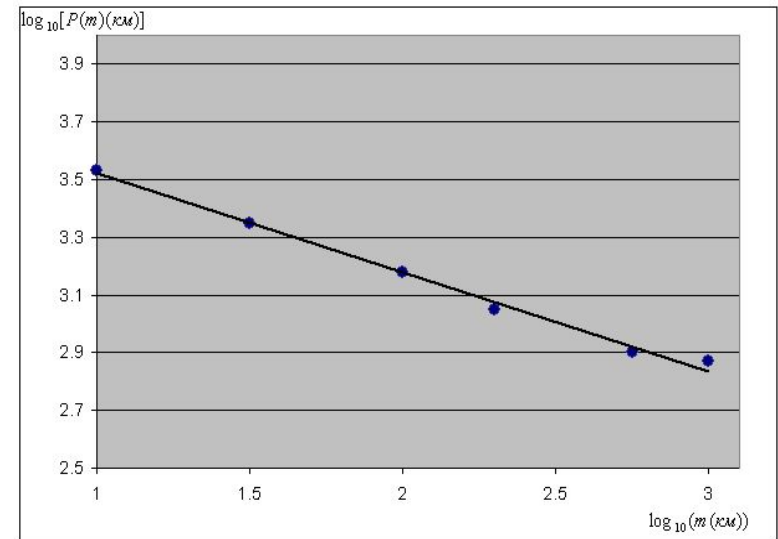
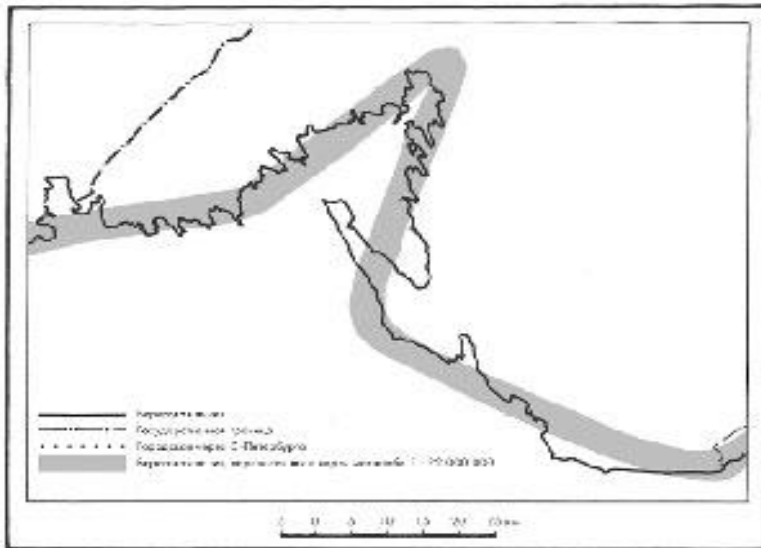
$$\text{при } \delta = (1/3)^n,$$

$$N(\delta) = 4^n$$

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$$

# Фракталы

## Береговая линия Британии (L.F. Richardson, 1961)



$$P(\delta) \sim \delta^{-\alpha}$$

$$P(\delta) = N(\delta)\delta$$

$$N(\delta) \sim \delta^{-(\alpha+1)}$$

$$D = \alpha + 1 = 1,24$$

# Отличия природных фракталов от модельных

- *Во-первых*, естественные фракталы не бывают строго симметричными. Свойство же самоподобия для них выполняется лишь в среднем.
- *Во-вторых*, при вычислении размерности естественных фракталов, всегда исключаются масштабы, меньше некоторого минимального масштаба структуры.
- *В-третьих*, для естественных фракталов отсутствует система предфракталов. Поэтому система аппроксимаций симплексами, необходимая для определения размерности, является в общем случае достаточно произвольной.

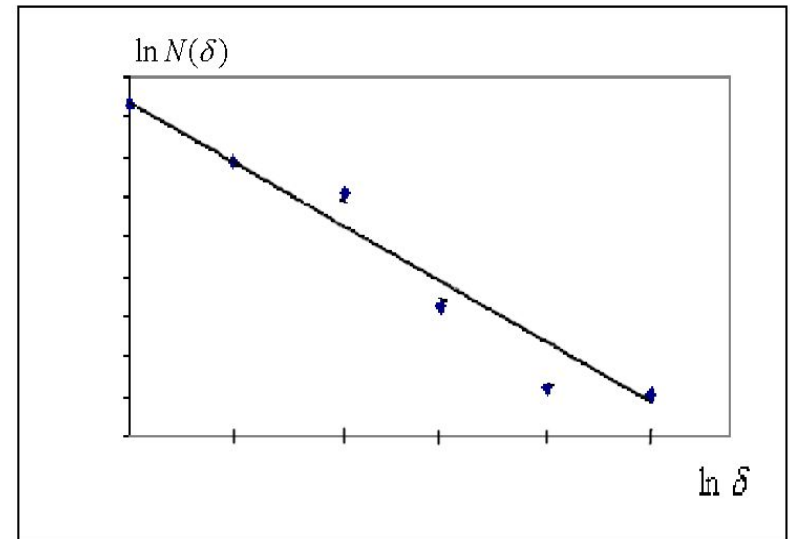
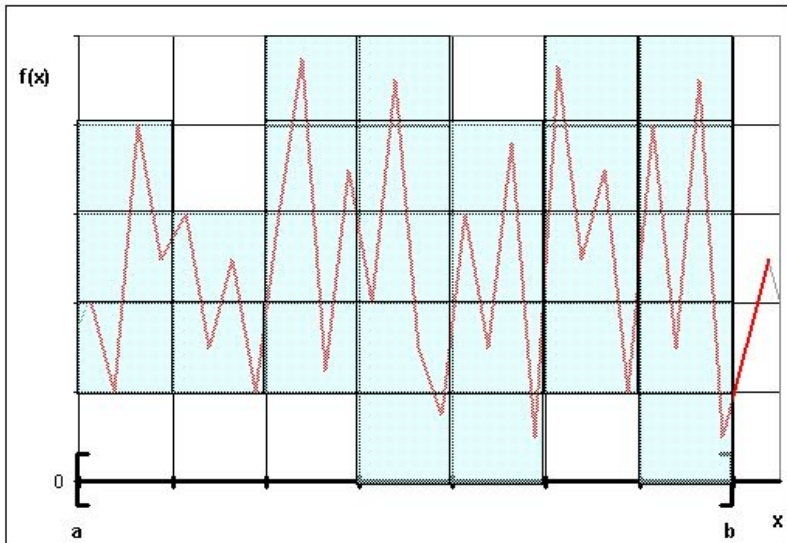
# Фракталы

