
Una Serpiente

СТЕРЕОМЕТРИЯ

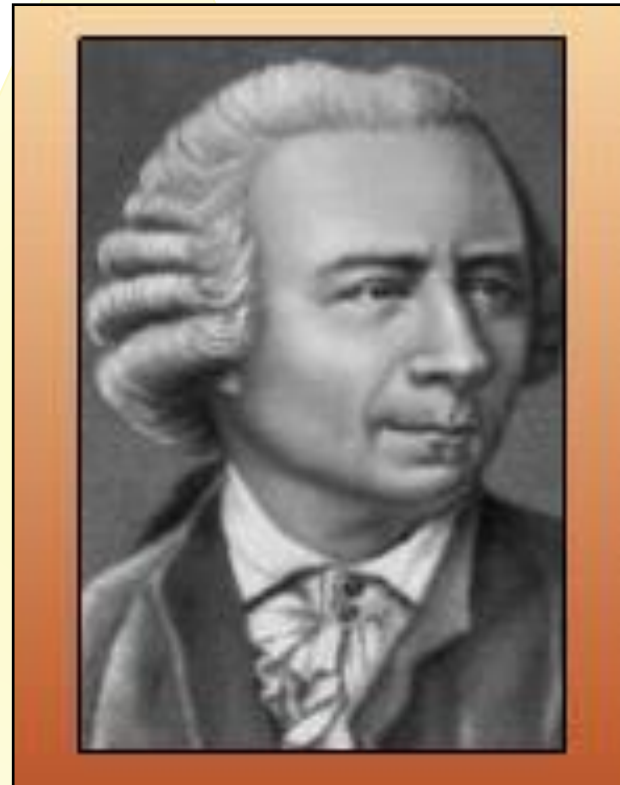
- **Объёмы тел**
- **Изображения пространственных фигур**

«Мой карандаш, бывает еще остроумней моей головы», — признавался великий математик Леонард Эйлер (1707—1783).

В своей деятельности человеку повсюду приходится сталкиваться с необходимостью изучать форму, размеры, взаимное расположение пространственных фигур.

Подобные задачи решают и астрономы, имеющие дело с самыми большими масштабами, и физики, исследующие структуру атомов и молекул.

Раздел геометрии, в котором изучаются такие задачи, называется стереометрией

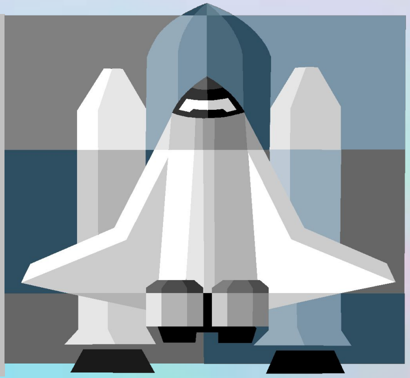


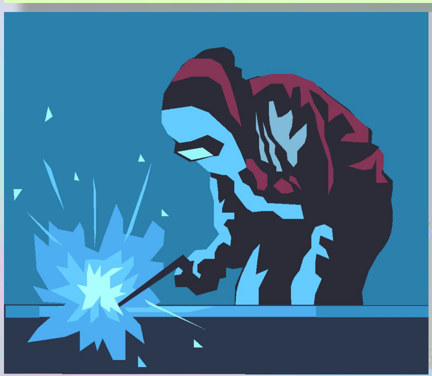
Интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к изучению стереометрии

Мы знаем, что

- **ГЕОМЕТРИЯ** возникла из практических задач людей;
- **ГЕОМЕТРИЯ** лежит в основе всей техники и большинства изобретений человечества;
- **ГЕОМЕТРИЯ** нужна

• технику,
• инженеру,
• рабочему,
• архитектору,
• модельеру …

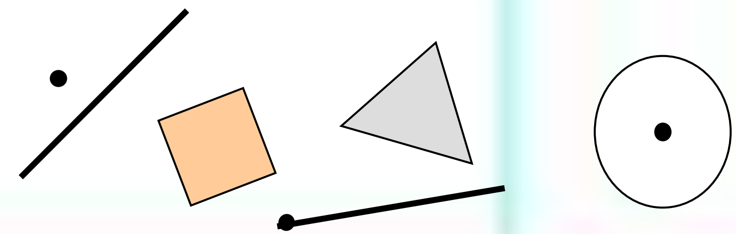




«планиметрия» – наименование смешанного происхождения: от греч. **metreo** – *измерять* и лат. **planum** – *плоская поверхность (плоскость)*

ПЛАНИМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ на плоскости

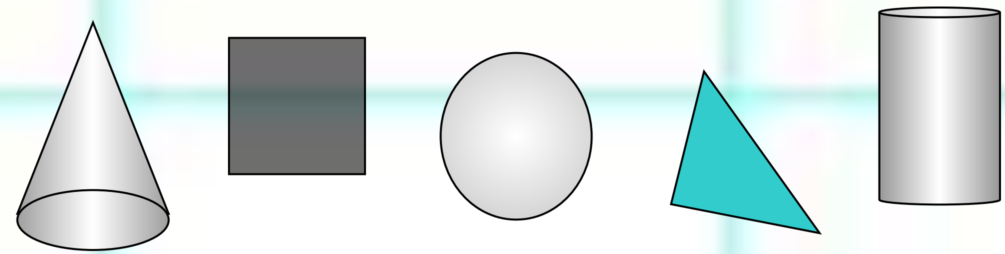


ГЕОМЕТРИЯ

«стереометрия» – от греч. **stereos** – *пространственный* (**stereon** – *объем*).

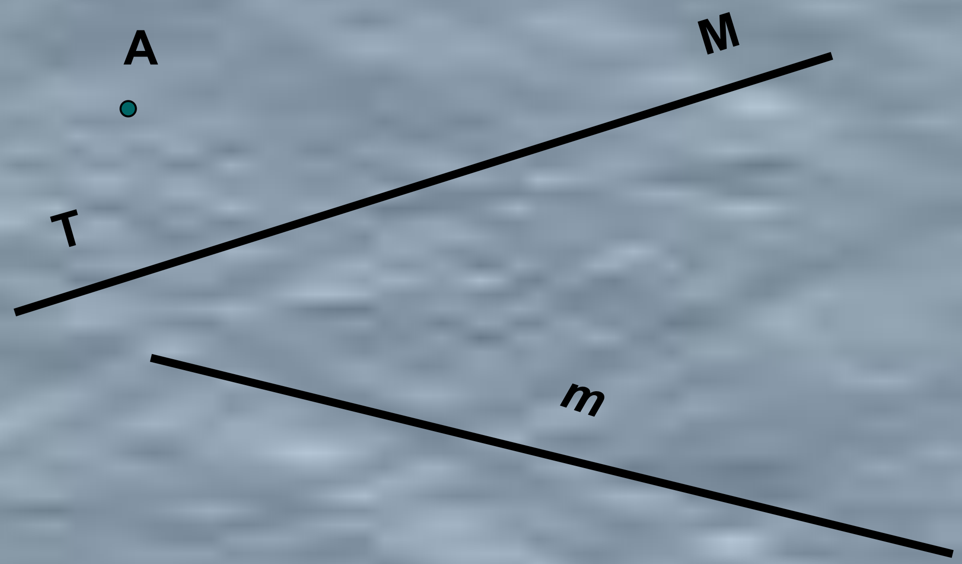
СТЕРЕОМЕТРИЯ

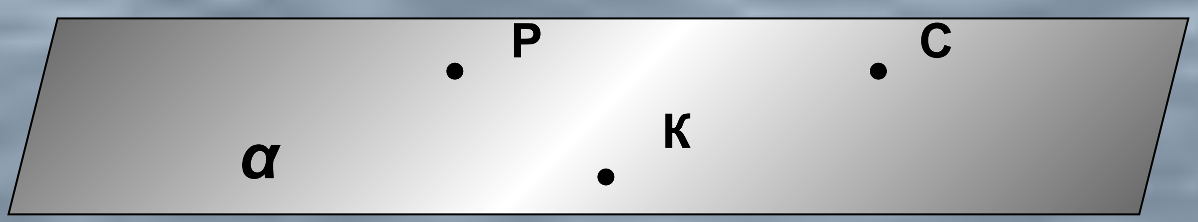
ГЕОМЕТРИЯ в пространстве



Основные понятия стереометрии

- точка,
- прямая,
- плоскость,
- расстояние





$\alpha = (PKC)$

$|PK|$

$A \notin \alpha$, $KC \subset \alpha$, $P \in \alpha$, $|PK| = 2$ **см**

Аксиомы стереометрии

Слово «аксиома» греческого происхождения и в переводе означает истинное, исходное положение теории.

