

# **О ВЛИЯНИИ ПРЕЦЕССИИ ОРБИТЫ ЛУНЫ НА ЭВОЛЮЦИЮ И ВРЕМЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВЫСОКОАПОГЕЙНЫХ ОРБИТ ИСЗ**

*Виктория И. ПРОХОРЕНКО*

*[vprokhor@iki.rssi.ru](mailto:vprokhor@iki.rssi.ru)*

- *Проблема выбора орбит ИСЗ с длительным временем существования не является новой. Она всегда была актуальной, однако в последние годы эта проблема приобрела большую актуальность из-за того, что существенно повысился ресурс бортовых приборов и бортовой энергетики. Теперь необходимое время существования орбит измеряется не годами, а десятилетиями. Это заставило произвести переоценку ценностей и вернуться к рассмотрению факторов, влияющих на длительность времени существования.*

# Введение

- Полученное в классической работе М.Л. Лидова [1961] решение для спутникового варианта двукратно- осредненной ограниченной задачи трех тел содержат необходимые, но не достаточные рекомендации для решения рассматриваемой задачи.
- Численные эксперименты в рамках ретроспективного анализа времени существования спутников серии «Прогноз», запущенных на высокоапогейные орбиты в 1972 - 1995, показали существенное влияние некоторых факторов, которые лежат вне решения осредненной задачи трех тел

# Введение (2)

- Для орбиты «Прогноз-6» с начальным значением высоты апогея (перигея) 197 900 км (498 км) и датой старта 22.09.1977 время существования составляло около 40 лет.
- Численный расчет эволюции под влиянием гравитационных возмущений от Луны и Солнца для гипотетического варианта орбиты «Прогноз-6» с измененной ровно на один год датой старта (1978) и фиксированными значениями всех остальных начальных условий дает время существования более 500 лет.
- А гипотетический перенос запуска на 1988 год привел бы ко времени баллистического существования не более 7 лет.

# Введение (3)

- Здесь дело в прецессии орбиты Луны (которая, сохраняя постоянное наклонение к плоскости эклиптики около  $5.5^\circ$ , прецессирует с периодом 18.6 года).
- Упомянутые орбиты типа ПРОГНОЗ-6 с разными датами старта отличаются начальными значениями углового расстояния между линиями узлов орбиты спутника и орбиты Луны на плоскости эклиптики.
- Это различие никак не влияет на процесс эволюции, описываемый решением осредненной задачи.

# Введение (4)

- Это приводит к необходимости создания инструментов для анализа эволюции орбит с учетом новых факторов.
- Использование для этих исследований численных методов решения полной системы дифференциальных уравнений требует очень больших затрат машинного времени на той технике, которой мы располагаем на сегодняшний день.
- Расчет эволюции орбиты высокоапогейного спутника с учетом влияния Луны и Солнца на 10 лет требует около 50 мин машинного времени.

# Введение (5)

- Мы предлагаем алгоритм, основанный на использовании эволюции по Лидову в качестве невозмущенного движения, а прецессию орбиты Луны – в качестве возмущающего фактора.
- В докладе обсуждаются различные аспекты разработки этого алгоритма и первые результаты его использования.

# Полученные М.Л. Лидовым [1961] аналитические решения двукратно осредненной ограниченной задачи трех тел в хилловском приближении

$$c_0 = a; \quad c_1 = \varepsilon \cos^2 i; \quad c_2 = (1 - \varepsilon)(2/5 - \sin^2 \omega \sin^2 i); \quad (1)$$

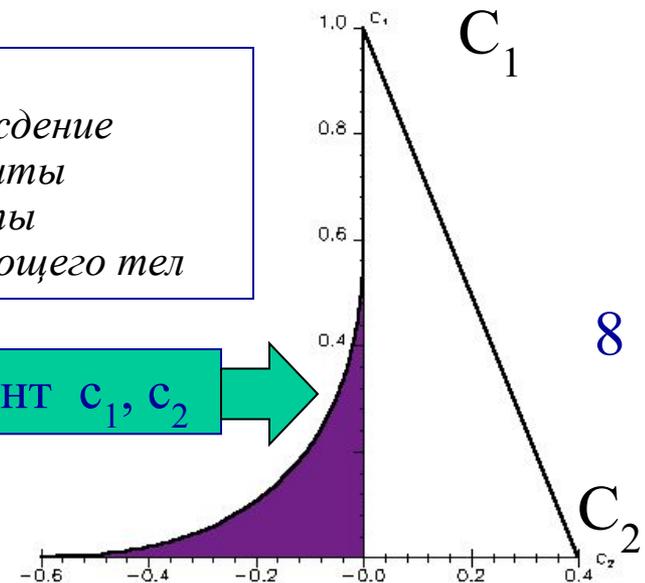
$$N - N_0 = -\frac{1}{A} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{(1 - \varepsilon)\varepsilon^{1/2} \sin^2 i \sin 2\omega}; \quad A = \frac{15}{2} \pi \frac{M_1}{M} \left( \frac{a}{a_1} \right)^3 \varepsilon_1^{-3/2}; \quad (2)$$

$$\Omega - \Omega_0 = -A \int_{N_0}^N \frac{\cos i ((1 - \varepsilon) \sin^2 \omega + \varepsilon / 5) dN}{\varepsilon^{1/2}}, \quad (3)$$

$$c_0 = a_0; \quad c_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0; \quad c_2 = (1 - \varepsilon_0)(2/5 - \sin^2 \omega_0 \sin^2 i_0). \quad (5)$$

*a* - большая полуось,  $\varepsilon = 1 - e^2$ ,  $e$  - эксцентриситет;  
*i*,  $\omega$ , и  $\Omega$  - наклонение, аргумент перицентра и прямое восхождение восходящего узла орбиты ИСЗ, отнесенные к плоскости орбиты возмущающего тела; *N* - номер витка;  $\varepsilon_1$  - параметр  $\varepsilon$  орбиты возмущающего тела;  $M$ ,  $M_1$  - масса центрального и возмущающего тел

Область возможных значений интегральных констант  $c_1, c_2$



# Зависимость орбитальных элементов от времени $t$

В работе Ю.Ф. Гордеевой [1968] получено выражение зависимости эволюции орбитальных элементов от времени через эллиптический интеграл первого рода.

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \operatorname{sign}(\sin 2\omega) \sqrt{(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)};$$

$$\tau = A \left( \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi a^{3/2}} \right) t = Bt$$

$$\beta = 1 - 5/2c_2; \quad \alpha, \gamma \text{ корни уравнения: } \varepsilon^2 - \varepsilon \left( 1 + \frac{5}{3}(c_1 + c_2) \right) + \frac{5}{3}c_1 = 0.$$

Использование замены переменных  $k^2 \sin^2 \varphi = \frac{\beta - \varepsilon}{\alpha - \varepsilon}; \quad k^2 = \frac{\beta - \varepsilon_{\min}}{\alpha - \varepsilon_{\min}}; \quad (5)$

приводит к выражению  $\tau$  через эллиптический интеграл первого рода

$$\tau = \operatorname{sign}(\sin 2\omega) \alpha_\tau F(\varphi, k), \quad \text{где} \quad \alpha_\tau = \frac{5}{\sqrt{6(\alpha - \varepsilon_{\min})}} \quad (6)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\min} + (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}) \operatorname{sn}^2(u + K(k)) \quad \text{где } u = \tau/\alpha_\tau$$

$$T_u = 2K(k) - \text{период изменения } \varepsilon(u); \quad T_\tau = 2\alpha_\tau K(k) - \text{период изменения } \varepsilon(\tau)$$

**Примечание:** Здесь приведены выражения для параметров  $k, \varphi, \alpha_\tau$  для  $c_2 > 0$  при  $c_2 < 0$  в выражениях (5), (6) нужно поменять местами  $\alpha$  и  $\beta$

# Безразмерный период либрационных составляющих эволюции орбитальных элементов

Введем безразмерные параметры :  $a_* = a/l$ ,  $t_* = t/\chi$ ,  $\mu_* = \mu\tau^2/l^3$ ,  
 используя характерные размер, время и массу :  $l = R$ ,  $\chi = 1 \text{ год}$ ,  $m = R^3 / f\tau^2$ ;  
 $f$  – гравитационная константа,  $R$  – радиус центрального тела.

Выразим период либрации  $T$  через безразмерный период  $T_C$ , который в свою очередь выражается через безразмерные параметры

$$\boxed{T = T_C \chi} \quad \boxed{T_C = B |L_C(c_1, c_2)|} \quad \boxed{|L_C(c_1, c_2)| = 2 \alpha_\tau K(k);} \quad (7)$$

$$\boxed{B = \frac{4}{15} a_*^{-3/2} L_D^{-1}} \quad \boxed{L_D = \mu_{1*} a_{1*}^{-3} \varepsilon_1^{-3/2} \mu_*^{-1/2}} \quad (8)$$

$K(k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода.

$a_*$  - большая полуось спутника;

$L_D$  - параметр подобия возмущений;

# Используемые варианты безразмерного времени и соответствующие им значения либрационного периода

- $t^* = t/\chi$  (либрационный период  $T_c$ )
- $\tau = t^* /B$  (либрационный период  $|Lc|$ )
- $u = \tau/\alpha_\tau$  (либрационный период  $2K$ )
- $\varphi = \pi u/K(k) + \pi/2$  (либрационный период  $2\pi$ )

## Выражение для $\Omega$ в функции параметра $\tau$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \text{sign}(\cos i) \frac{\sqrt{c_1}}{5} \left( 1 + \frac{5c_2 - 2c_1 - 2}{\varepsilon - c_1} \right);$$

$$\Omega(\tau) = \text{sign}(\cos i) \frac{\sqrt{c_1}}{5} \left( \tau + (5c_2 - 2c_1 - 2) \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dv}{\varepsilon - c_1} \right) + \Omega_0$$

Далее возможны два пути :

- Использование полученного М.А Вашковьяком [1999] решения, основанного на представлении  $\varepsilon$  через  $\text{sn}$  эллиптический, что приводит к выражению  $\Omega(\tau)$  через эллиптические интегралы третьего рода
- Использование приближенной аппроксимации  $\varepsilon$  с помощью  $\sin(\varphi)$ , что позволяет выразить  $\Omega(\tau)$  через элементарные функции

$$\boxed{\varepsilon = b + d \sin \phi}, \quad b = \frac{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}{2}; \quad d = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{2}; \quad (9)$$

$$\text{Замена переменной } \varphi = 2\pi \tau / |Lc| + \pi/2 \quad (10)$$

$$\frac{d\Omega}{d\phi} = \text{sign}(\cos i) \frac{|Lc| \sqrt{c_1}}{2\pi \cdot 5} \left( 1 + \frac{5c_2 + 2c_1 - 2}{b - c_1 + d \sin \phi} \right);$$

$$\boxed{\Omega = \text{sign}(\cos i) \frac{|Lc| \sqrt{c_1}}{2\pi \cdot 5} (\phi + (5c_2 + 2c_1 - 2) I(\phi)) + \Omega_0}$$

Табличный интеграл  $I(\varphi)$

$$I(\phi) = \int \frac{d\phi}{b - c_1 + c \sin \phi} = \frac{2}{\sqrt{(b - c_1)^2 - d^2}} \text{arctg} \frac{(b - c_1) \text{tg} \frac{\phi}{2} + d}{\sqrt{(b - c_1)^2 - d^2}}$$