## *Финансовые временные ряды*

*Движения цен большинства финансовых инструментов внешне похожи, на разных масштабах времени и цены. По внешнему виду графика наблюдатель не может сказать, относятся ли данные к недельным, дневным или же часовым изменениям.*

# Фракталы

## Финансовые временные ряды Клеточная размерность



$$N(\delta) \sim \delta^{-D}$$

# Фракталы

## Финансовые временные ряды Показатель Херста $H$

*При  $H \approx 0,5$  – временной ряд находится в состоянии случайного блуждания*

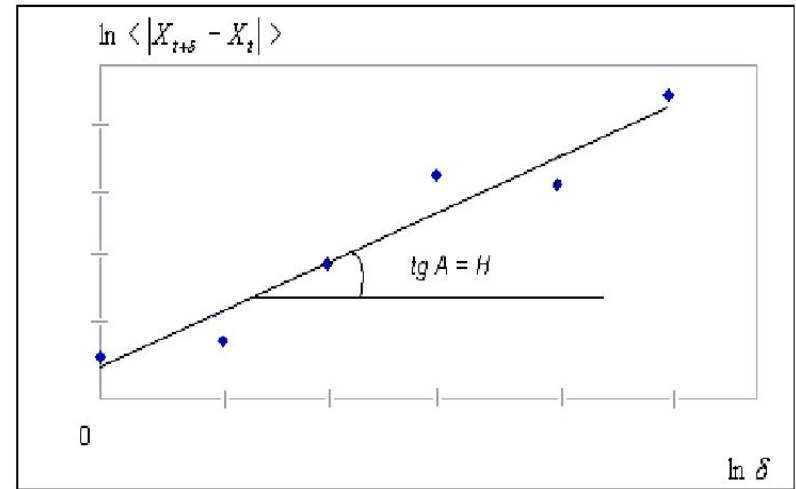
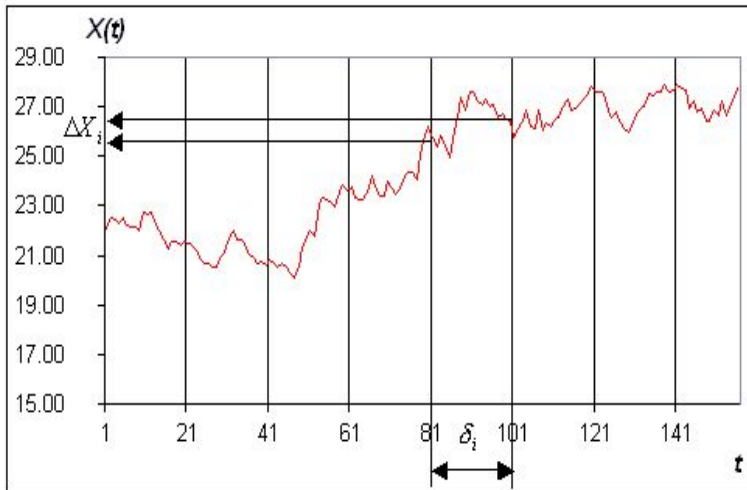
*При  $H > 0,5$  – наблюдается тренд, который тем устойчивее, чем больше  $H$*

*При  $H < 0,5$  – наблюдается флэт*

*Для гауссовых случайных процессов  
 $D=2-H$*

# Фракталы

## Финансовые временные ряды. Показатель Херста $H$

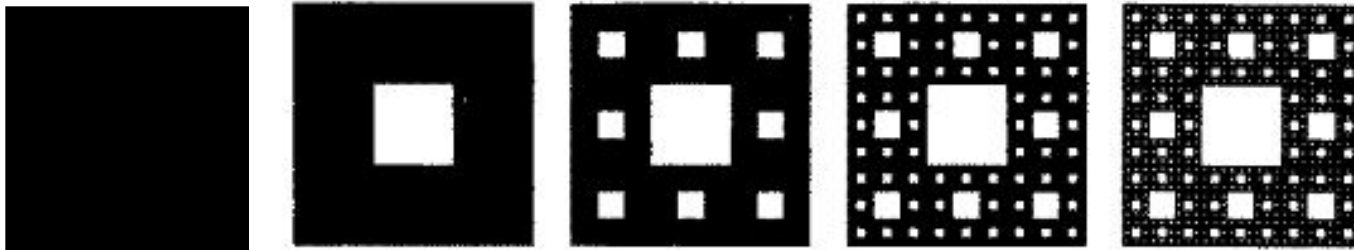


$$\langle |\Delta X(\delta)| \rangle = \langle |X_{t+\delta} - X_t| \rangle \sim \delta^H$$