Система аксиом стереометрии дает описание свойств пространства и основных его элементов

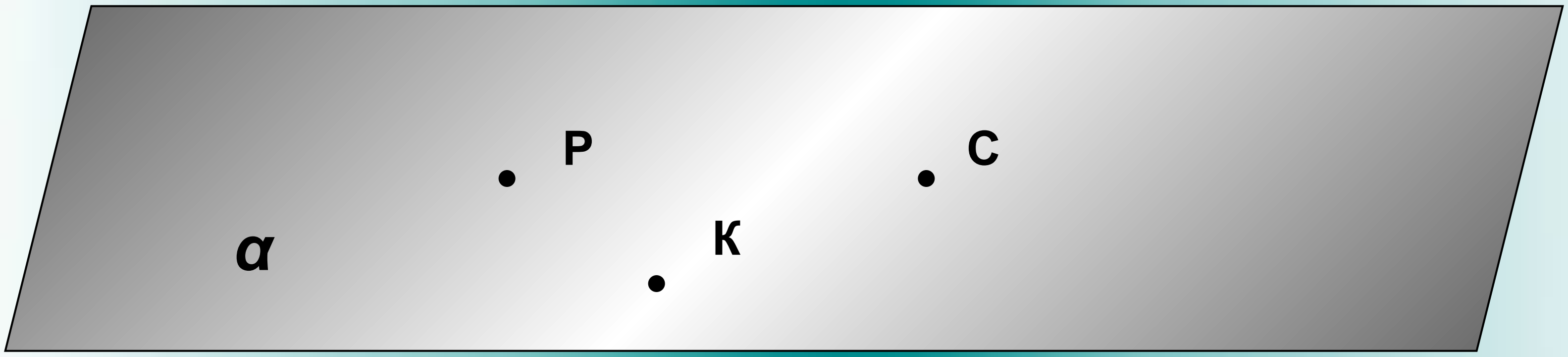
Понятия «***точка***», «***прямая***», «***плоскость***», «***расстояние***» принимаются без определений:

их описание и свойства содержатся в аксиомах

Аксиомы стереометрии

А-1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой проходит плоскость, и притом только одна

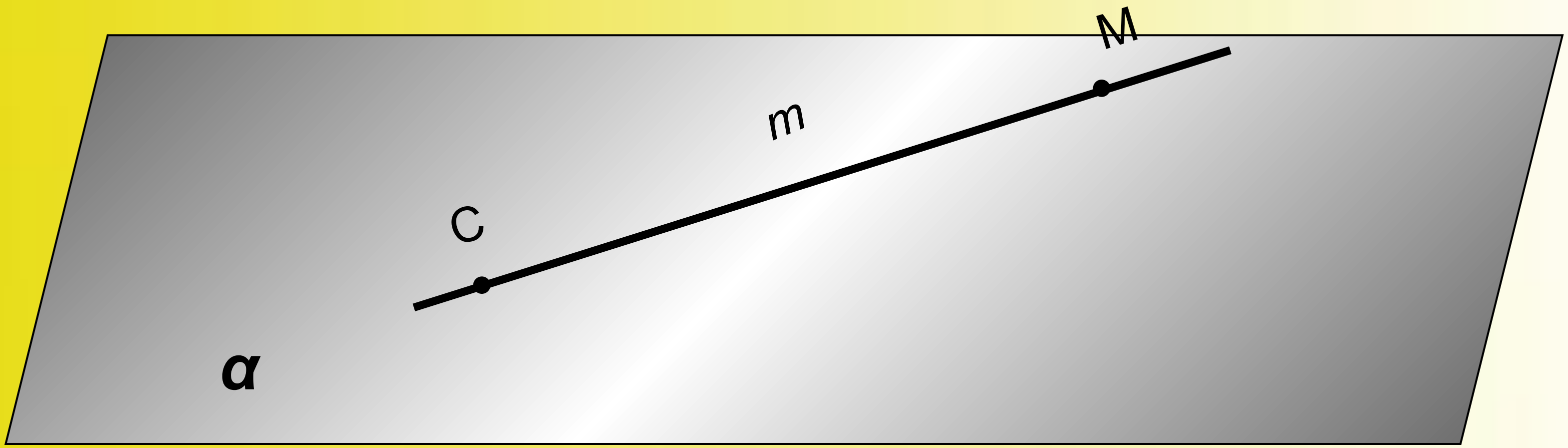


$\alpha = (PKC)$

Аксиомы стереометрии

А-2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости

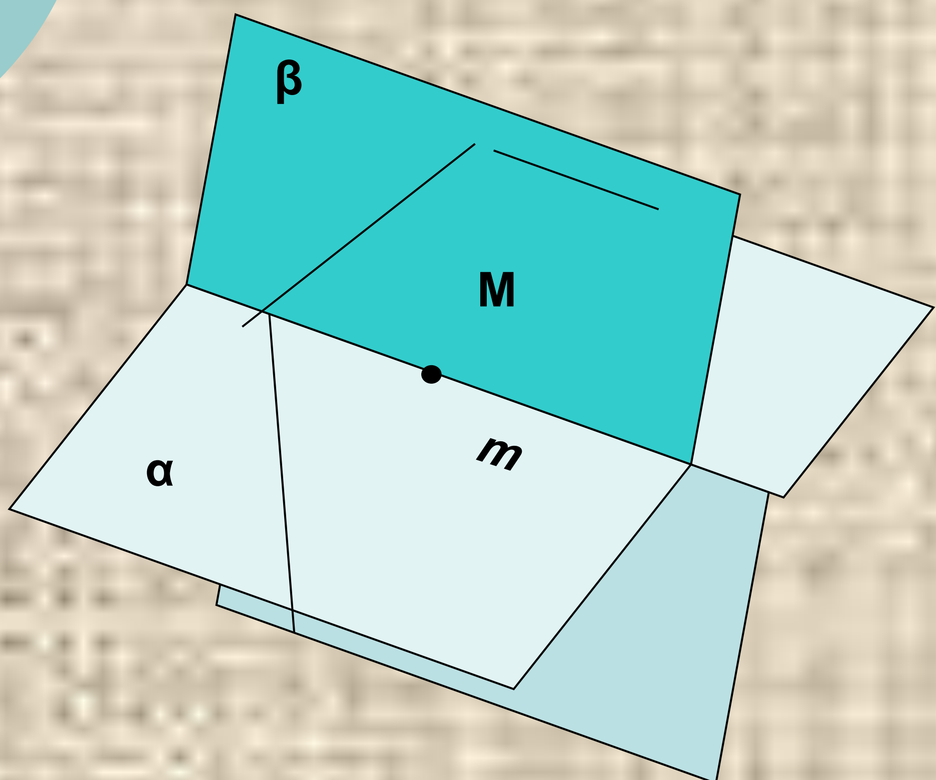


Если $M, C \in \alpha$ $M, C \in m,$ **то** $m \subset \alpha$

Аксиомы стереометрии

А-3

Если две плоскости имеют общую точку,
то они имеют общую прямую,
на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$M \in \alpha,\ M \in \beta,\ M \in \boldsymbol{m}$

⇓

$\boldsymbol{m} \in \alpha,\ \boldsymbol{m} \in \beta$

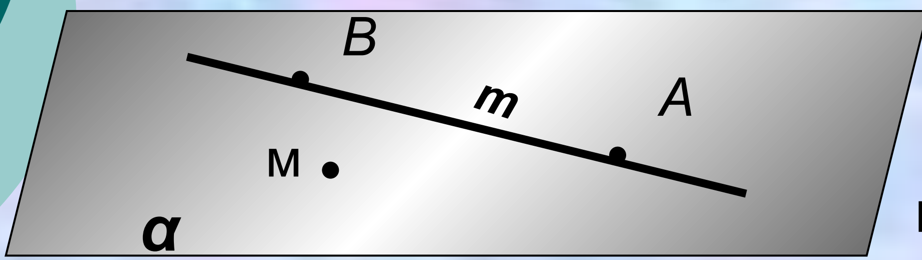
⇓

$\alpha \cap \beta = \boldsymbol{m}$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

Т-1

Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.



Дано: M∉*m*

Доказательство

Пусть точки ***A, B* ∈ *m*.**

- Так как **M∉*m***, то точки ***A*, *B*** *и* ***M*** не принадлежат одной прямой.
По А-1 через точки ***A*, *B*** *и* ***M*** проходит только одна плоскость — плоскость ***(ABM)***,
Обозначим её ***α***. Прямая ***m*** имеет с ней две общие точки — точки ***A*** и ***B***, следовательно,
по аксиоме А-2 эта прямая лежит в плоскости ***α***..
Таким образом, плоскость ***α*** проходит через прямую ***m*** и точку ***M*** и является искомой.