Представление  $\Omega$  в функции параметра  $\phi$  в виде суммы ротационной и либрационной составляющих

$$\Omega(\phi) = Q \frac{|L_c|}{2\pi} ((1+s)\phi - sf(\phi)) + \Omega_0; \quad (11)$$

$$Q = \text{sign}(\cos i) \sqrt{c_1} / 5 \quad (12)$$

$$s(c_1, c_2) = \frac{5c_2 + 2c_1 - 2}{\sqrt{(\varepsilon_{\max} - c_1)(\varepsilon_{\min} - c_1)}}; \quad (13)$$

$$f(\phi, c_1, c_2) = \phi - 2 \arctg \frac{(\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min} - 2c_1) \text{tg} \frac{\phi}{2} + \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{2\sqrt{(\varepsilon_{\max} - c_1)(\varepsilon_{\min} - c_1)}}, \quad (14)$$

# Период ротационной составляющей эволюции $\Omega$ , при аппроксимации синусом

$$|L_{\Omega}(c_1, c_2)| = T_{\Omega(\tau)} = \frac{10\pi}{\sqrt{c_1}(1+s)};$$

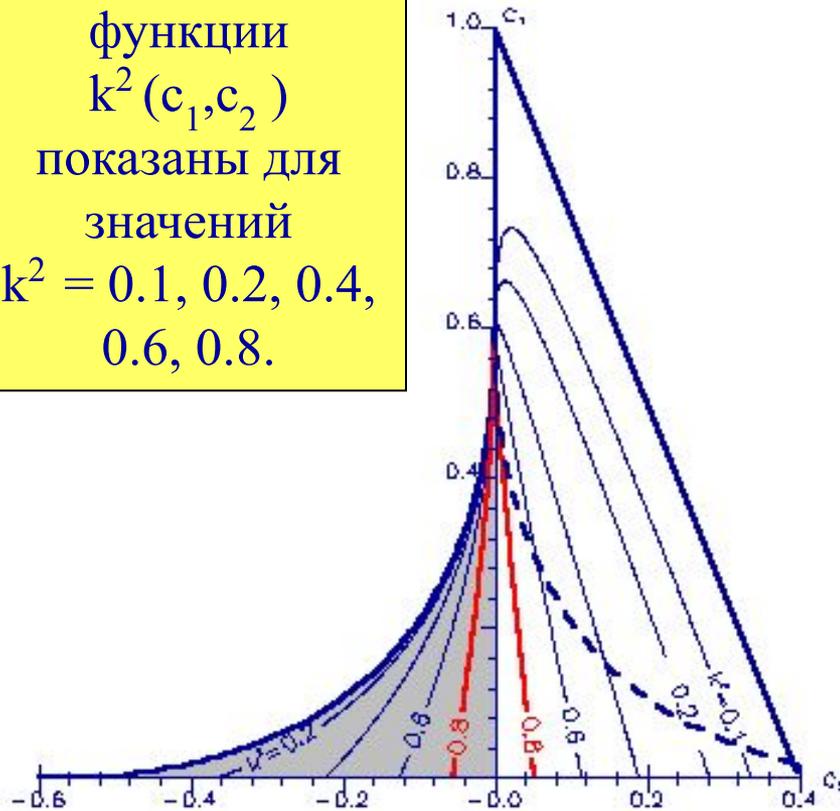
$$s = \frac{5c_2 + 2c_1 - 2}{\sqrt{(\varepsilon_{\max} - c_1)(\varepsilon_{\min} - c_1)}}; \quad (15)$$

$$T_{\Omega(t^*)} = \frac{4}{15} \frac{a_*^{-3/2}}{L_D} |L_{\Omega}(c_1, c_2)|,$$

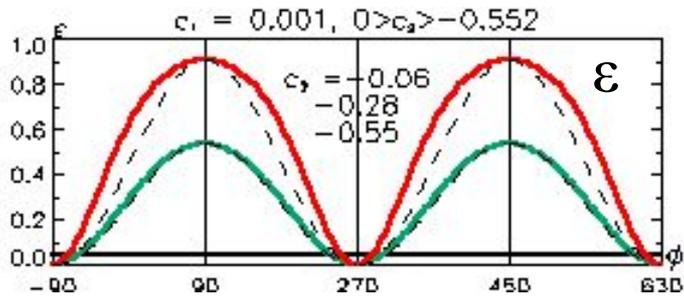
$$\mathbf{T}_{\Omega(t)} = T_{\Omega(t^*)} \chi \quad (16)$$

# Значения модуля эллиптического интеграла $k^2$ в функции $c_1, c_2$

Линии уровня функции  $k^2(c_1, c_2)$  показаны для значений  $k^2 = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ .



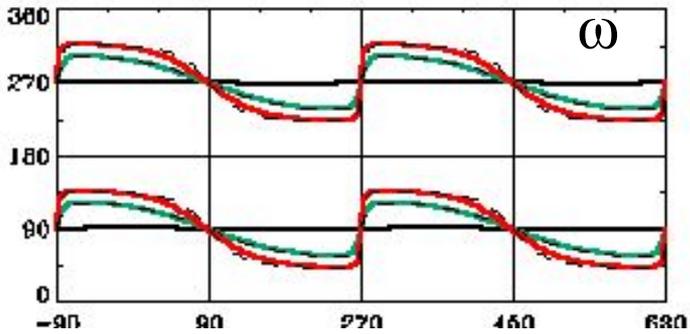
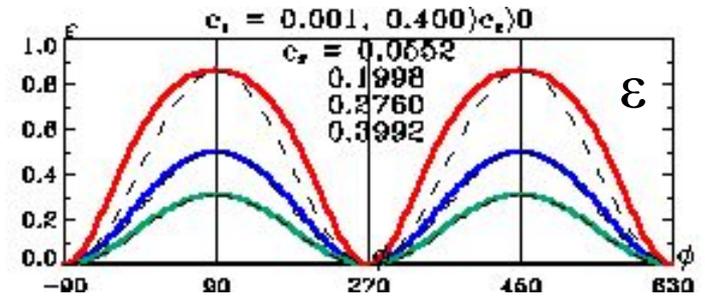
- На следующих слайдах представлены полученные двумя способами результаты расчетов эволюции параметров  $\varepsilon, \omega, \Omega$  в функции  $\varphi$  на двух периодах либрации при различных значениях параметров  $c_1, c_2$ :
- Сплошной линией показаны результаты расчетов с использованием обращения эллиптических интегралов первого рода [Ю.Ф. Гордеева, 1968],
  - Штриховой линией – результаты расчетов, основанные на использовании аппроксимации  $\varepsilon = \alpha + \delta \sin \varphi$ .
  - Расчеты эволюции параметра  $\Omega$  выполнены только одним способом (с применением аппроксимации)



$c_1 = .001$

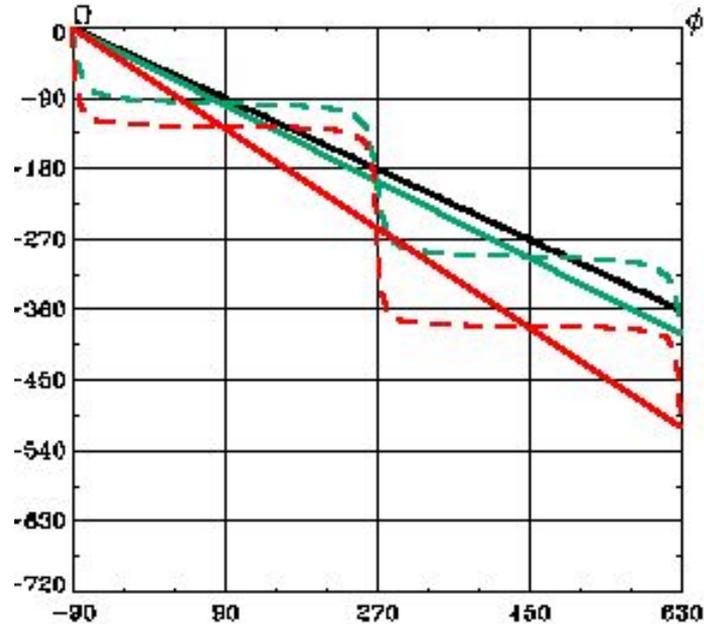
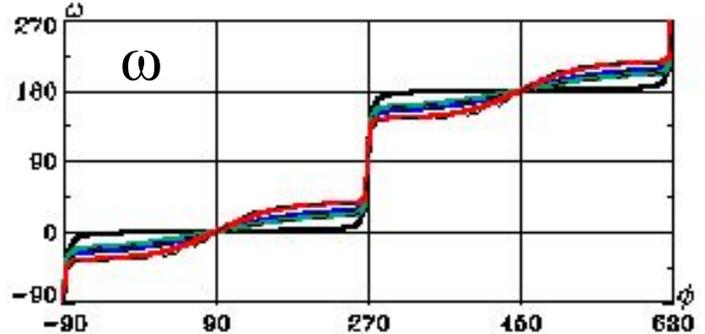
$c_{2min} = -.552$

$c_{2max} = .3996$



←  $c_2 < 0$ :

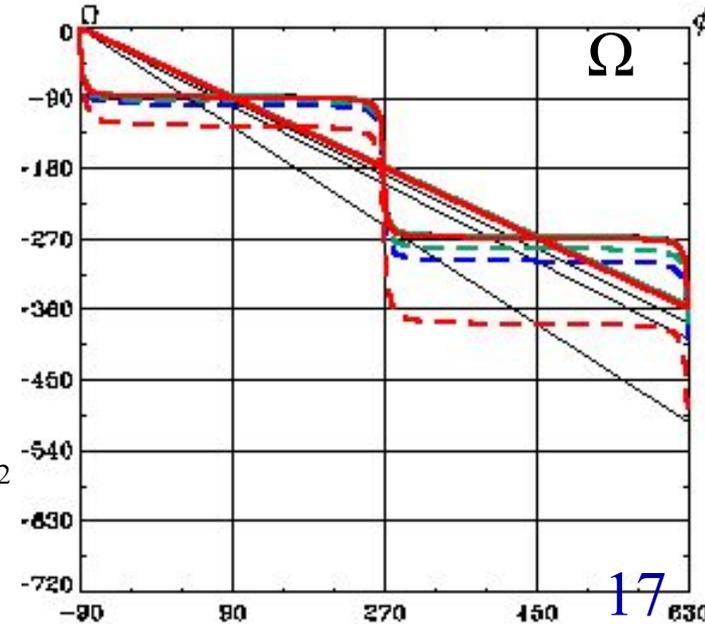
- $.1 c_{2min} = -.06$ ;
- $.5 c_{2min} = -.28$ ;
- $.99 c_{2min} = -.55$