# Фракталы

*Ковер Серпинского. Клеточная размерность*

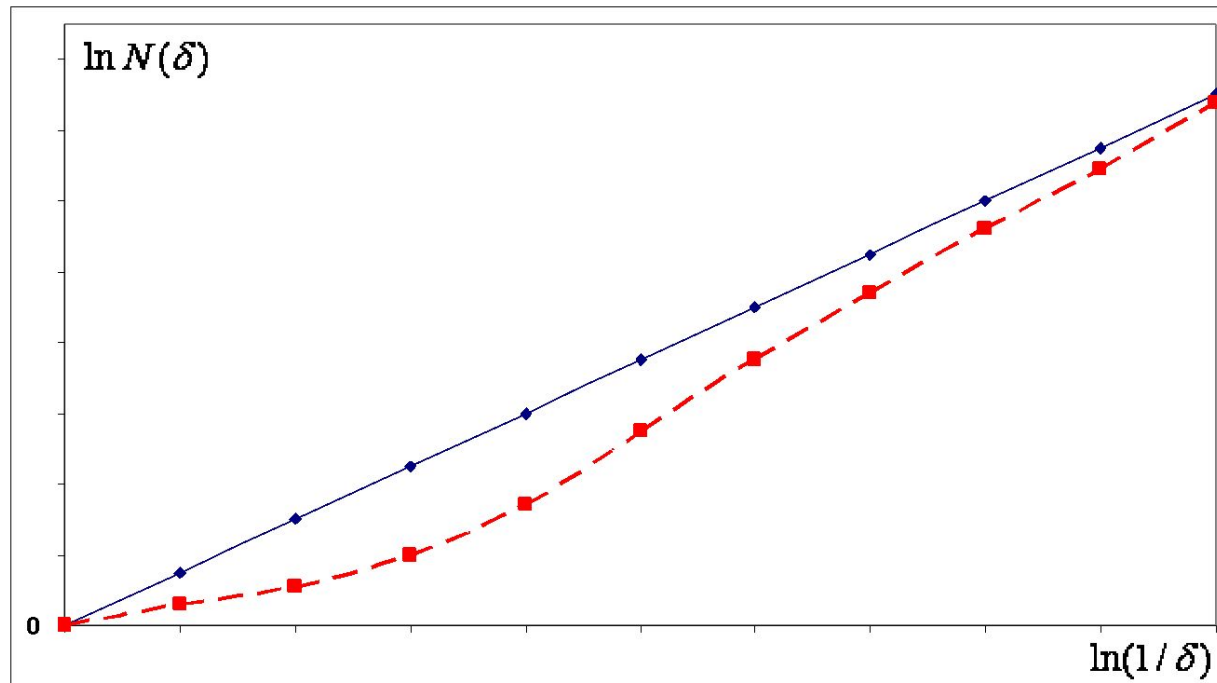


$$\text{при } \delta = (1/3)^n, \quad N(\delta) = 8^n$$

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.89$$

# Фракталы

Сравнение результатов использования различных аппроксимаций для ковра Серпинского



$$N(\delta) \sim \delta^{-D}$$

# Фракталы

*Финансовые временные ряды.*

**Асимптотика для площади покрытий**

$$N(\delta) \sim (1/\delta)^D \Rightarrow S(\delta) \sim \delta^{2-D},$$

*при  $\delta \rightarrow 0$*

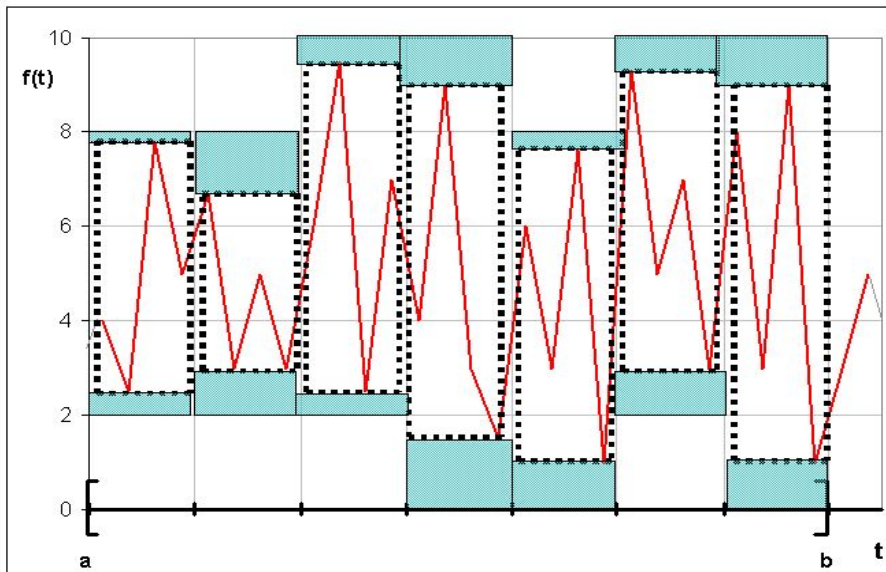
# Фракталы

## Финансовые временные ряды

Размерность минимального покрытия

Индекс фрактальности  $\mu$

Для функции  $f(t)$ , определенной на  $[a, b]$  введем равномерное разбиение отрезка  $\omega_n = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b]$ , где  $t_i - t_{i-1} = \delta = (b - a)/n$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и рассмотрим минимальное покрытие графика  $f(t)$ . Тогда:



$$S_\mu(\delta) = \sum_{i=1}^n A_i(\delta) \delta \sim \delta^{2-D},$$

при  $\delta \rightarrow 0$ .

Здесь  $A_i$  – амплитуда  $f(t)$   
на  $i$ -м интервале

# Фракталы

## Финансовые временные ряды

Размерность минимального покрытия

Индекс фрактальности  $\mu$

Введем обозначение:  $V_f(\delta) = \sum_{i=1}^n A_i(\delta)$

Поскольку  $S_\mu(\delta) \sim \delta^{2-D_\mu}$  то  $V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu}$ ,

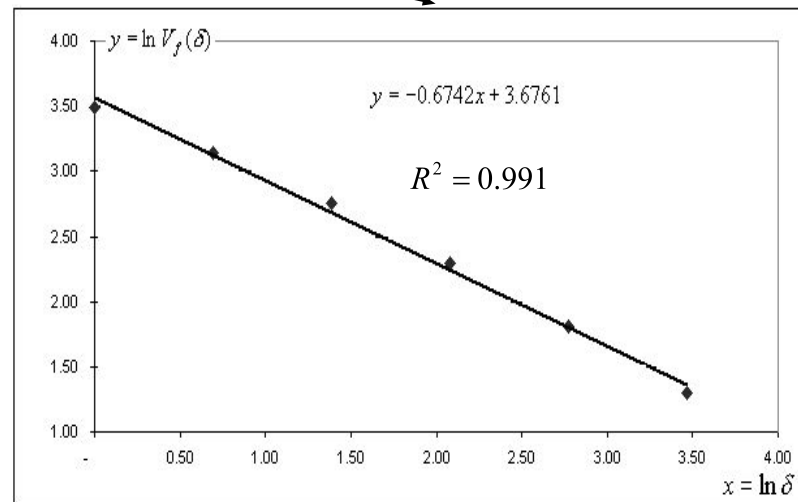
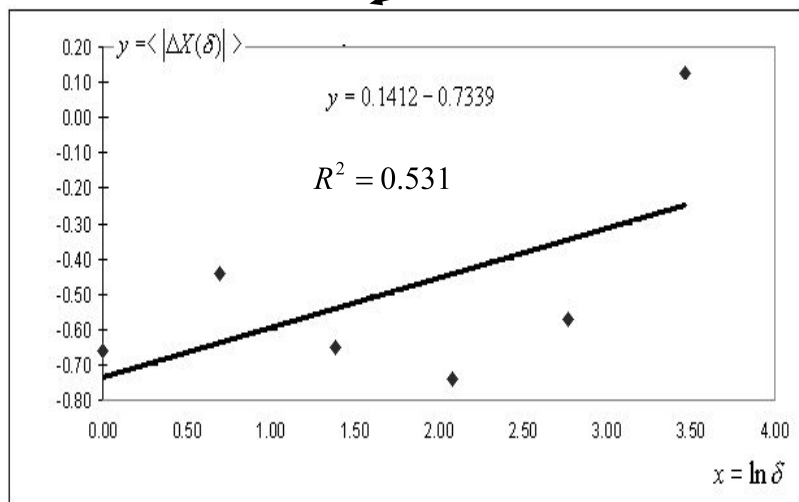
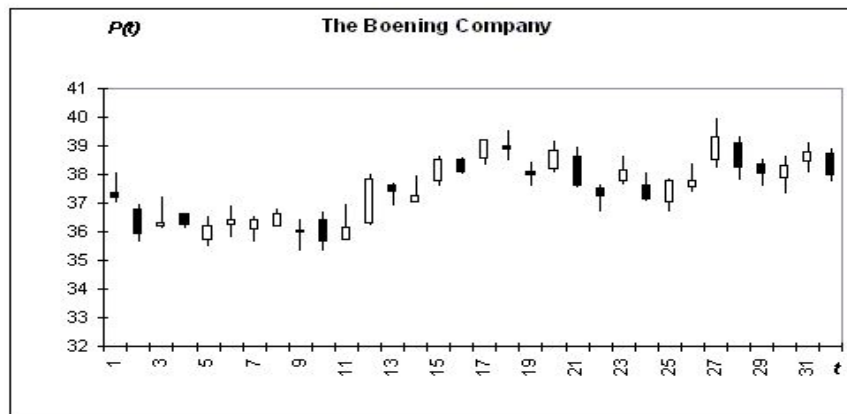
где  $\mu = D_\mu - 1 \equiv D_\mu - D_T$