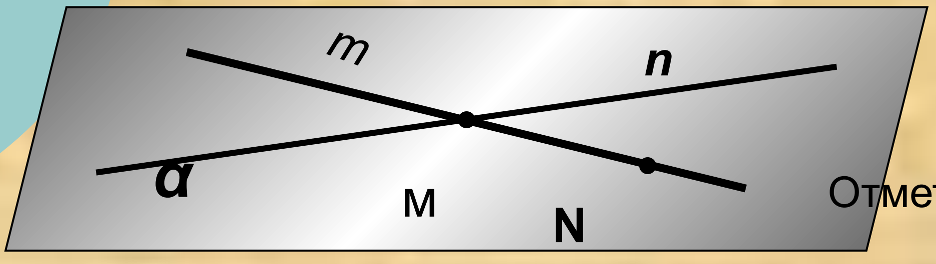
- Докажем, что другой плоскости, проходящей через прямую ***m*** и точку ***M***, не существует.
Предположим, что есть другая плоскость — ***β***, проходящая через прямую ***m*** и точку ***M***.
Тогда плоскости ***α*** и ***β*** проходят через точки ***A*, *B*** и ***M***, не принадлежащие одной прямой, а значит, совпадают. Следовательно, плоскость ***α*** единственна.

- Теорема доказана

СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

Т-2

Через любые две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



<u>**Дано**</u>: $m \cap n = \boldsymbol{M}$

<u>**Доказательство**</u>

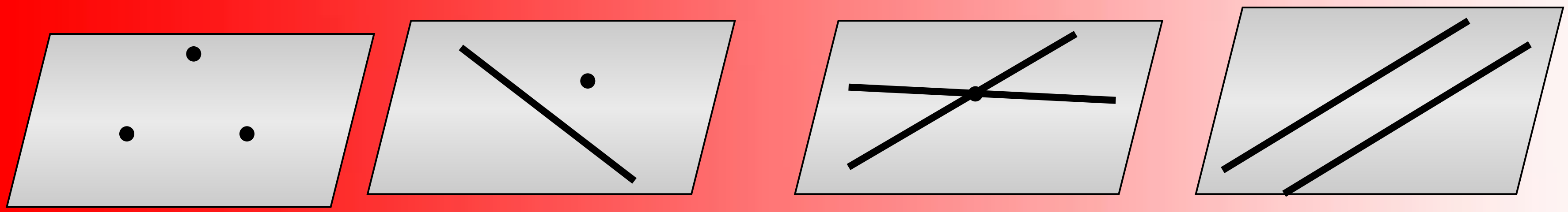
Отметим на прямой ***m*** произвольную точку **N**, отличную от **M.**

- Рассмотрим плоскость ***α*** **=(n, N).** Так как ***M∈ α*** и ***N∈α***, то по А-2 ***m ⊂ α.*** Значит обе прямые ***m, n*** лежат в плоскости ***α*** и следовательно ***α***, является искомой
- Докажем единственность плоскости ***α***. Допустим, что есть другая, отличная от плоскости ***α*** и проходящая через прямые ***m*** и ***n***, плоскость ***β.***
  Так как плоскость ***β*** проходит через прямую ***n*** и не принадлежащую ей точку ***N***, то по Т-1 она совпадает с плоскостью ***α***. Единственность плоскости ***α*** доказана.
- Теорема доказана

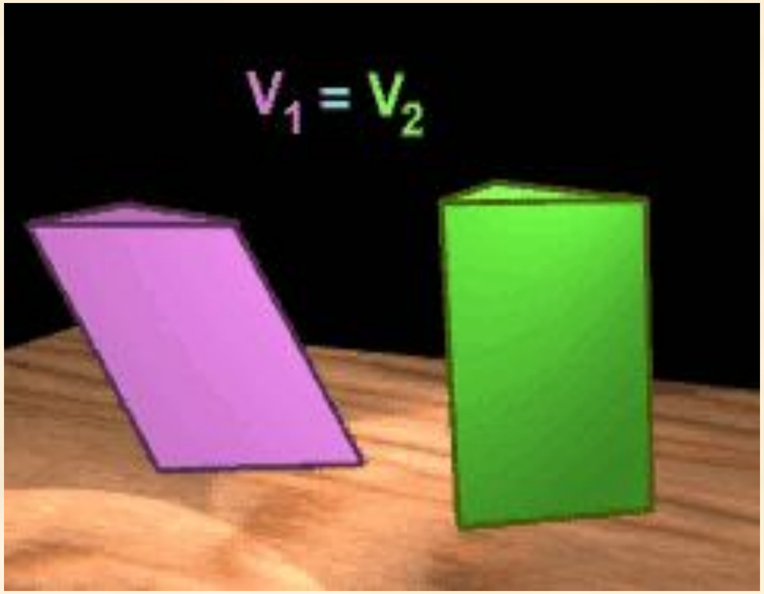
ВЫВОД

Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?

- По трем точкам, не лежащим на одной прямой
- По прямой и точке, не лежащей на этой прямой
- По двум пересекающимся прямым
- По двум параллельным прямым



Определение объема тела



Определение

- Тело называется простым, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.
- В частности, любой выпуклый многогранник является простым телом.

Определение

Объемом тела называется положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая следующими свойствами:

1. равные тела имеют равные объемы;
2. при параллельном переносе тела его объем не изменяется;

Определение

Тела с равными объемами называются равновеликими .

Из свойства 2 следует, что если тело с объемом V_1 содержится внутри тела с объемом V_2, то $V_1 < V_2$.

- ***за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;***
- ***если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;***

Теорема 1.

- Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений: V = abc

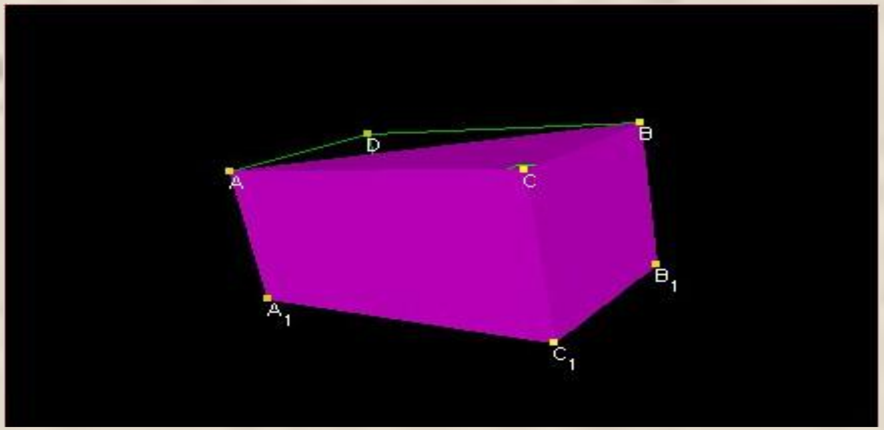
---

Теорема 2.

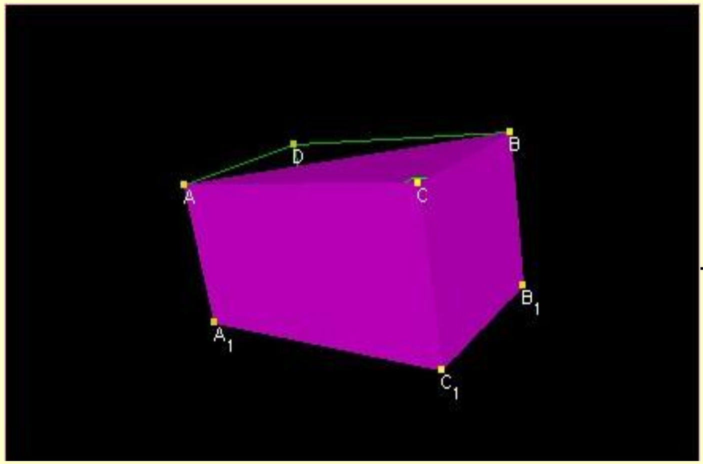
Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту: V = SH .

Пусть ABCA 1 B 1 C 1 – прямая треугольная призма,
причем ее основание – прямоугольный треугольник ABC

Дополним эту призму до прямоугольного параллелепипеда ACBDA 1 C 1 B 1 D 1.
Середина O диагонали AB 1 этого параллелепипеда является его центром симметрии.



Данная призма и призма ABDA1B1D1, которая дополняет данную призму до параллелепипеда, симметричны относительно точки O , а поэтому равновелики.