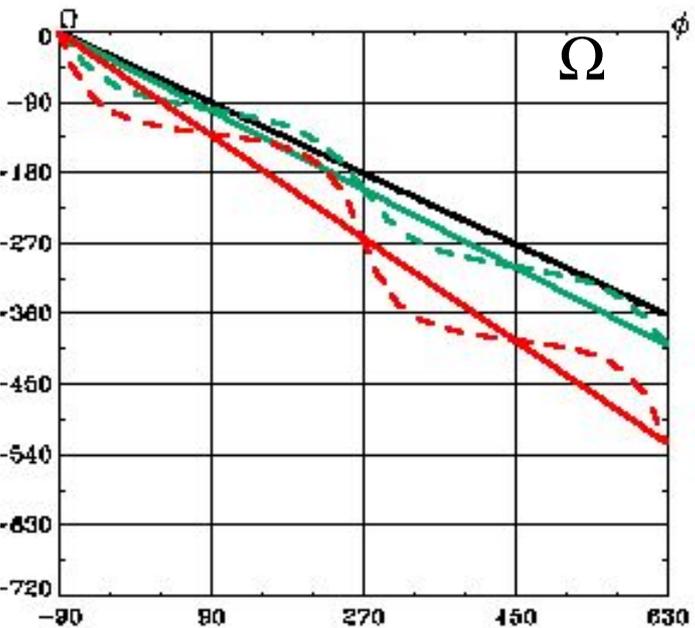
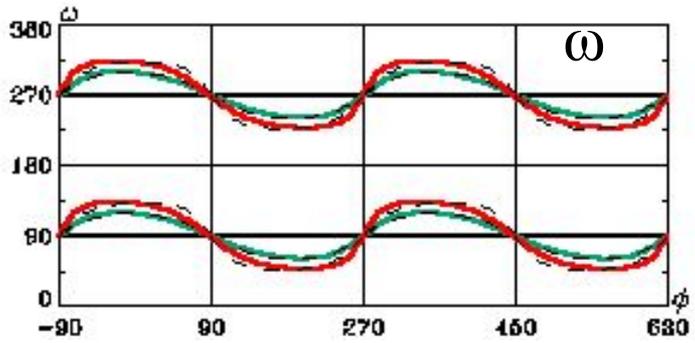
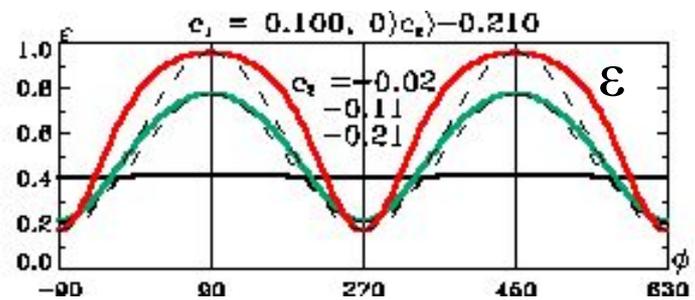


$c_2 > 0$ : →

- $-.1 c_{2min} = .06$ ;
- $.5 c_{2max} = .20$
- $-.5 c_{2min} = .28$ ;
- $.99 c_{2max} = 0.40$

$\phi_{in} = -3/5(1 - \sqrt{5/3c_1})^2$   
 $\phi_{max} = 2/5(1 - c_1)$





$c_1 = 0.1$

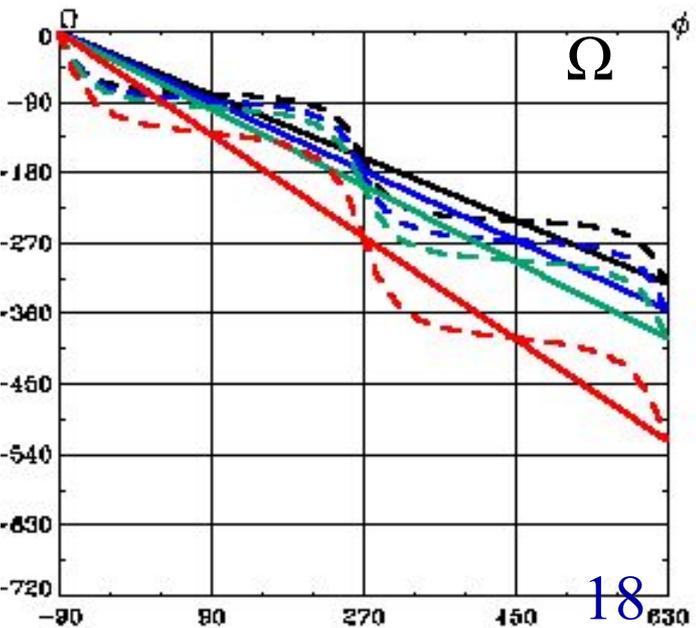
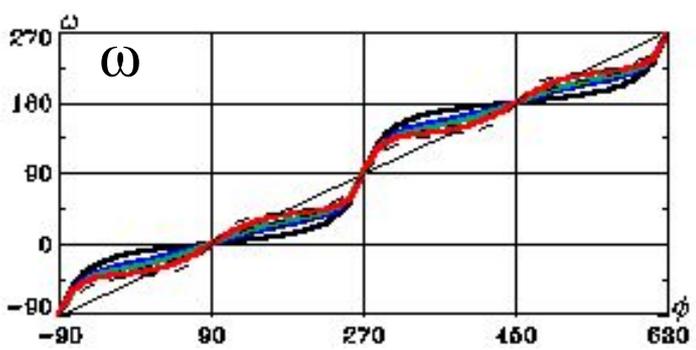
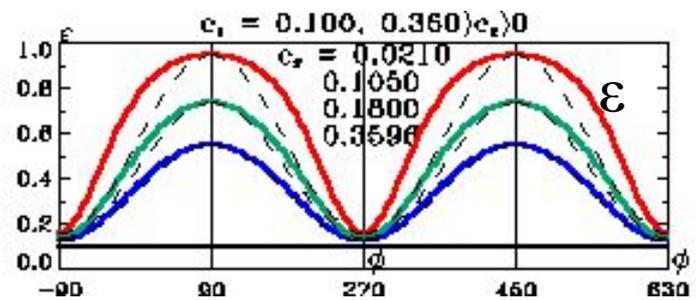
$c_{2min} = -0.210$   
 $c_{2max} = 0.360$

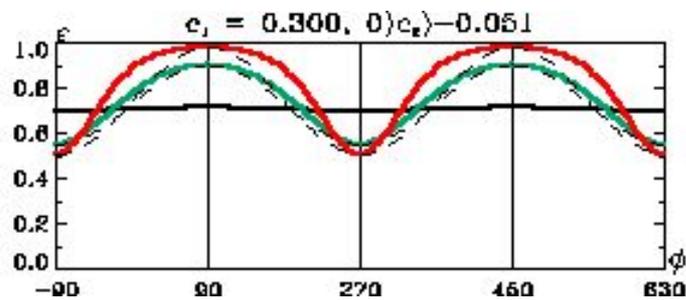
←  $c_2 < 0$ :

- $.1 c_{2min} = -.002$ ;
- $.5 c_{2min} = -.011$ ;
- $.99 c_{2min} = -.21$

$c_2 > 0$ : →

- $-.1 c_{2min} = .002$ ;
- $-.5 c_{2min} = .011$ ;
- $.5 c_{2max} = .180$ ;
- $.99 c_{2max} = .360$

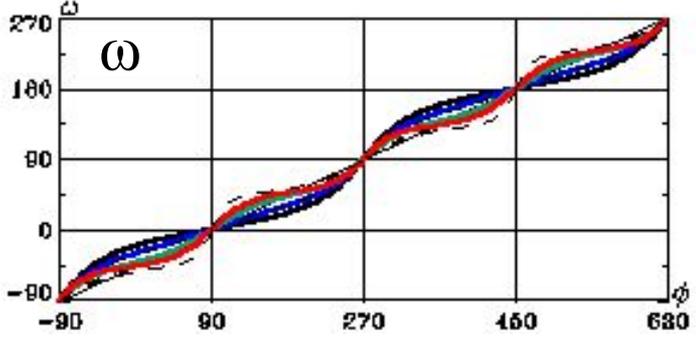
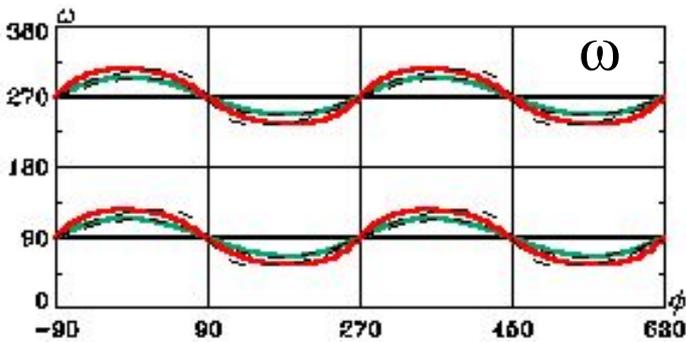
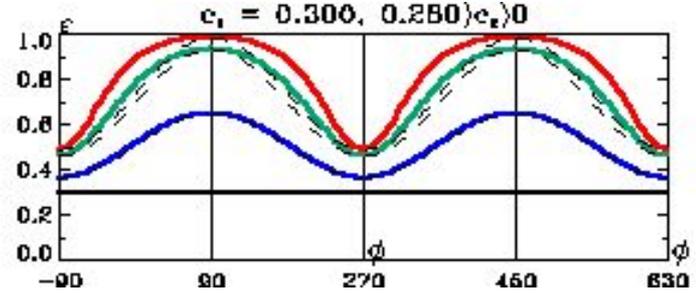




$c_1 = 0.3$

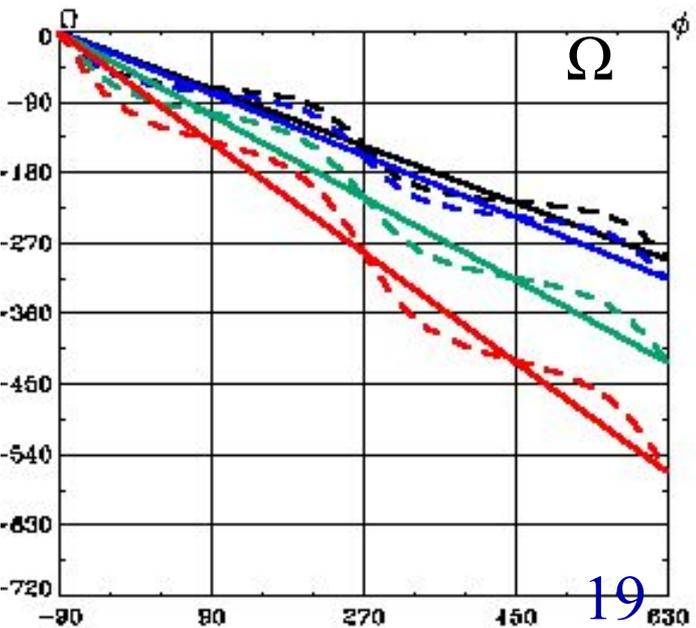
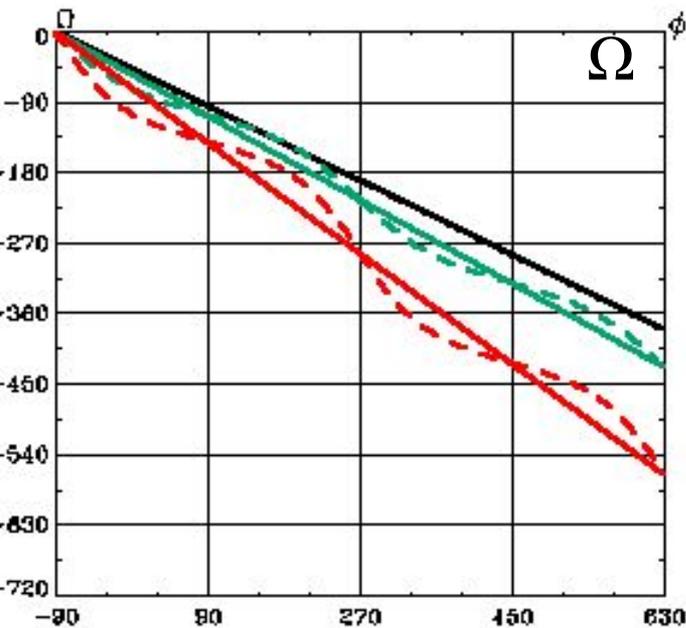
$c_{2min} = -0.051$

$c_{2max} = 0.280$



$c_2 < 0$ : ←

- .1  $c_{2min} = -.005$ ;
- .5  $c_{2min} = -.026$ ;
- .9999  $c_{2min} = -.051$