Назовем  $D_\mu$  - *размерностью минимального покрытия,*

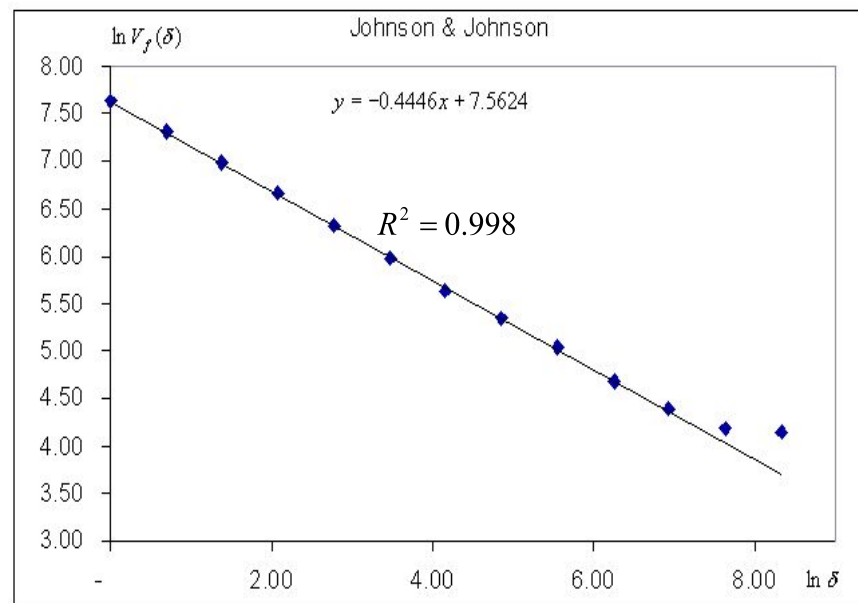
$\mu$  - *индексом фрактальности*

# Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

## *Быстрый выход на степенную асимптотику*



# Фрактальный анализ финансовых временных рядов. Быстрый выход на степенную асимптотику



Типичная диаграмма для вычисления  $\mu$  при длине исходного ряда 4096 дней:

# Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

*Типичное поведение ряда и функции  $\mu_t$*

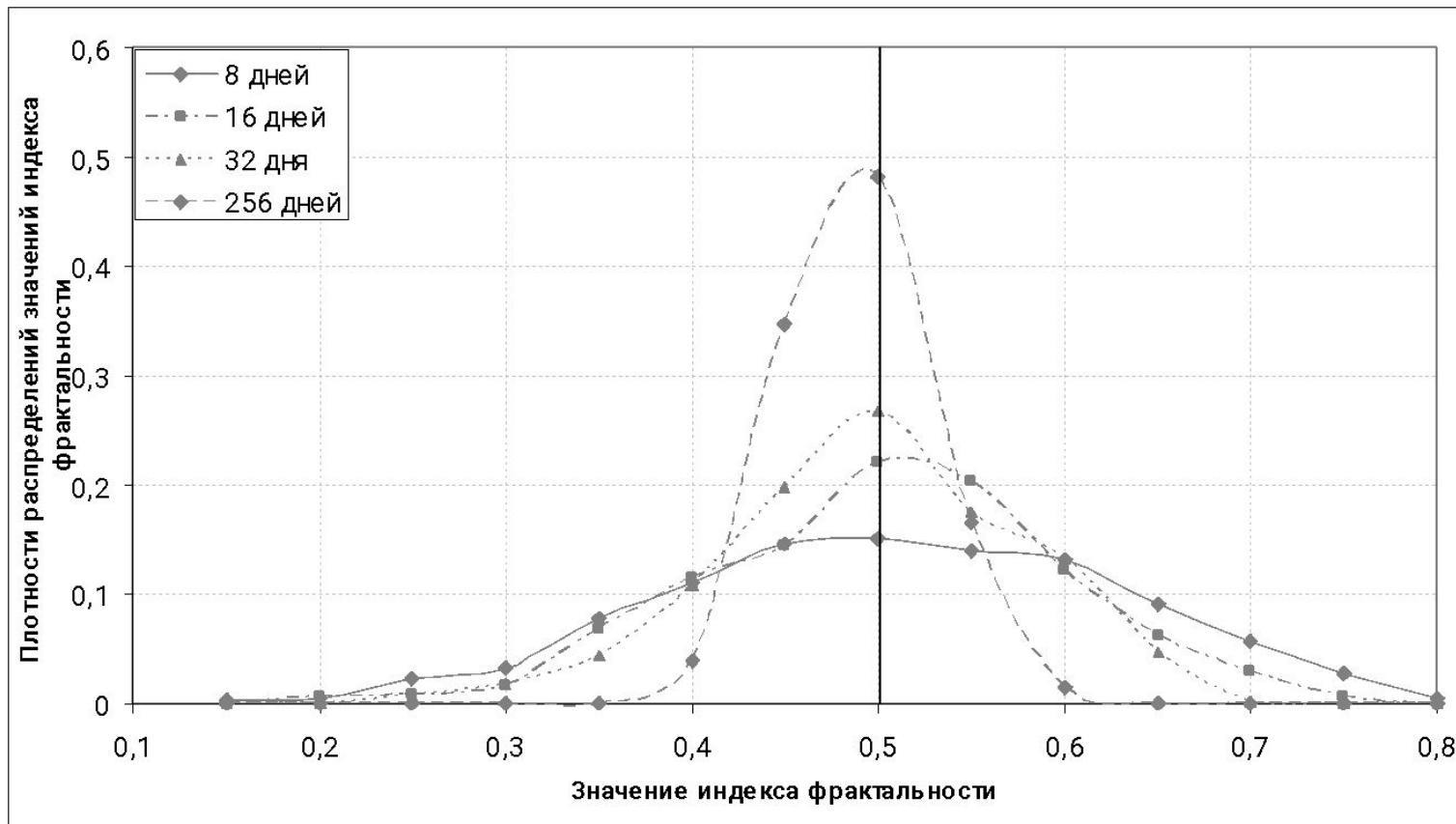




# Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

*Распределения вероятности значений индекса  $\mu_t$*

*(на примере дневных цен акций компании Ford за период с 03.01.2000 по 30.11.2010)*

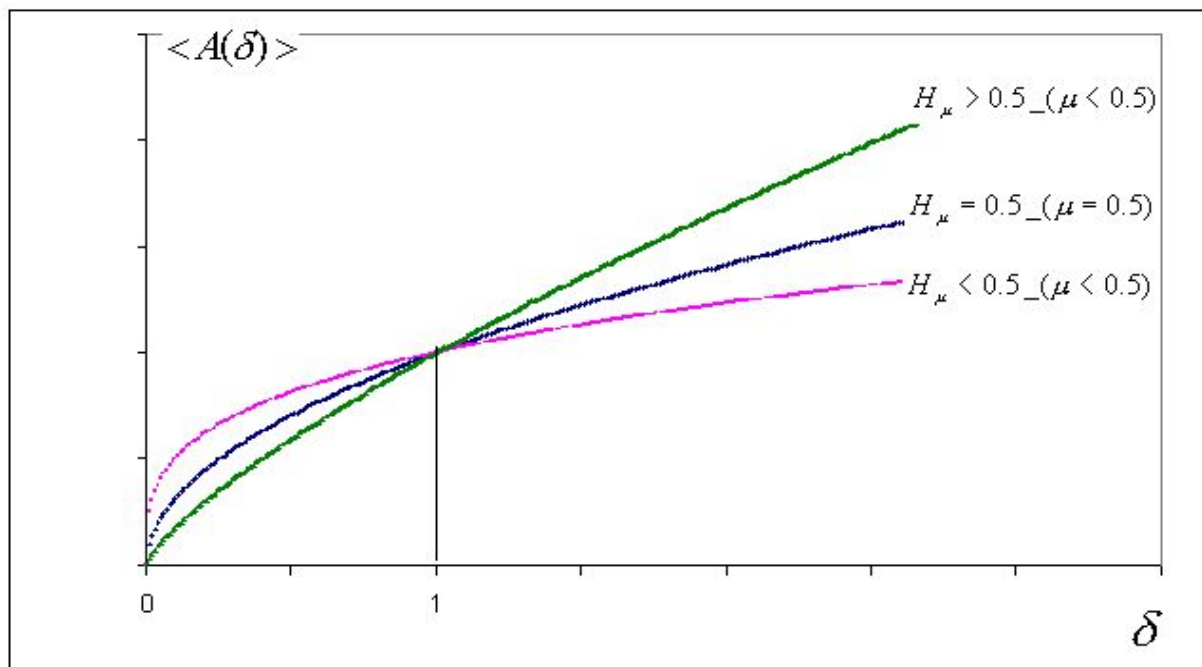


# Эффект увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных

Введем  $\langle A(\delta) \rangle \equiv V_f(\delta) / n$

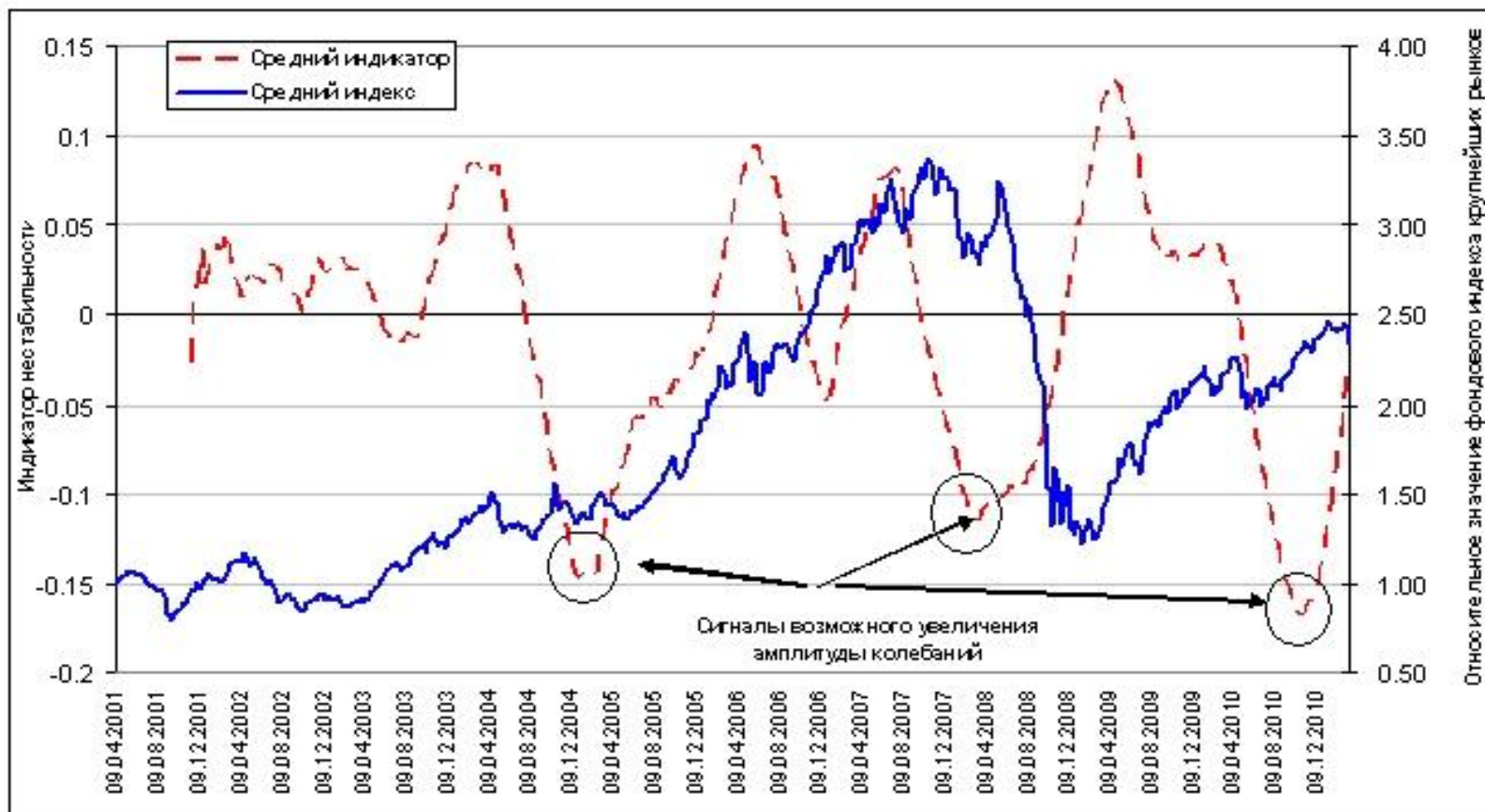
$$1/n \sim \delta \Rightarrow \langle A(\delta) \rangle \sim V_f(\delta) \delta \sim \delta^{1-\mu} \equiv \delta^{H_\mu}$$