Пусть V и V_1 – соответственно объемы призмы $ABCA_1B_1C_1$ и параллелепипеда,

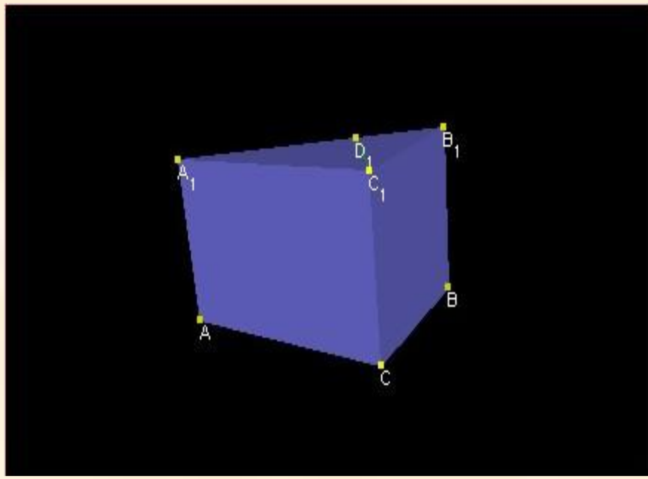
---

тогда, учитывая теорему1, получим

Рассмотрим произвольную прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$
Если Δ ABC не прямоугольный, то его можно разбить на два прямоугольных треугольника ADC и BDC .
Следовательно,
$$V = V_1 + V_2 = S_{\Delta ADC} \cdot H + S_{\Delta BDC} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot H = S \cdot H .$$

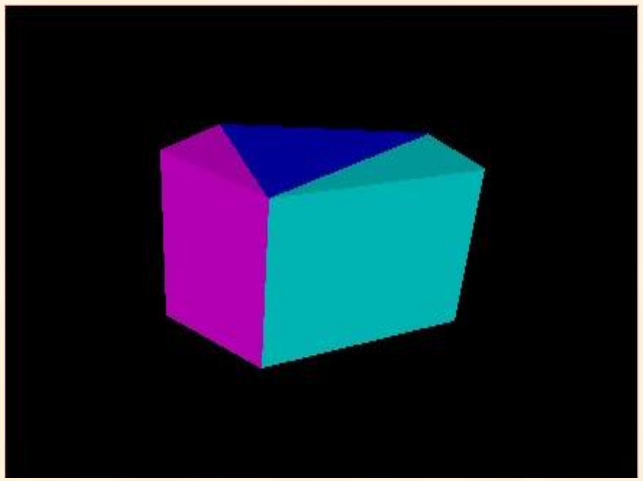
Таким образом, теорема справедлива для произвольной прямой треугольной призмы. Если есть прямая n-угольная призма ($n > 3$), разобьем ее на конечное число прямых треугольных призм

Сложив объемы этих треугольных призм, получим объем n-угольной призмы $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) H = S \cdot H$, где $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – площади оснований треугольных призм, S и H – площадь основания и высота n-угольной призмы.



$$V = \frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{2}AC^*BC = S_{ABC}CC_1 = S^*H$$

Рассмотрим произвольную прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$



Если Δ ABC не прямоугольный, то его можно разбить на два прямоугольных треугольника ADC и BDC .

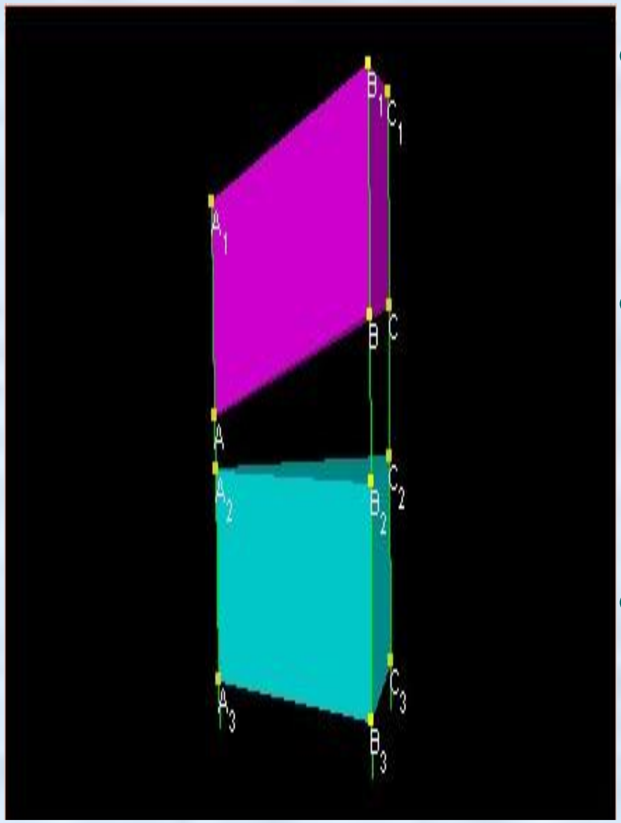
Следовательно, $V = V_1 + V_2 = S_{\Delta ADC} \cdot H + S_{\Delta BDC} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot H = S \cdot H$.
**Таким образом, теорема справедлива для произвольной прямой треугольной призмы. Если есть прямая n -угольная призма ($n > 3$),
разобьем ее на конечное число прямых треугольных призм**

Сложив объемы этих треугольных призм, получим объем n -угольной призмы
$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H = S \cdot H$,
где $S_1, S_2, \ldots, S_n$ **– площади оснований треугольных призм,**
S и H – площадь основания и высота n -угольной призмы.

Теорема 3.

Объем наклонной призмы равен площади перпендикулярного сечения на боковое ребро: V = S пс

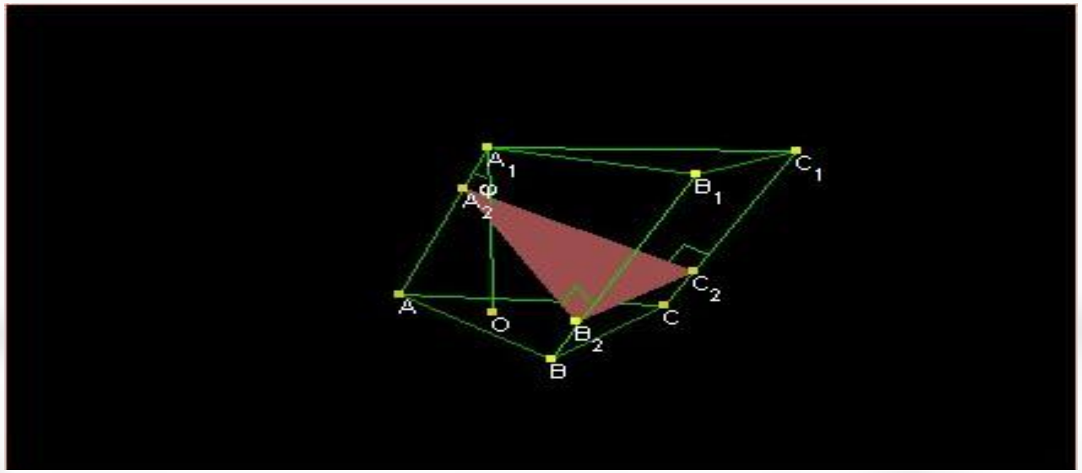
- **Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма (чертеж 6.1.4), $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ – перпендикулярные сечения этой призмы.**
- **Призма $A_2B_2C_2A_3B_3C_3$ прямая, причем $A_2A_3=A_1A$.Заметим, что параллельный перенос на вектор переводит многогранник $A_2B_2C_2A_1B_1C_1$ в многогранник $A_3B_3C_3ABC$.**
- **Следовательно, эти многогранники равновеликие. Пусть V – объем призмы $ABCA_1B_1C_1$, V_1 – объем призмы $A_3B_3C_3A_2B_2C_2$, V_2 – объем многогранника $A_2B_2C_2ABC$, тогда $V + V_2 = V_1 + V_2$, откуда $V = V_1$.**
- **Поскольку призма $A_3B_3C_3A_2B_2C_2$ прямая, то**
  $V_1 = S_{\Delta A_3B_3C_3} \cdot A_2A_3 = S_{пс} \cdot l = V$, что и требовалось доказать



Теорема 4.

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту: $V = S \cdot H$.

- Пусть $A_2B_2C_2$ – перпендикулярное сечение наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, A_1O – высота этой призмы.
- Пусть . Поскольку , а , то плоскости $A_2B_2C_2$ и ABC образуют тот же угол φ, что и прямые A_1A и A_1O.
- По теореме о площади ортогональной проекции $S_{A_2B_2C_2} = S_{ABC} \cos\varphi$. Согласно теореме 3
- $V = S_{A_2B_2C_2} \cdot A_1A = S_{ABC} \cos\varphi \cdot A_1A = S_{ABC} \cdot A_1O = S \cdot H$.