$c_2 > 0$ : →

- .1  $c_{2min} = .005$ ;
- .5  $c_{2min} = .026$ ;
- .5  $c_{2max} = .140$ ;
- .99  $c_{2max} = .280$

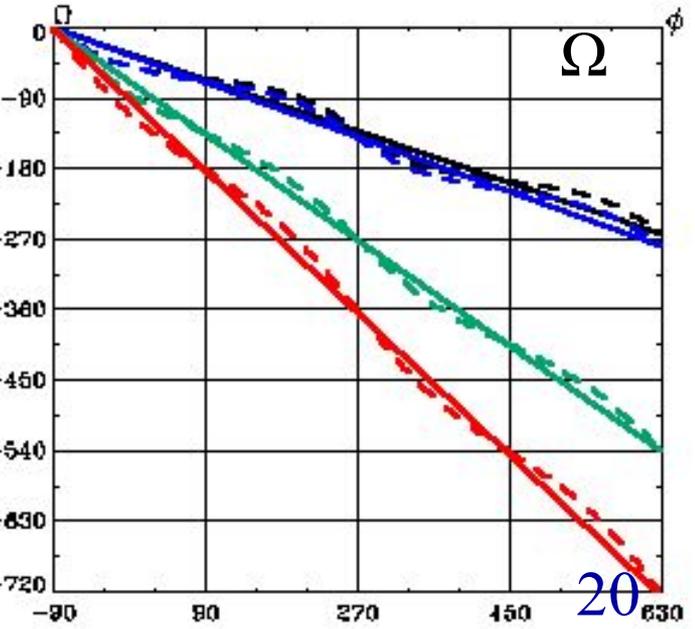
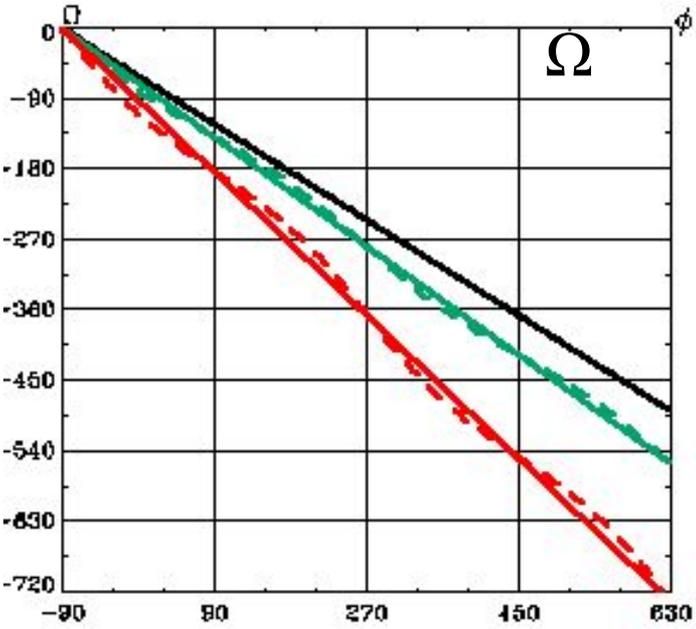
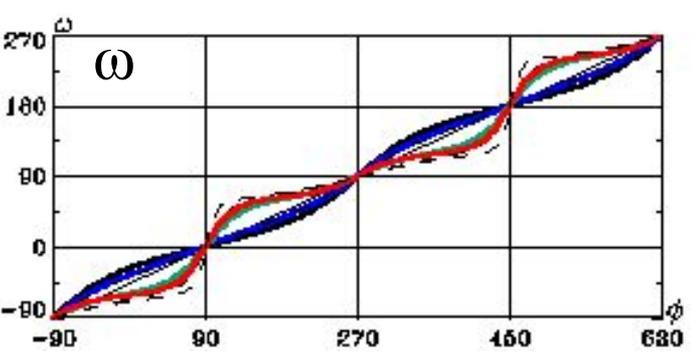
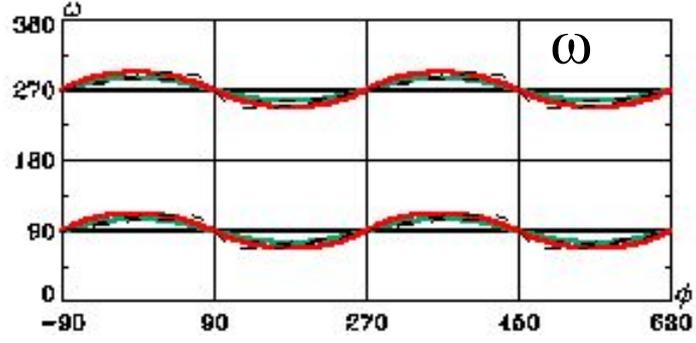
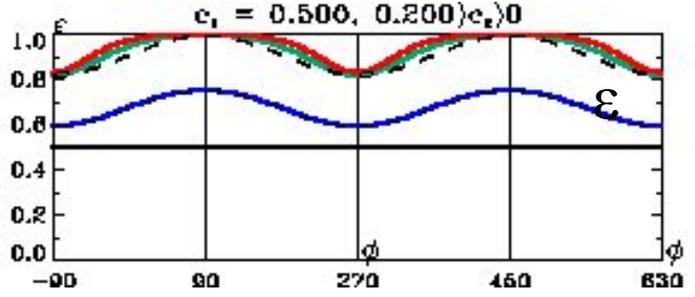
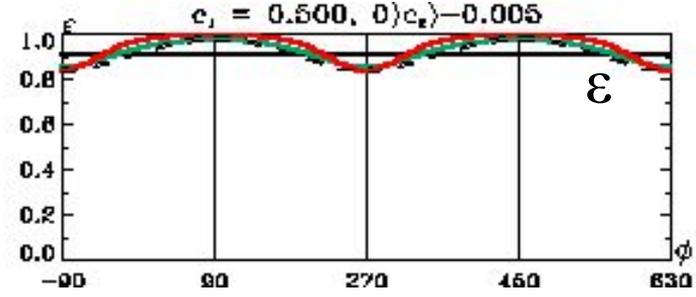
$c_1 = 0.5$

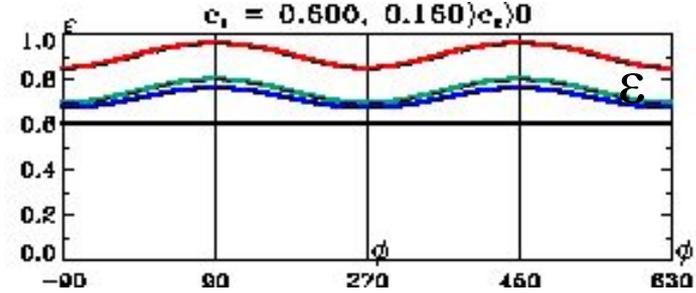
$c_{2min} = -0.005$

$c_{2max} = 0.200$

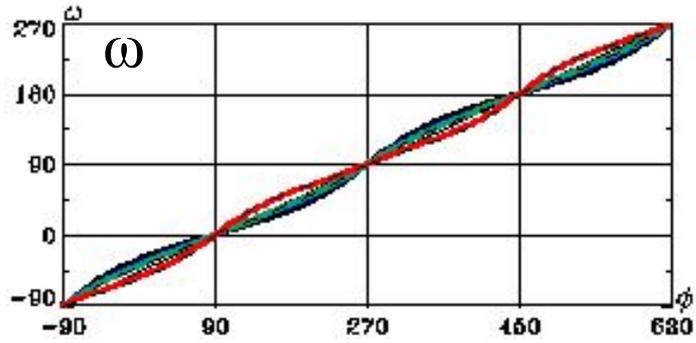
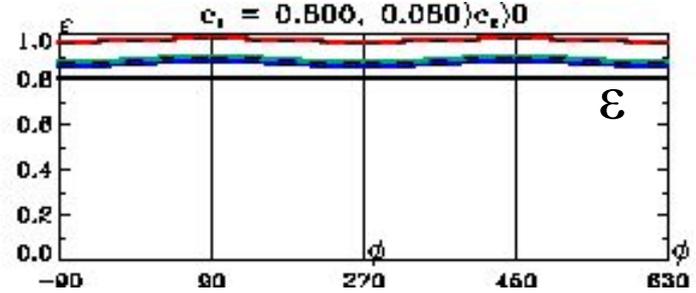
←  $c_2 < 0$ :  
 $.1 c_{2min} = -.0005$ ;  
 $.5 c_{2min} = -.0023$ ;  
 $.9999 c_{2min} = -.005$

$c_2 > 0$ : →  
 $-.1 c_{2min} = .0005$ ;  
 $-.5 c_{2min} = .0023$ ;  
 $.5 c_{2max} = .100$ ;  
 $.99 c_{2max} = .200$

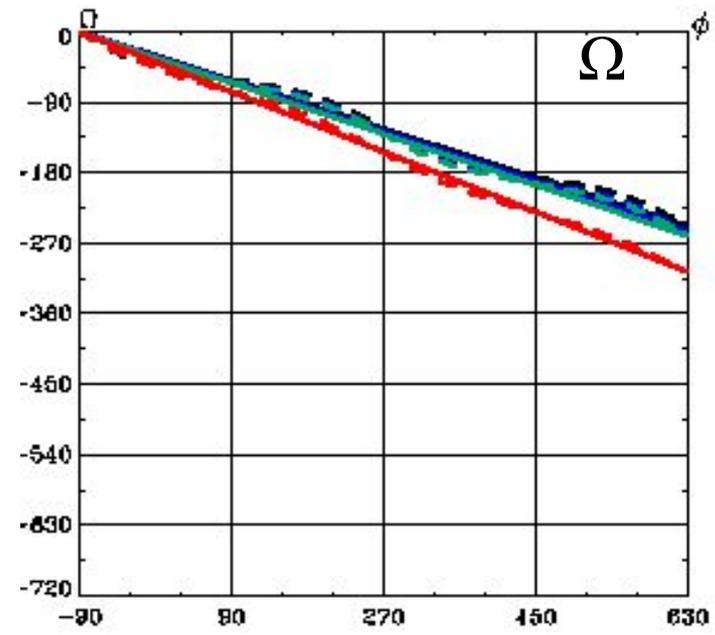
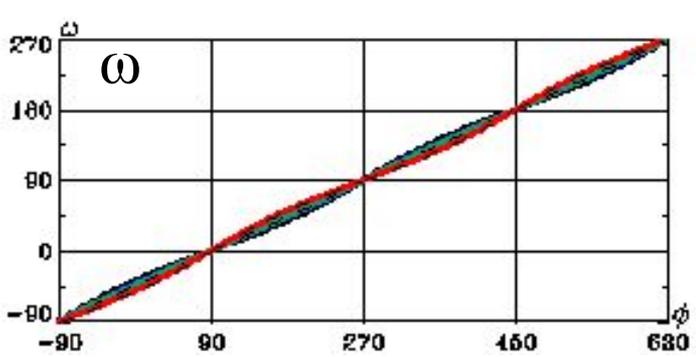