где  $H_\mu = 1 - \mu$



# Эффект увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных

## Индикатор Старченко.



# Модели обвалов на финансовом рынке

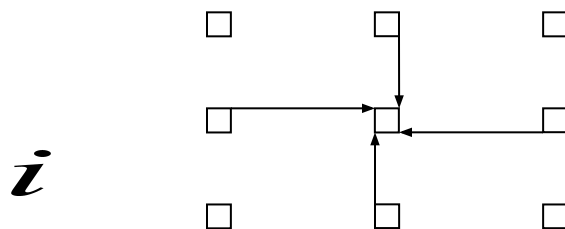
1. Инвесторы и спекулянты. Самоорганизованная критичность (P. Bak)
2. Модели взаимодействующих агентов (D. Sornette, J-P. Bouchaud, T. Lux)

$$s_i(t) = \text{sign} \left( K \sum_{j \in N_i} s_j(t - \Delta t) + \varepsilon_i \right), \quad K > 0$$

где  $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ -1, & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$   $K$  – коэффициент влияния,  $N_i$  – число соседей, влияющих на решение  $i$ -го агента,  $\varepsilon_i$  – гауссов шум с нулевым средним и единичной дисперсией, определяющий собственно мнение агента

# Модели обвалов на финансовом рынке

2. а) Решетчатые модели. Модель Изинга. Перколяция.

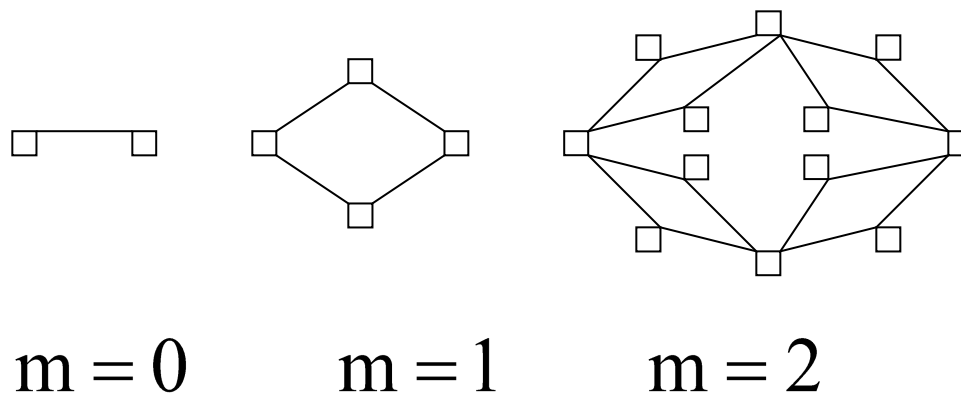


$$X(t) = a_0 + a_1(t_c - t)^{\nu}$$

где  $t_c$  – точка наибольшего риска обвала,  $a_0, a_1, \nu$  – константы

# Модели обвалов на финансовом рынке

2. а) Иерархические модели.



После  $m$  повторений имеем  $\frac{2}{3}(2 + 4^m)$  агентов и  $4^m$  связей

# Модели обвалов на финансовом рынке

2. а) Иерархические модели. Логопериодические колебания.