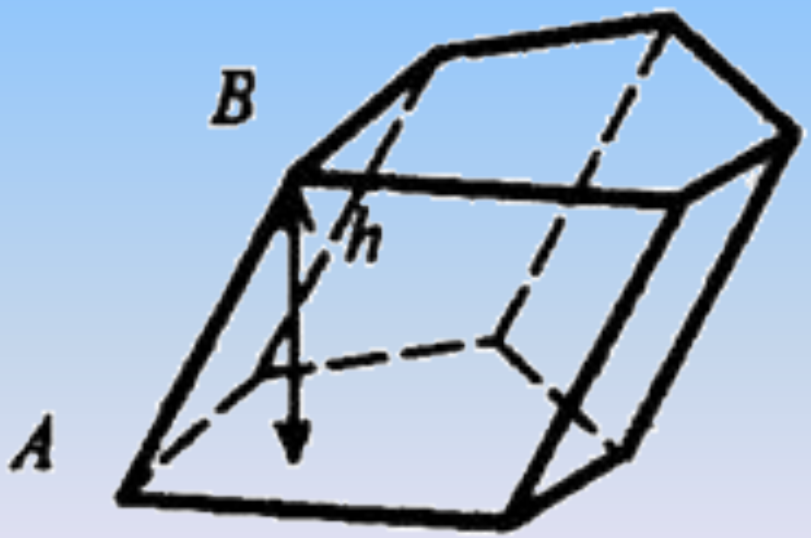


Объёмы тел
и их изображение в пространстве

Многогранник — тело, ограниченное плоскостями.

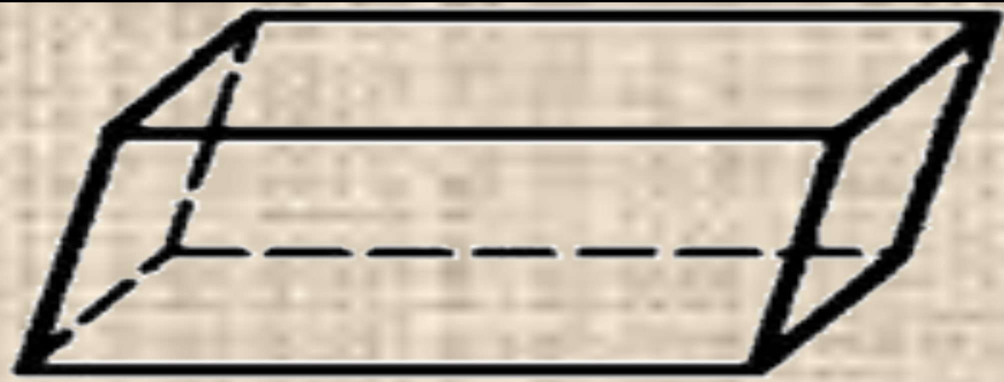
**Призма — многогранник, основания которого равные многоугольники,
боковые грани — параллелограммы.**

**AB — ребро;
h — высота**



Объём: $V = Sh$
S — площадь основания

- **Параллелепипед — призма, у которой основания параллелограммы.**
- **Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке**



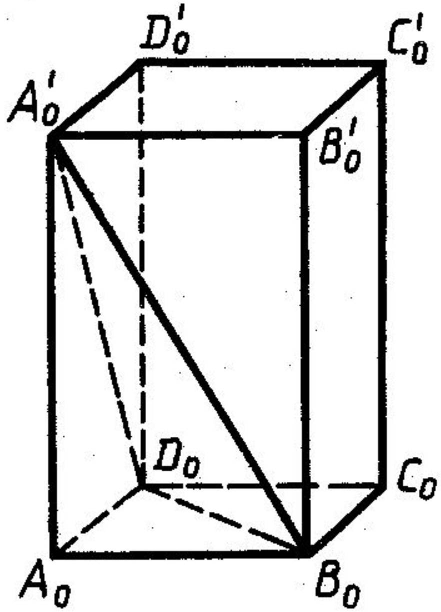
Прямоугольный параллелепипед — у которого основания прямоугольники, а рёбра перпендикулярны основанию.
Рёбра:
a — длина, b — ширина, c — высота; d — диагональ (все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны)

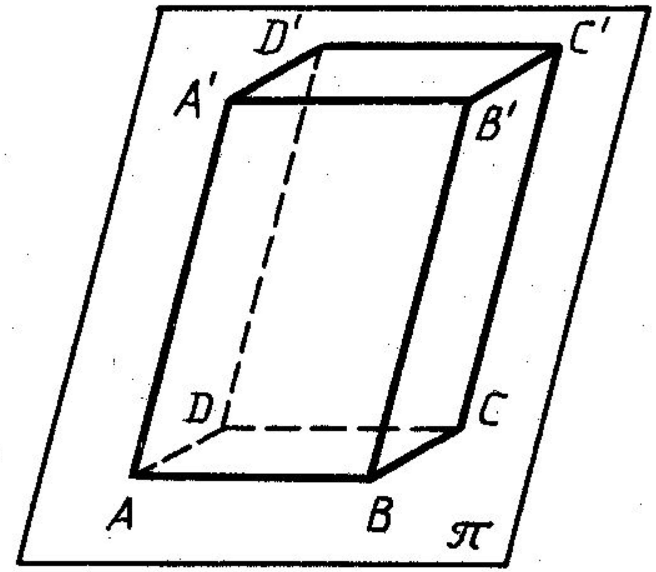
Объём: V = a•b•c

Полная поверхность: S = 2(ab + bc + ca) d 2 = a 2 + b 2 + c 2

Для построения изображения произвольного параллелепипеда AoBoCoDoAóBóCóDó заметим, что точки Ao, Bo, Do и Aó являются вершинами тетраэдры AoBoDoAó.

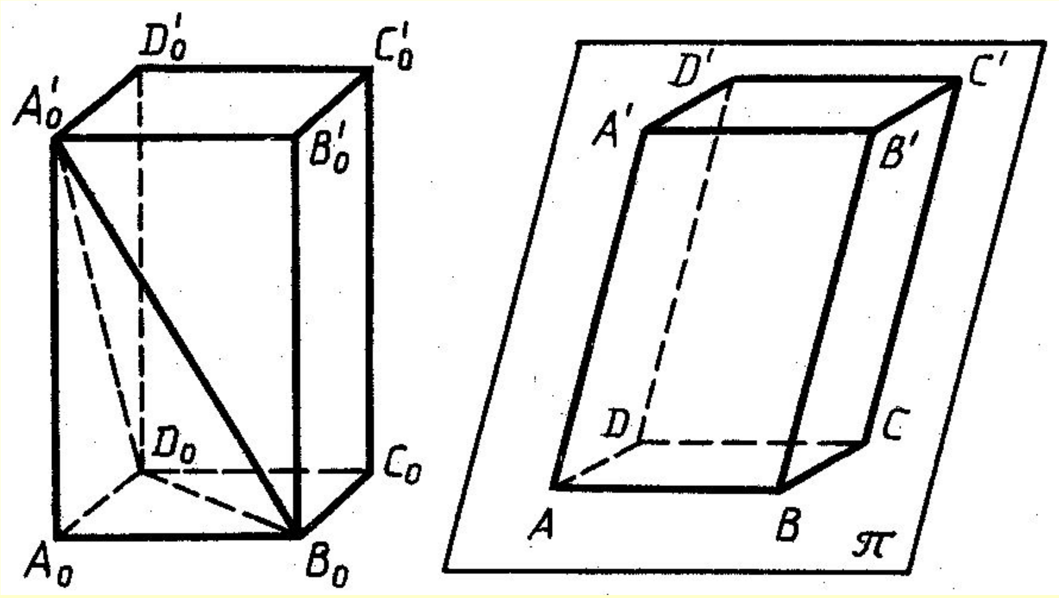
Поэтому в качестве их изображения можно взять вершины произвольного четырёхугольника ABDA'.





Другими словами, любые три отрезка AB, CD и AA' плоскости изображения с общим концом A, ни какие два из которых не лежат на одной прямой, можно считать изображением рёбер AoBo, AoDo и AoAó параллелепипеда.

Таким образом параллелепипед ABCDA'B'C'D' является изображением параллелепипеда AoBoCoDoAóBóCóDó .