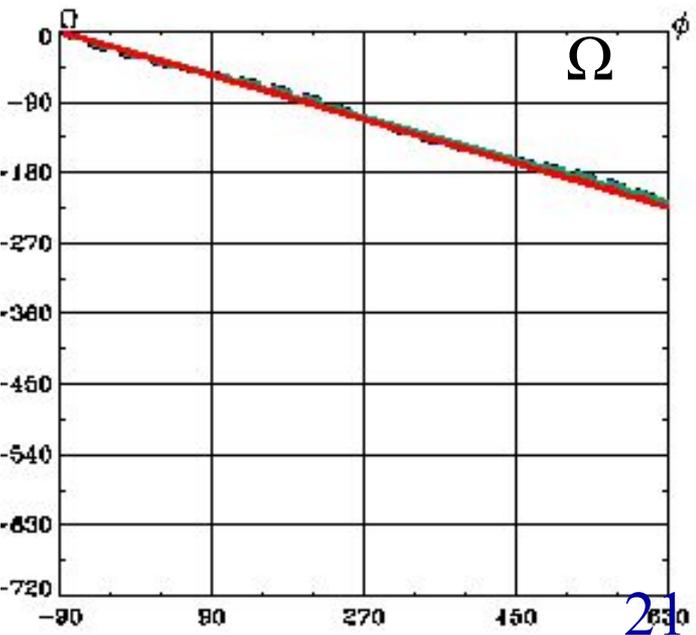
$c_1 = 0.6,$   
 $c_1 = 0.8$



←  $c_1 = 0.6$   
 $c_2 > 0, c_{2max} = .16$   
.1  $c_{2max} = .016;$   
.5  $c_{2max} = .008;$   
.9999  $c_{2max} = .16$



$c_1 = 0.8$  →  
 $c_2 > 0, c_{2max} = .08$   
.1  $c_{2max} = .008;$   
.5  $c_{2max} = .04;$   
.9999  $c_{2max} = .08$



# Эволюция орбитальных элементов гипотетической версии орбиты ПРОГНОЗ-6 с датой старта

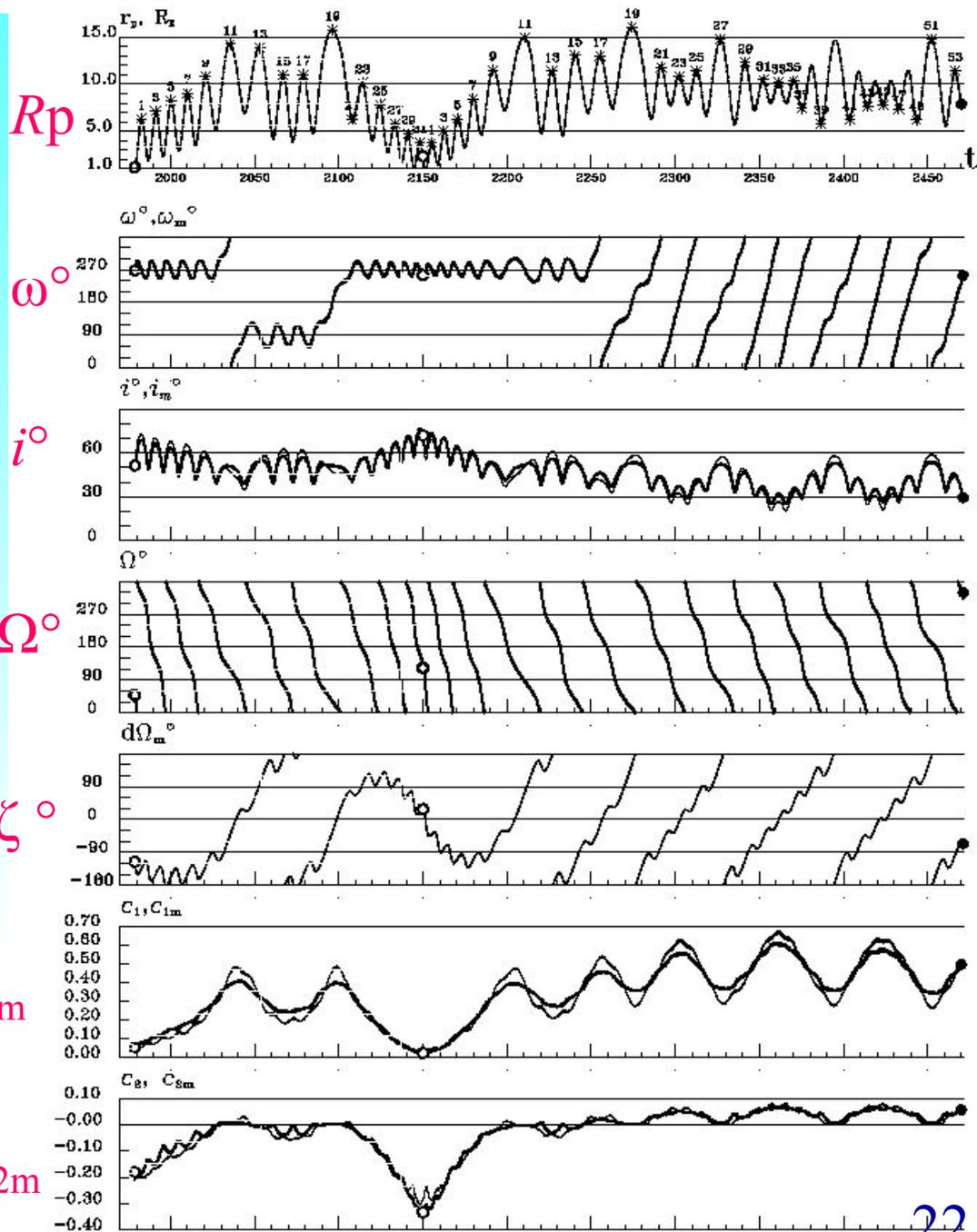
22.09.1978

$\zeta_0 = 247.5^\circ$

Время существования более 500 лет

Численное интегрирование

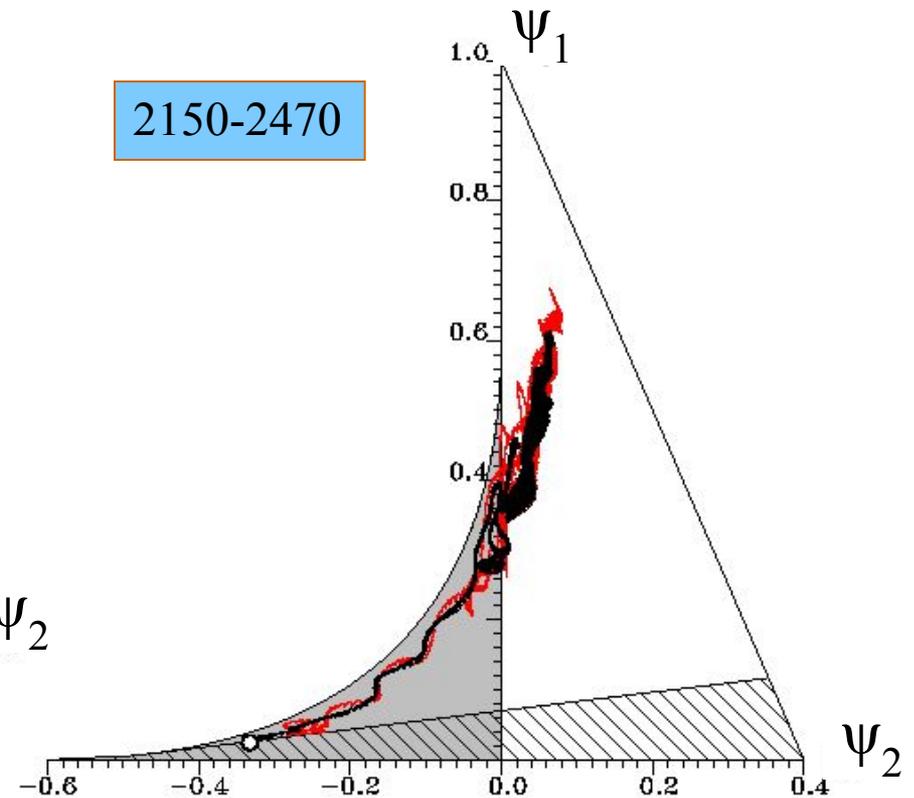
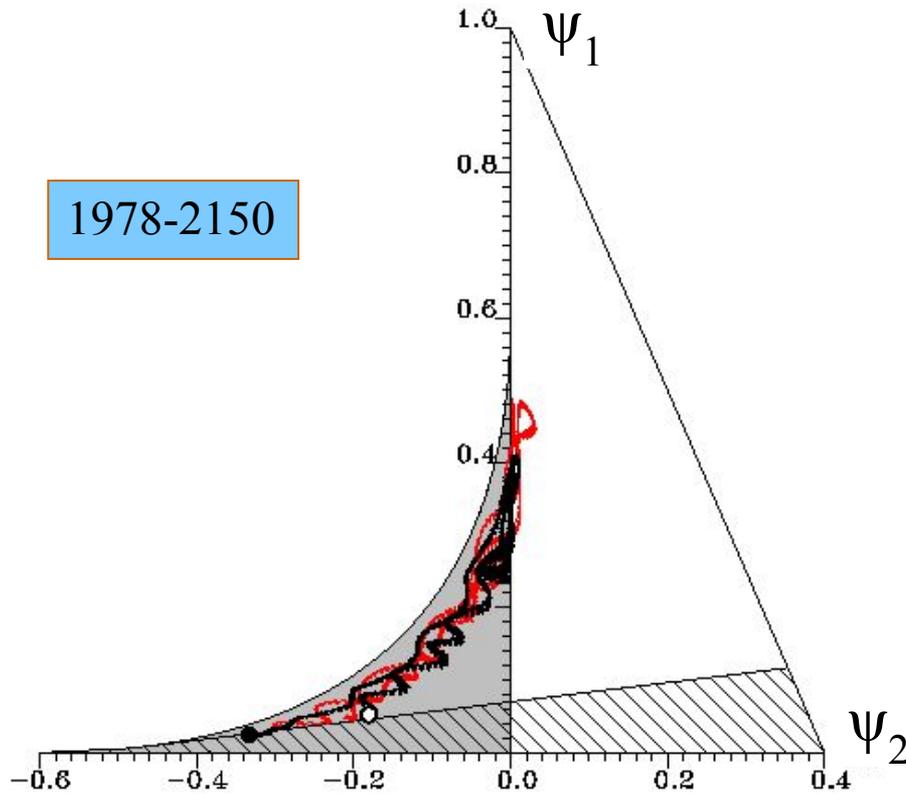
Время расчета – 48 часов



$\Psi_1, \Psi_{1m}$

$\Psi_2, \Psi_{2m}$

Гипотетическая версия орбиты ПРОГНОЗ-6 с датой старта 1978.  
Эволюция параметров  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\Psi_{1m}$ ,  $\Psi_{2m}$  на интервале времени 1978 – 2470



# Полуаналитический метод прогноза эволюции орбит под влиянием гравитационных возмущений внешнего тела с учетом прецессии орбиты возмущающего тела

В качестве основной плоскости отсчета будем использовать плоскость, перпендикулярную к оси прецессии орбиты возмущающего тела и проходящую через центральную точку. В нашей задаче возмущающее тело это Луна, а основная плоскость совпадает с плоскостью эклиптики.

На следующие слайдах представлены тригонометрические формулы используемые для перехода от одной плоскости отсчета к другой.