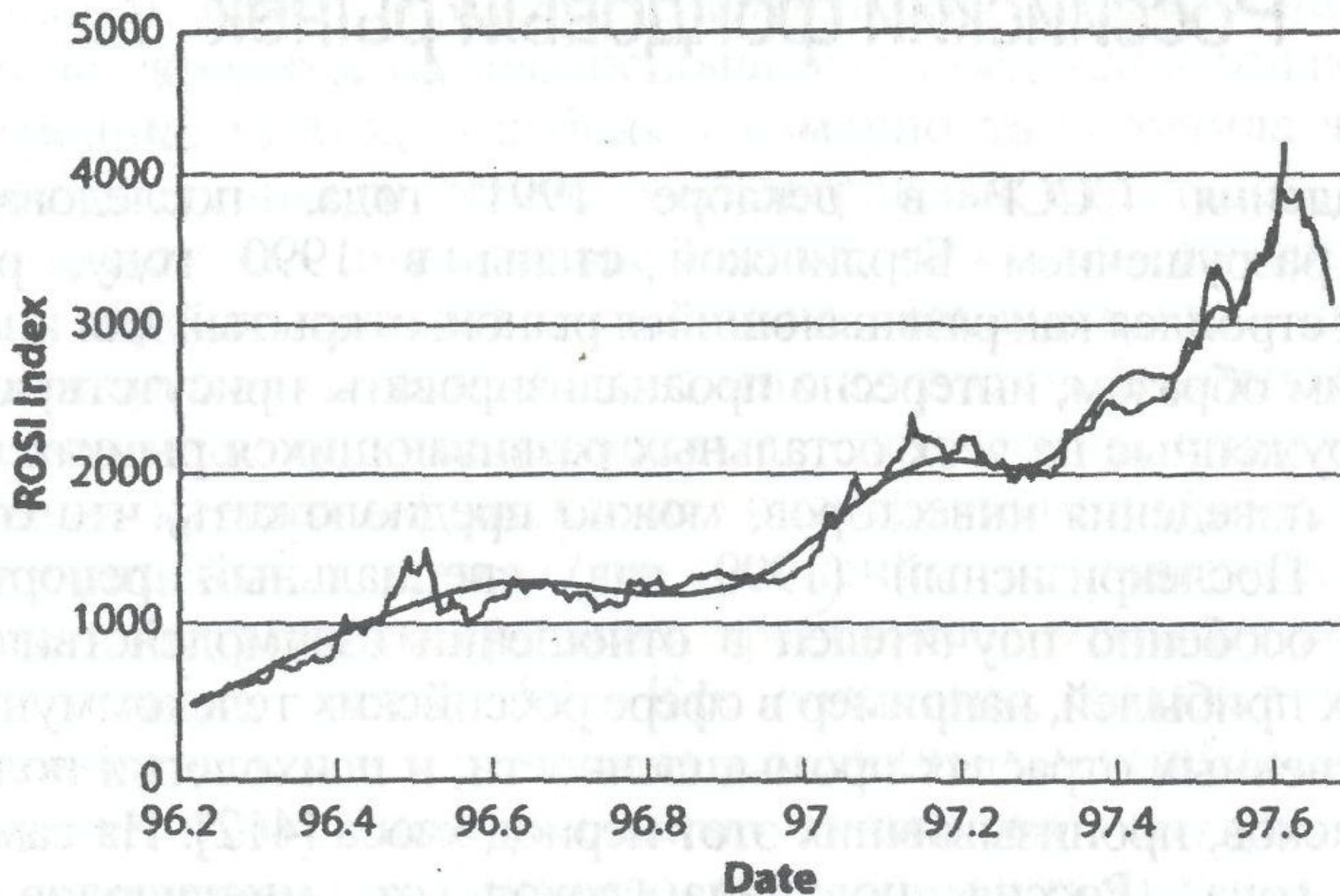
$$X(t) = a_0 + a_1(t_c - t)^v [1 + b \cos(\omega \ln(t_c - t) + C)],$$

где  $t_c$  – точка наибольшего риска обвала,  $a_0, a_1, v, b, \omega, C$  – константы

Поскольку отношение двух последовательных периодов осцилляций остается постоянным, то исходя из положения трех локальных максимумов  $t_n, t_{n+1}, t_{n+2}$  можно оценить значение  $t_c$  по формуле :

$$t_c = \frac{t_{n+1}^2 - t_{n+2}t_n}{2t_{n+1} - t_n - t_{n+2}}$$

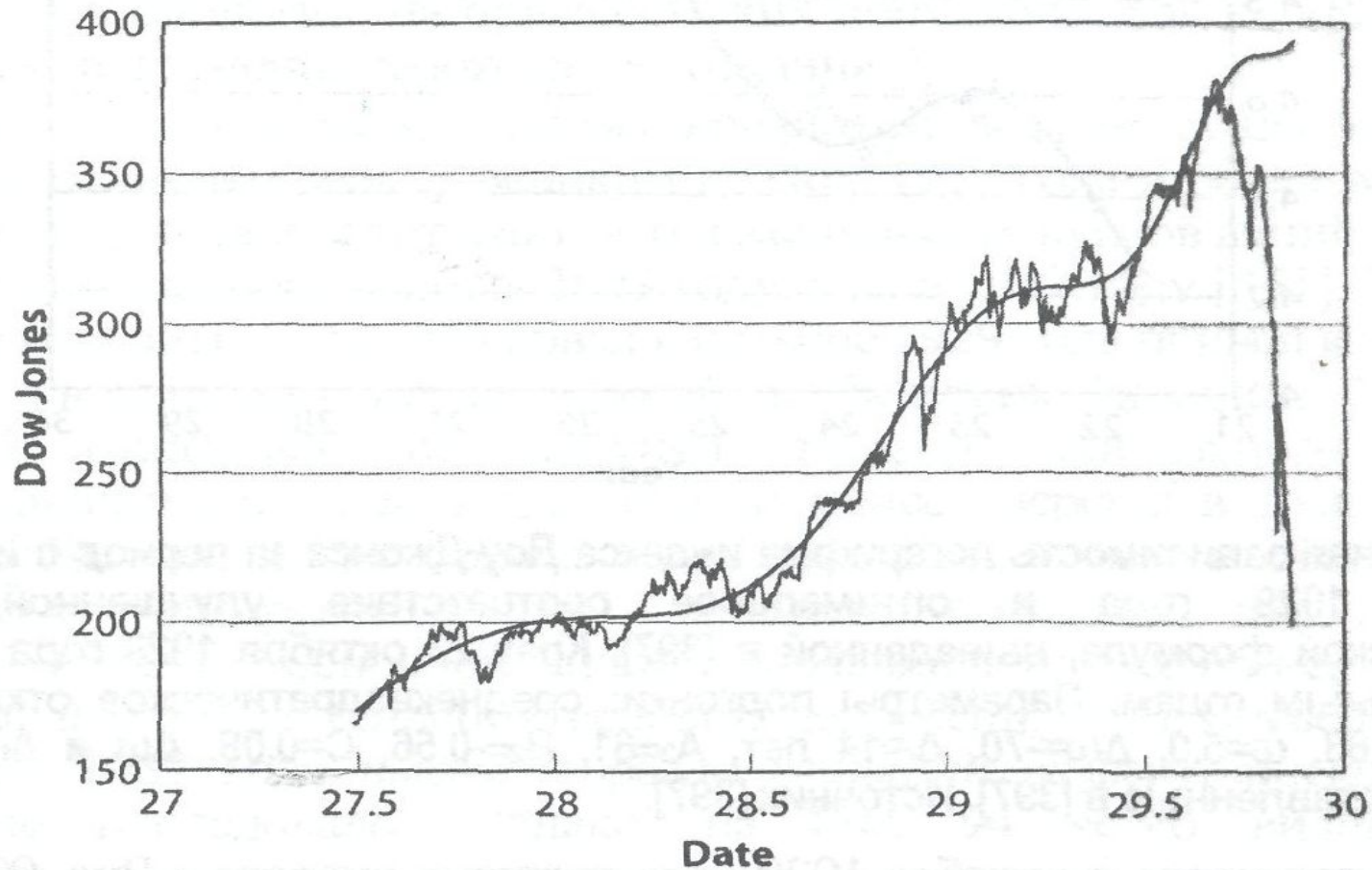
# Логопериодические колебания.