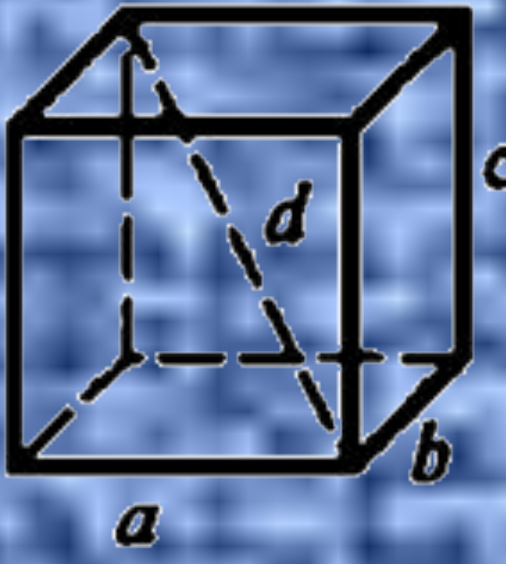
Но тогда изображения остальных рёбер строятся однозначно, так как все грани параллелепипеда являются параллелограммами, и, следовательно, их изображения также будут параллелограммами.

Куб — прямоугольный параллелепипед, все грани которого квадраты. a=b=c

---

Число граней – 6,
форма граней – квадраты,
число ребер – 12, число вершин – 8.

V = a 3
(отсюда и название третьей степени — «куб»),
d — диагональ

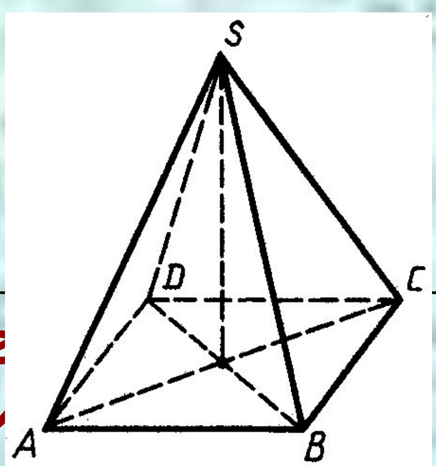


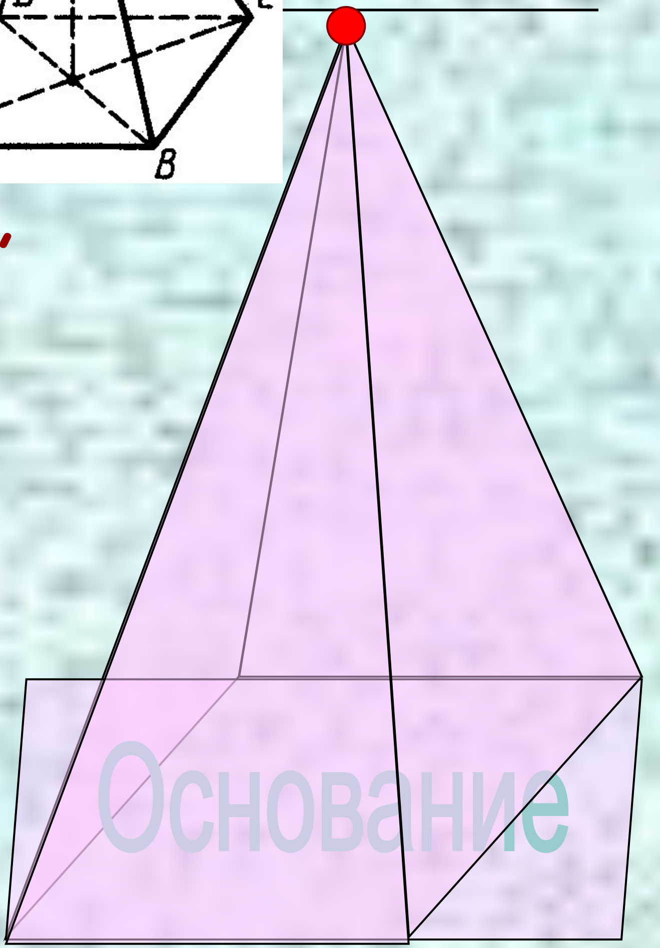
S = 6a 2
d 2 =3a 2

Пирамида –

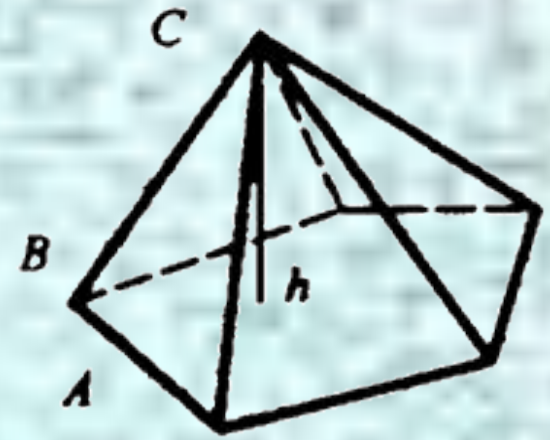
многогранник, основание которого многоугольни

а остальные грани - треугольники, имеющие общую вершину.





По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т.д.



$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

Тетраэдр –

это один из пяти типов правильных многогранников;

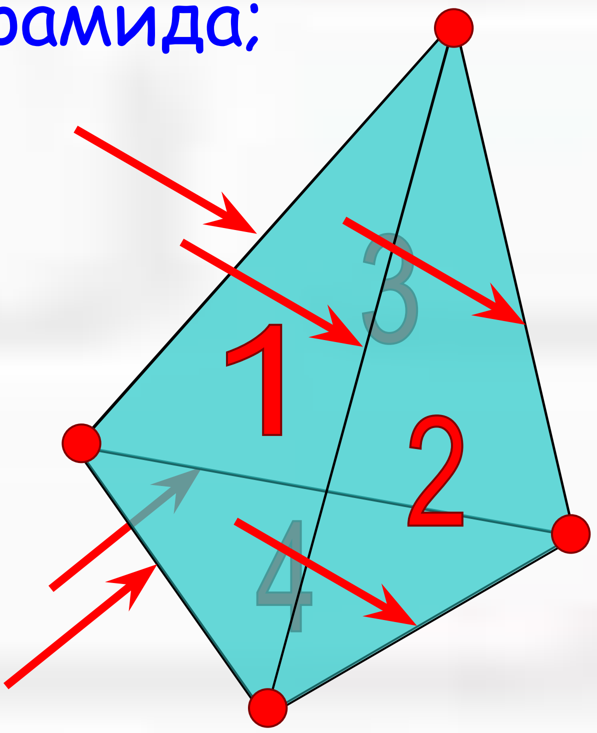
правильная треугольная пирамида;

форма граней – треугольники,

Число граней – 4,

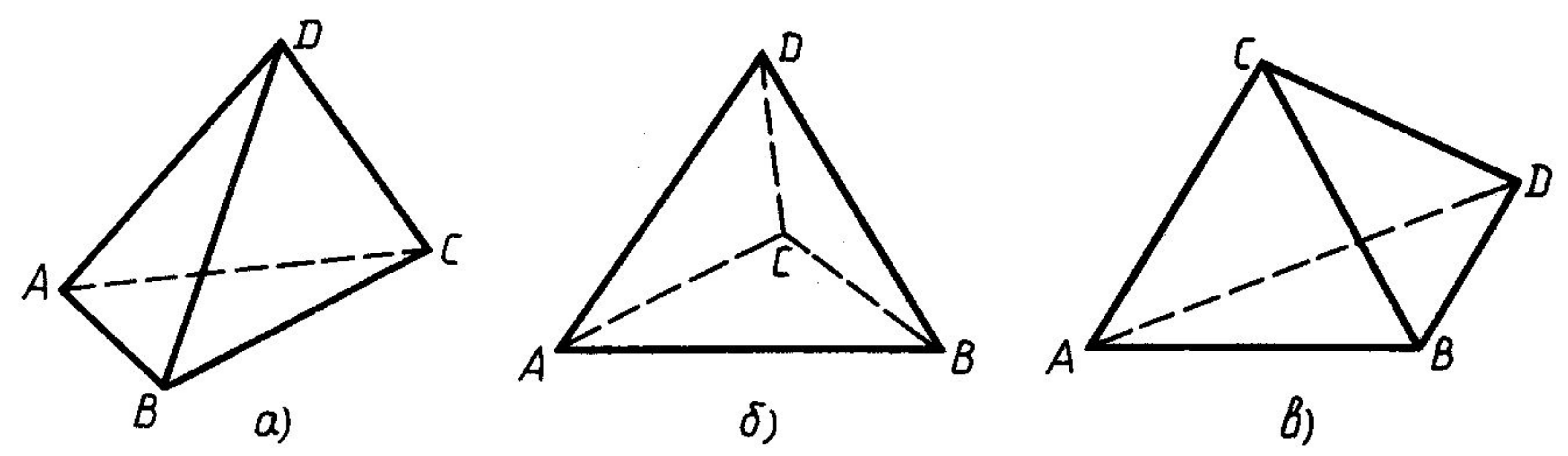
число ребер – 6,

число вершин – 4.