Связь между угловыми элементами  $i, \omega$ , отсчитанными относительно плоскости эклиптики, и соответствующими элементами  $i_m, \omega_m$ , отсчитанными относительно плоскости орбиты Луны

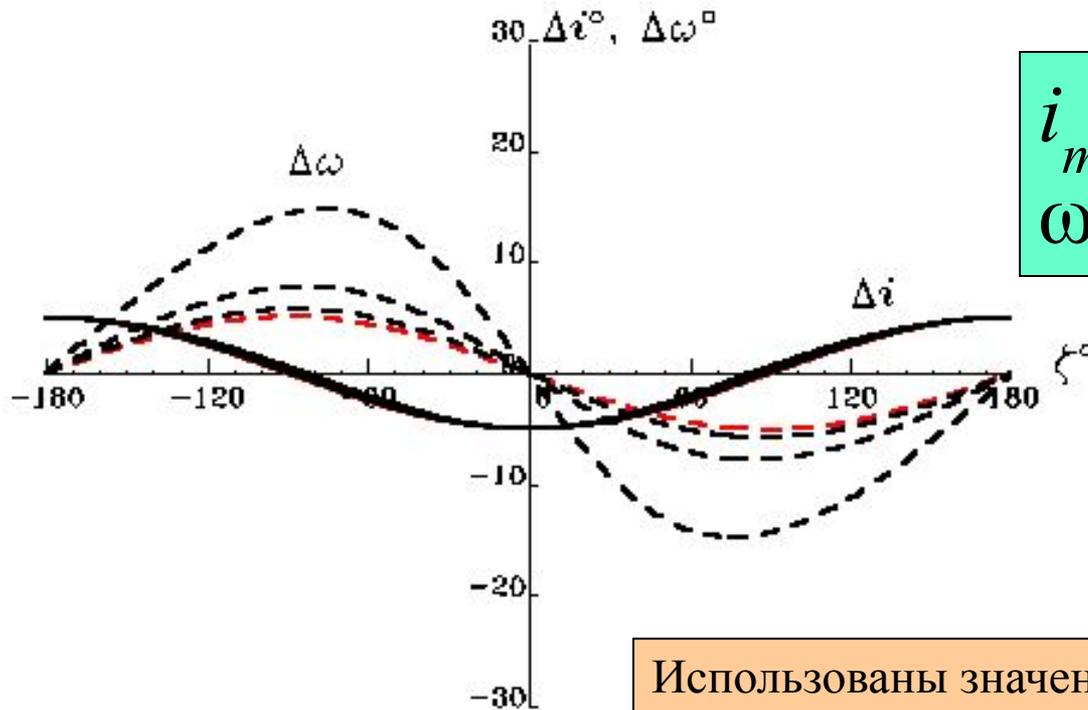
Зависимость значений  $i_m, \omega_m$  от  $i, \omega$  и углового расстояния  $\zeta$  между восходящими узлами орбит спутника и Луны на плоскости эклиптики определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \cos i_m &= \cos \zeta \sin i \sin \delta + \cos i \cos \delta; & \Delta i &= i_m - i; \\ \cos \Delta \omega &= (\sin i \cos \delta - \cos \zeta \cos i \sin \delta) / \sin i_m; \\ \sin \Delta \omega &= -\sin \delta \sin \zeta / \sin i_m; & \omega_m &= \omega + \Delta \omega \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \cos \zeta_m &= (\sin i_m \cos i - \cos \Delta \omega \cos i_m \sin i) / \sin \delta; \\ \cos \zeta_m &= (-\sin \delta \cos i + \cos \zeta \cos \delta \sin i) / \sin i_m; \\ \sin \zeta_m &= \sin i \sin \phi / \sin i_m; & \Delta \zeta &= \zeta_m - \zeta \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\delta = 5.5^\circ$  - наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики,  
 $\zeta_m$  - угловое расстояние линии узлов орбиты спутника на плоскости орбиты Луны от линии пересечения орбиты Луны с плоскостью эклиптики

# Зависимость $\Delta i$ и $\Delta \omega$ от $\zeta$ при разных значениях $i$



$$i_m = i + \Delta i(i, \zeta)$$

$$\omega_m = \omega + \Delta \omega(i, \zeta) \quad (19)$$

Использованы значения  $i$  от  $20^\circ$  до  $80^\circ$  с шагом  $20^\circ$ . Красным цветом отмечена линия, соответствующая максимальному значению  $i$

# Описание алгоритма (1)

- Исходя из начальных условий  $a_0, \varepsilon_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, \zeta_0 = \Omega_0 - \Omega_{0M}$ , заданных в момент времени  $t_0$  относительно плоскости эклиптики, рассчитываем значения  $\psi_{10}, \psi_{20}$  по формулам, правые части которых совпадают с правыми частями первых интегралов  $c_1, c_2$  (4) Лидовского решения осредненной задачи.
- Переходим к плоскости орбиты Луны, рассчитываем угловые элементы  $i_{0m}, \omega_{0m}$  относительно этой плоскости по формулам (17) и значения  $\psi_{10m}, \psi_{20m}$  по формулам (4).

# Описание алгоритма (2)

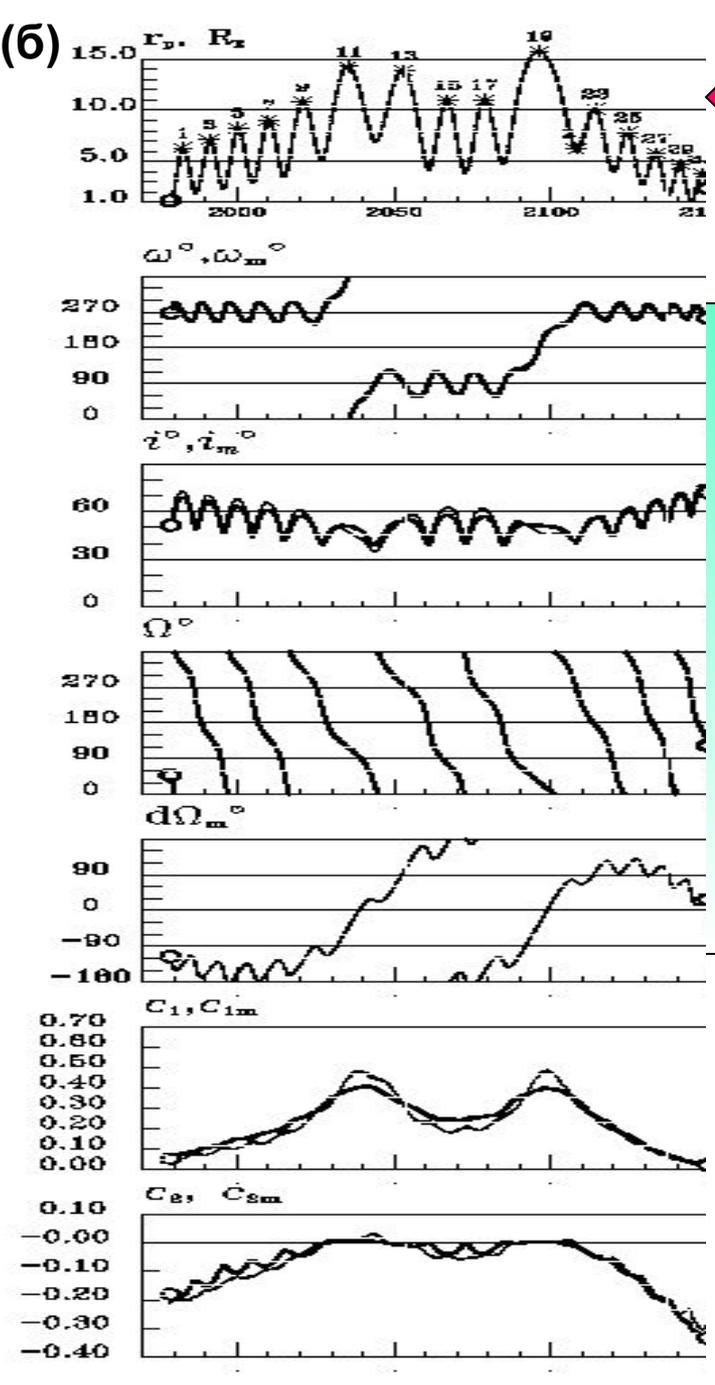
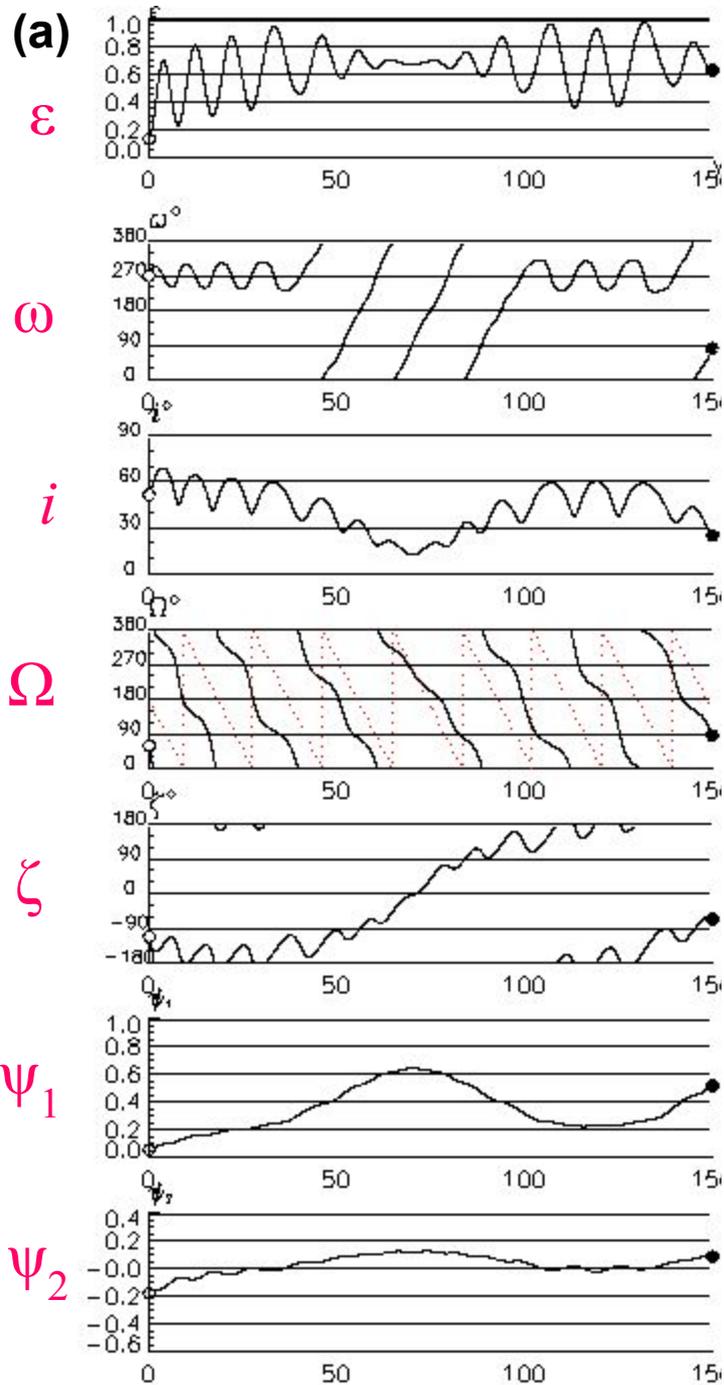
- Делаем шаг  $\Delta t$ , используя Лидовское решение (6 - 16) учитывающее в качестве орбита возмущающего тела орбиту Луны замороженную на момент времени  $t_0$ . Получаем значения  $\varepsilon_1$ ,  $i_{1m}$ ,  $\omega_{1m}$ ,  $\zeta_{1m}$ , соответствующие моменту времени  $t_1 = t_0 + \Delta t$ .
- Возвращаемся к плоскости эклиптики, преобразуем угловые элементы по формулам (17), (18), получаем  $i_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\zeta_1$ ,  $\Omega_1 = \Omega_{0M} + \zeta_1$ . Первый шаг завершен.
- Для нового шага используем орбиту Луны, замороженную на момент времени  $t_1$

# Сопоставление результатов полуаналитического расчета эволюции орбитальных элементов и результатов численного интегрирования

На следующих слайдах на примере орбиты типа ПРОГНОЗ-6 с гипотетическим стартом в 1978 году приводится сопоставление результатов полуаналитического расчета эволюции орбитальных элементов и результатов численного интегрирования на интервале времени 150 лет. И в том и в другом расчете учитываются гравитационные возмущения от Луны и Солнца и прецессия орбиты Луны

Для сопоставления используются следующие параметры: три угловых элемента орбиты  $\omega$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ; угловое расстояние  $\zeta$  между линиями узлов орбиты спутника и орбиты Луны на плоскости эклиптики; параметры  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , правые части которых соответствуют двум первым интегралам двукратно-осредненной задачи трех тел.