Индекс ROSI



# Логопериодические колебания.



Индекс Доу-Джонса до краха на Уолл-Стрит в октябре 1929 года.

# Minority Game

## Модели взаимодействующих агентов

$$s_i(t) = \text{sign} \left( K \sum_{j \in N_i} s_j(t - \Delta t) + \varepsilon_i \right), \quad K < 0$$

где  $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ -1, & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$   $K$  – коэффициент влияния,  $N_i$  – число соседей, влияющих на решение  $i$ -го агента,  $\varepsilon_i$  – гауссов шум с нулевым средним и единичной дисперсией, определяющий собственно мнение агента

# Minority Game

(Arthur W.B., Challet D., Lux T., Marsili M., Zhang Y-C)

$a_i(t) \in \{1, -1\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $t = 0, 1, \dots, \infty$ ,  $A(t) = \sum_{j=1}^N a_j(t)$  – общий выигрыш

$u_i(t) = -a_i(t) g[A(t)]$  – индивидуальный выигрыш (варианты :  $g(x) = \text{sign}(x)$ ;  $g(x) = x/N$ )

В игре с акциями цена  $X(t)$  определяется из соотношения баланса спроса и предложения по формуле :  $X(t) = X(t-1) \frac{N + A(t)}{N - A(t)}$ , где  $A(t)$  – разность между количеством ордеров на покупку и на продажу акций (общий выигрыш).

Стратегия – это функция  $v(t)$ , которая по результатам игры на истории глубины  $m$  выдает прогноз в момент  $t$ .

# Minority Game

(Arthur W.B., Challet D., Lux T., Marsili M., Zhang Y-C)

## Некоторые результаты:

1. Существует функция  $H = f(m)$ , которая определяет ценность информации для получения прибыли
2. В игре с индуктивной динамикой существует управляющий параметр  $\alpha = \frac{J}{N}$  определяющий кооперативные эффекты игры  
(здесь  $J = 2^m$  – показатель информированности игроков)

При этом:

- если  $\alpha > \alpha_c \approx 0.3$  ( $H \neq 0$ ), то не эффективен)
- если  $\alpha < \alpha_c$  ( $H = 0$ ), то эффективен, симметричная фаза)

# **Другие разделы экономики:**

## **1. Распределение богатства**

(V. Yakovenko, A. Dragulescu, M. Романовский)

## **2. Фирмы.**(L. Amaral, S. Buldyrev, H. Stanley)

## **3. Влияние рекламы на объем продаж**

(D. Sornette)

## **4. Макроэкономика и финансовая система**

(В.П. Маслов, В.М. Полтерович, И.Г. Поспелов, Д.С. Чернавский)

# Экономифизика и мэйнстрим

*«Лежащее в основе современной экономической теории представление о человеке, который, исходя из рациональной оценки существующих возможностей, руководствуется лишь собственной выгодой, на самом деле является результатом достаточно позднего установления.*

*К счастью так было не всегда. Например, в позднем Средневековье представление о «справедливых ценах» доминировало в экономическом мышлении. Уровень цен, который устанавливался гильдиями, городским управлением и государственными контролерами, обеспечивал приемлемую прибыль для торговцев и в то же время позволял покупателям удовлетворять свои потребности без сверхзатрат. Купцы сознавали, что они должны руководствоваться не только стремлением к прибыли, но и какими-то социальными обязательствами по отношению к окружающим...*

# Эконофизика и мэйнстрим

*... Но в Новое Время ситуация изменилась. Бурное развитие международной торговли вывело экономику из-под контроля отдельных правительств и государств. В большинстве крупных европейских городов расцвели международные торговые рынки, вследствие чего регулирование цен пришло в упадок, а купцы получили возможность продавать товары по максимальным ценам, которые могли снести покупатели. Неудивительно, что в такой обстановке очень быстро возникли и развились сугубо эгоистические формы общения. Такая система торговли нуждалась лишь в объяснении механизма своего действия, что и сделал Адам Смит, создав экономическую теорию, объясняющую и фактически оправдывающую возникшую систему».*

*Philip Ball: CRITICAL MASS*

# Экономифизика и мейнстрим

*МЕЙНСТРИМ*

ИНСТИТУЦИОНАЛЬНАЯ ЭКОНОМИКА

ЭКОНОФИЗИКА



# Литература:

- 1. Мантенья Р.Н., Стенли Г.Ю. Введение в эконофизику. URSS. М.: 2009
- 2. Сорнетте Дидье. Как предсказывать крахи финансовых рынков. Критические события в комплексных финансовых системах. М.: Интернет-Трейдинг, 2003
- 3. Романорвский М.Ю., Романовский Ю.М. Введение в эконофизику. М.: 2007
- 4. Bouchaud J.-P., Potters M. Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 2000
- 5. Dubovikov M.M., Starchenko N.S., Dubovikov M.S. Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series // Physica. 2004. A 339. P. 591 – 608
- 6. Ball Ph. Critical mass. Farrar, Straus and Giroux, New York, 2004
- 7. Mantegna R.N., Stanley H.E. Scaling behavior in the dynamics of an economic index // Nature. 1995. 376. P. 46 – 49
- 8. Gabaix X., Gopikrishnan P., Plerou V., Stanley H.E. A theory of power-law distributions in financial market fluctuations // Nature. 2003. 423. P. 267 – 270
- 9. Bak Per, Paczuski, M. Shubik, Price Variations in a Stock Market with Many Agents, Working paper 96-05-078, Santa Fe Institute Economics Research Pro-gramm, 1996
- 10. Challet D., Chessa A., Marsili M., Zhang Y-C. From minority games to real mar-kets // Quantitative Finance. 2001. 1(1). P. 168 – 176

Спасибо за внимание