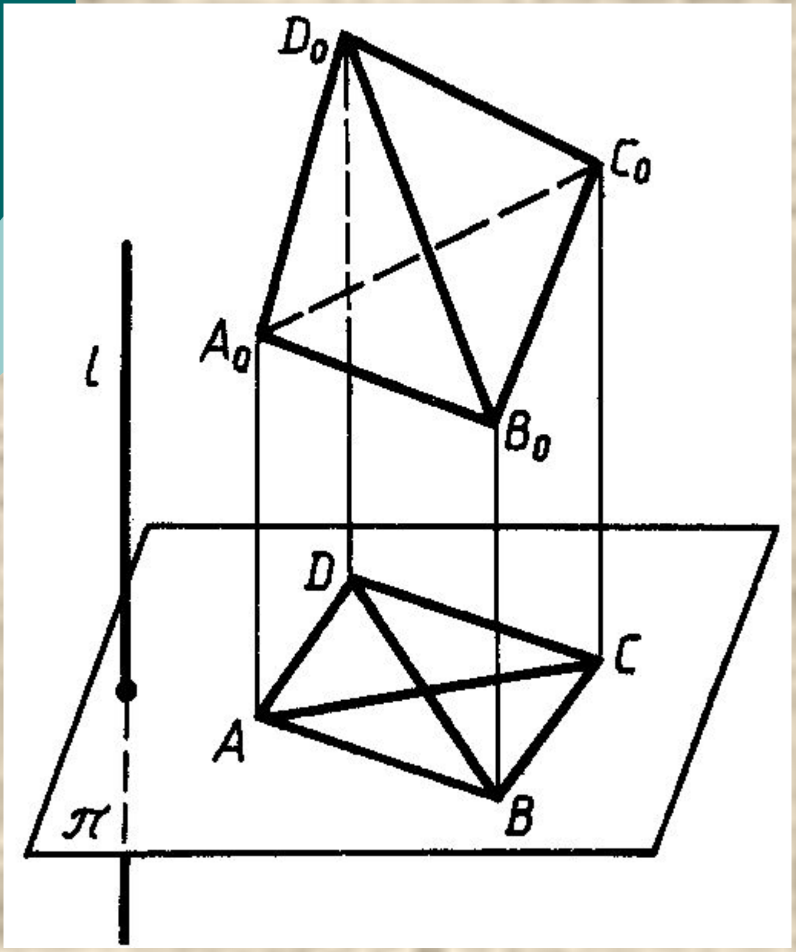
- *Под изображением многогранника следует понимать фигуру, состоящую из проекций всех его рёбер.*

Фигура, состоящая из сторон и диагоналей любого (выпуклого или невыпуклого) четырёхугольника, является изображением тетраэдра при соответствующем выборе плоскости изображений и направления проектирования.



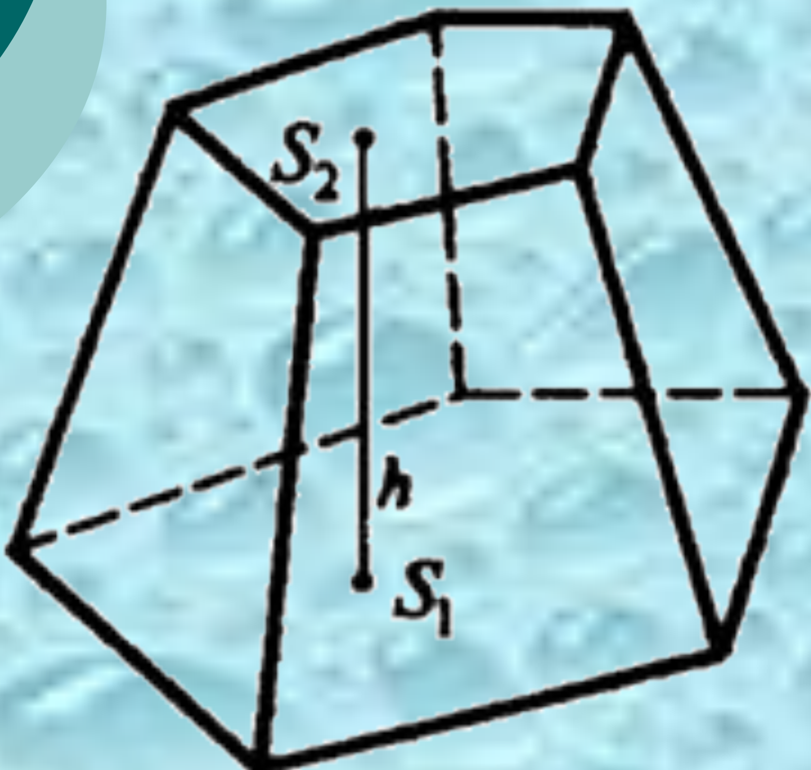
На этих рисунках невидимые рёбра изображены штриховыми линиями.

Пусть $A_0B_0C_0D_0$ – произвольный тетраэдр, A, B, C и D – параллельные проекции его вершин на плоскость изображений (п).



Отрезки AB, BC, CA, AD, BD, CD служат сторонами и диагоналями четырёхугольника ABCD. Фигура, образованная из этих отрезков (или любая другая фигура, подобная ей), является изображением тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$.

Усеченная пирамида – плоскость сечения которой параллельна плоскости основания.



$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$$

ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

Октаэдр

- Число граней – 8,

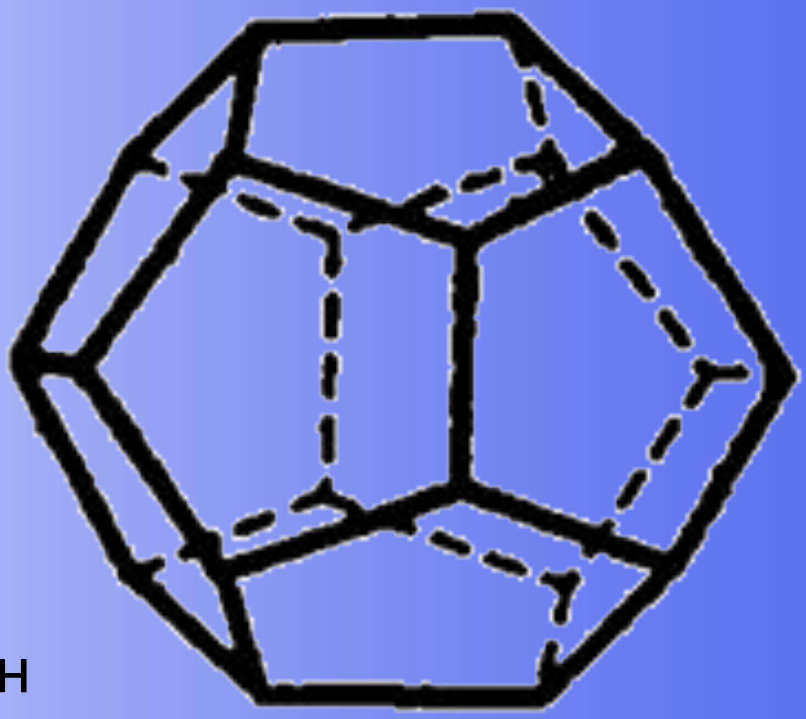
форма граней – треугольники,

число ребер – 12,

число вершин – 6.

ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

Додекаэдр



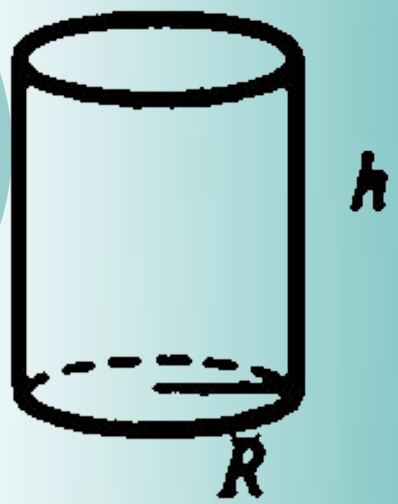
- Число граней – 12,
форма граней – пятиугольники,
число ребер – 30, число вершин
– 20.

ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

Икосаэдр

Число граней – 20,
форма граней – треугольники,
число ребер – 30,
число вершин – 12.