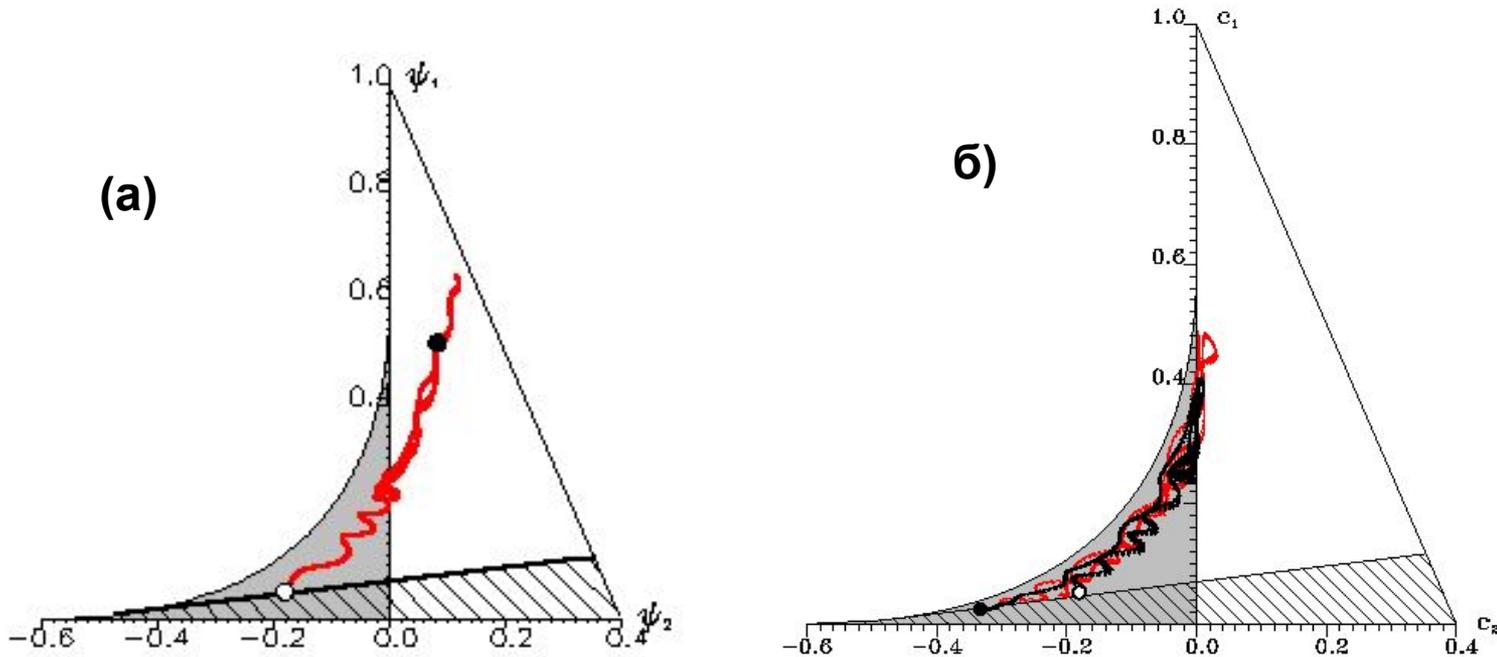
Различие состоит в параметре, характеризующем форму орбиты: в первом случае используется параметр  $\varepsilon = 1 - e^2$ , а во втором случае –  $R_p$ , радиус перицентра (измеряемый в радиусах Земли). Эти параметры связаны между собой взаимно однозначным соответствием при известном значении большой полуоси  $a$  и имеют аналогичный характер эволюции.



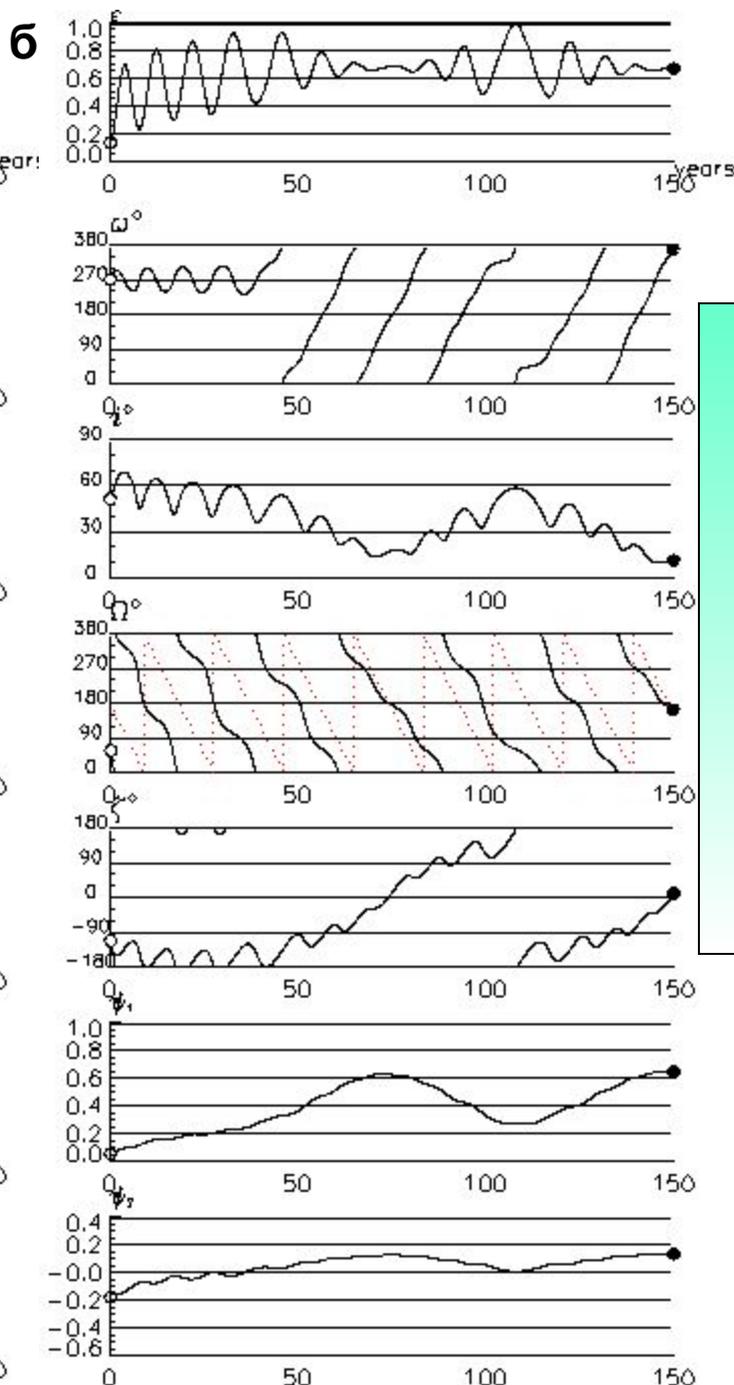
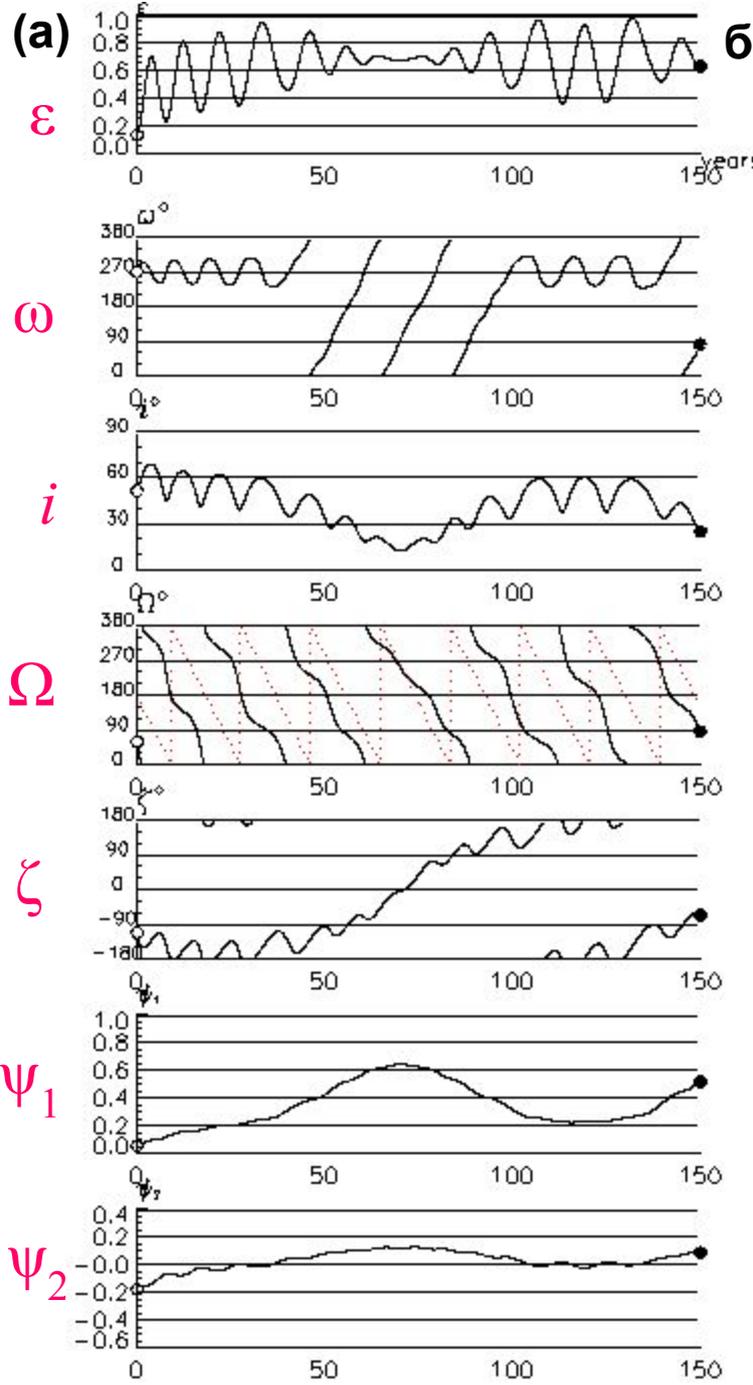
**Результаты полу-аналитического расчета с шагом 12 суток (а) и результаты численного интегрирования (б) на интервале времени 150 лет**