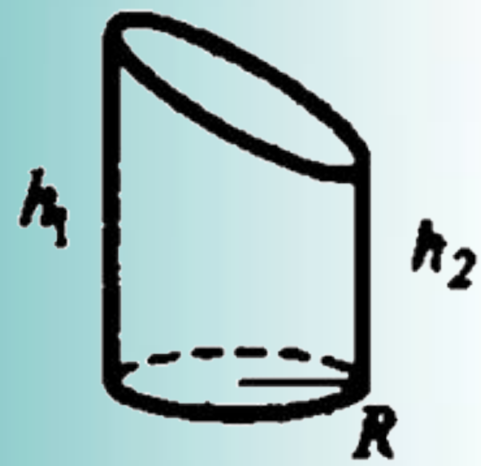
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ



Цилиндры.

- **Круглый прямой.**
- **Круглый усеченный**

S – площадь боковой поверхности.
V – объем.



$$S = 2\pi \cdot R \cdot h$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

$$S = \pi \cdot R \cdot (h_1 + h_2)$$

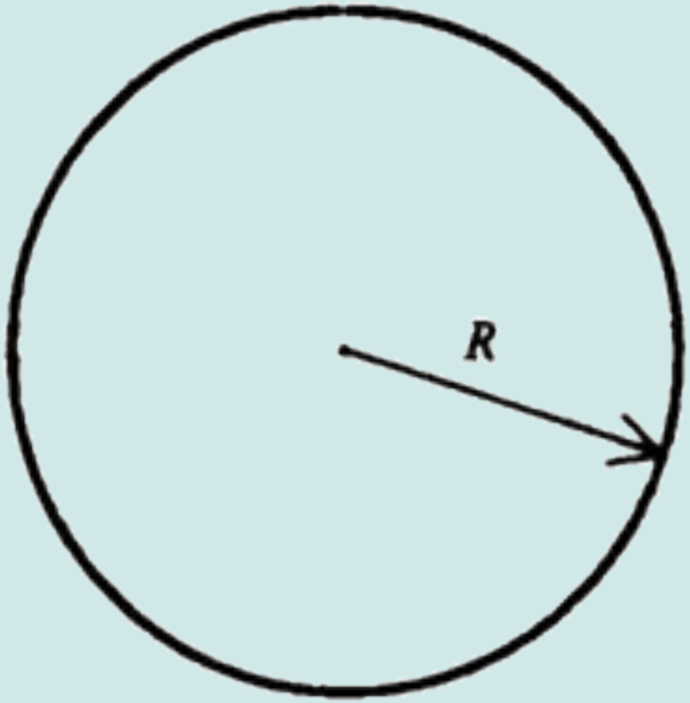
$$V = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{(h_1 + h_2)}{2}$$

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Сфера – поверхность шара

$$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$



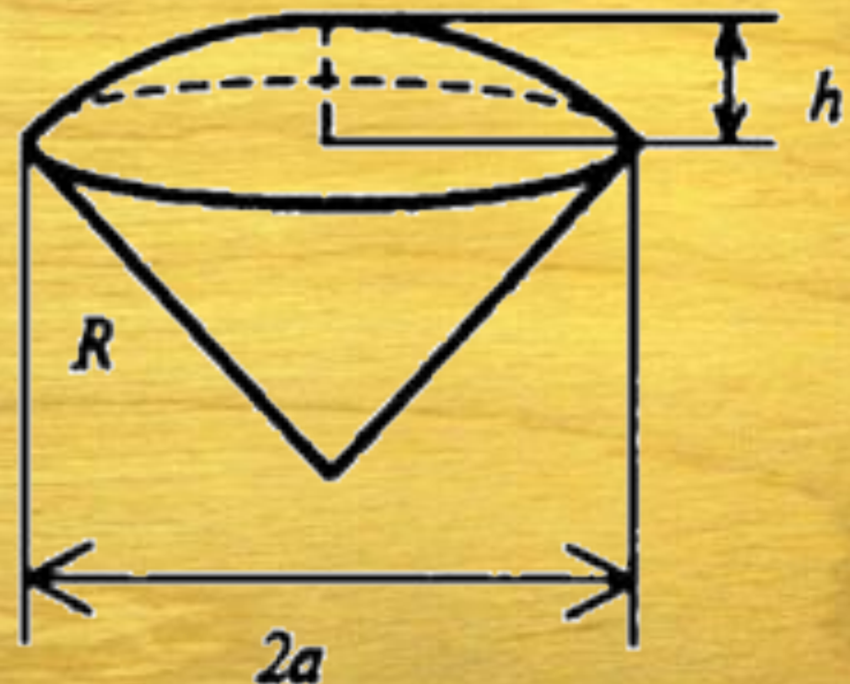
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Шаровой сектор.

R — радиус шара;
a — радиус окружности сечения;
h — высота отсекаемой шляпки

$$S = \pi \cdot R^2(2h + a)$$

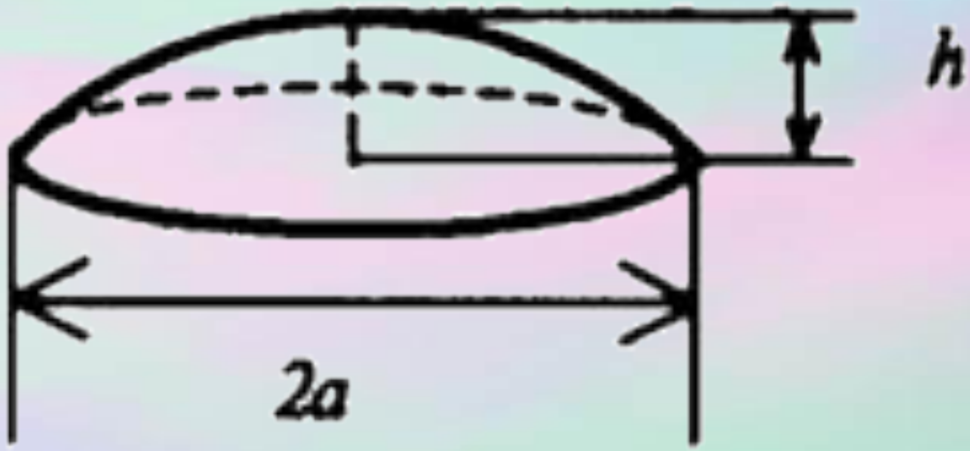
$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3 h$$



ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Шаровой сегмент

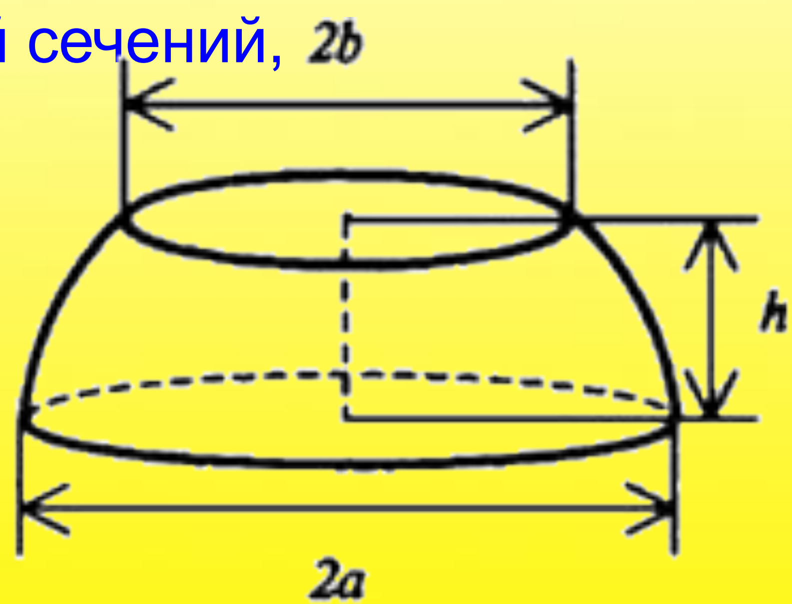
R — радиус шара;
a — радиус окружности сечения;
h — высота отсекаемой шляпки



ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Шаровой слой

R — радиус шара,
a , b — радиусы окружностей сечений,
h — высота слоя



$$S = \pi(2Rh + a^2 + b^2)$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$$

При решении стереометрических задач высоки требования к качеству чертежа, его наглядности.

Нельзя научиться решать сколько-нибудь содержательные стереометрические задачи, не освоив принципы и технику построения пространственного чертежа.

- Сюда входит: выбор оптимального положения изображаемого тела (в частности, выбор ориентации - верх и низ, право и лево),
- выбор ракурса и проекции, умение минимизировать количество изображенных линий (напомним, что видимые и невидимые линии должны изображаться различным образом),
- умение строить сечения и проекции на плоскость, умение выделить на пространственном чертеже
- и соответственно изобразить плоскую конфигурацию, дающую ключ к решению задачи, умение перевести условие задачи на графический язык.