**Время расчета  
а – 5 сек  
б – 14 часов**

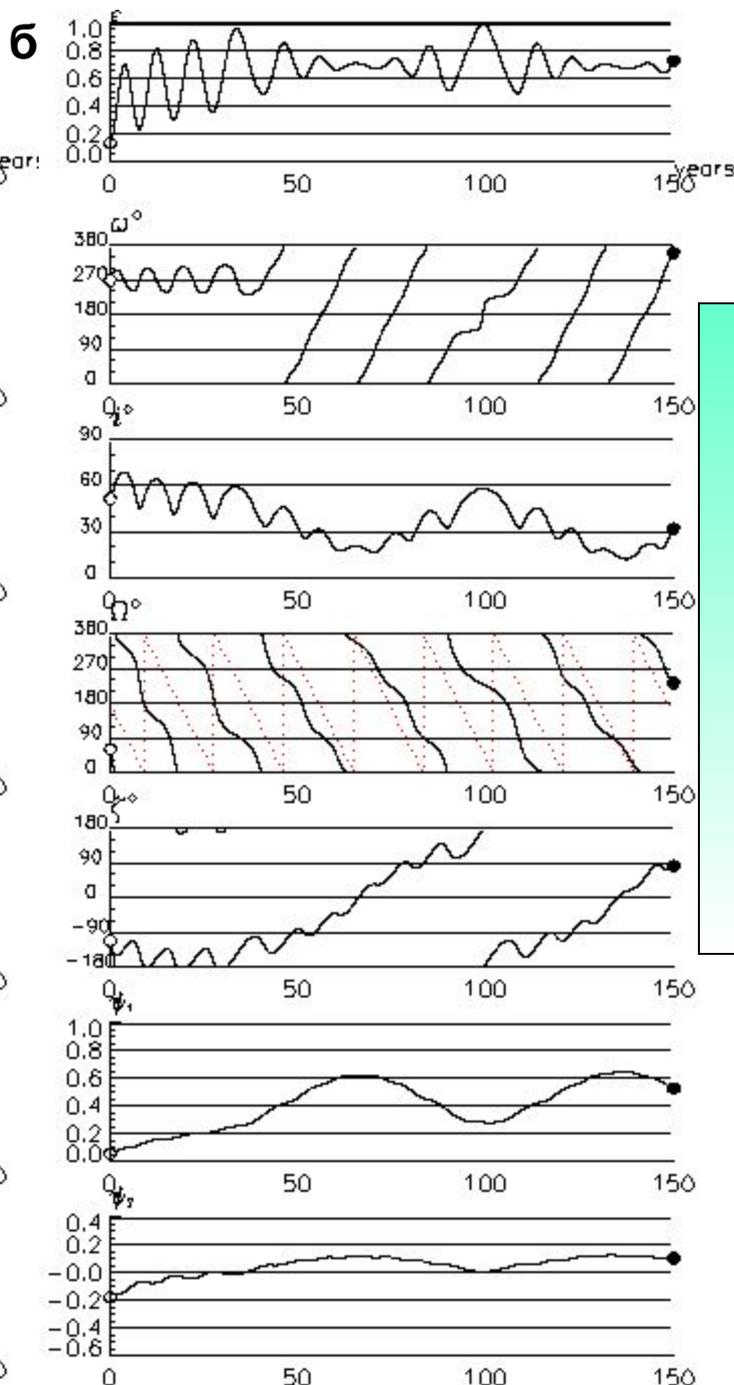
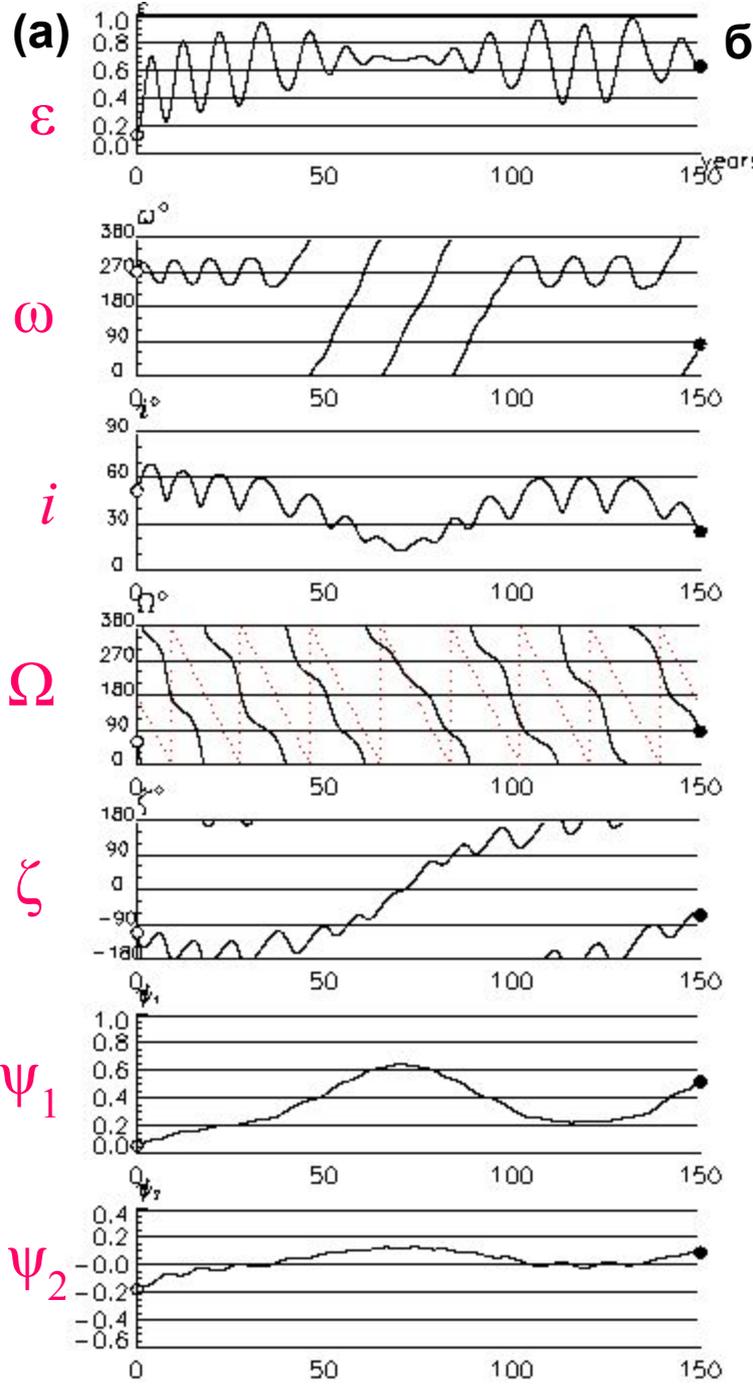
Эволюция положения точки  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  в области возможных значений этих параметров на интервале времени 150 лет



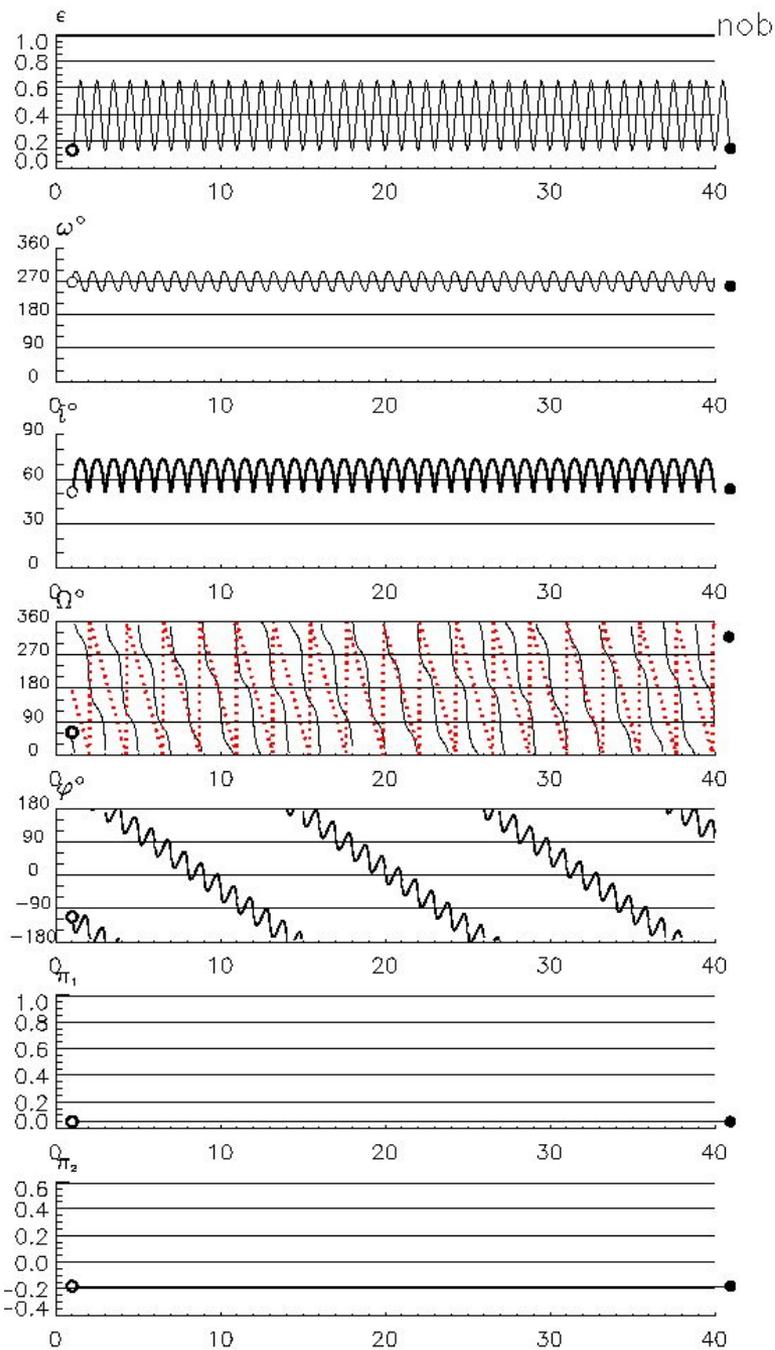
Сопоставление результатов полуаналитического расчета эволюции орбитальных элементов с шагом 12 суток ( а) и результатов численного интегрирования (б). Начальная точка показана светлым кружком, а конечная точка – темным кружком.



**Сравнение  
результаты полу-  
аналитического  
расчета  
с шагом  
12 суток (а)  
и с шагом  
24 сутки (б)  
на интервале  
времени 150 лет**



**Сравнение  
результато полу-  
аналитического  
расчета  
с шагом  
12 суток (а)  
и с шагом  
6 суток (б)  
на интервале  
времени 150 лет**



Эволюция орбиты  
 ИСЗ типа  
 ПРОГНОЗ-6 в  
 отсутствие  
 прецессии орбиты  
 Луны

# Заключение

- Разработан эффективный инструмент исследования эволюции и времени существования орбит ИСЗ подверженных гравитационных возмущений от Луны и Солнца.
- Полученный алгоритм отличается очень большим быстродействием. Расчет эволюции орбиты на 150 лет занимает не более 5 секунд против 14 часов при численном интегрировании.
- Это открывает широкие возможности для его применения как для выбора орбит, так и для исследования закономерностей эволюции различных классов орбит.

## Список литературы

- *Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. // Искусственные спутники Земли. 1961. № 8. С. 5.
- *Моисеев Н.Д.* О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек Труды ГАИШ, т.15, ч.1, с.100, 1945.
- *Гордеева Ю.Ф.* Зависимость элементов от времени в долгопериодических колебаниях в ограниченной задаче трех тел // Космич. исслед. 1968. Т. 6. № 4. С. 536.
- *Вашковьяк М.А.* Об эволюции орбит далеких спутников Урана // Письма в "Астрон. журн." 1999. Т. 25. № 7. С. 554.
- *Прохоренко В.И.* Геометрическое исследование решений ограниченной круговой двукратно осредненной задачи трех тел // Космич. исслед. 2001. Т. 39. № 6. С. 622.
- *Прохоренко В.И.* Исследование периодов эволюции эллиптических орбит в двукратно осредненной задаче Хилла // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 1. С. 22.
- *Назиров Р.Р., В.И. Прохоренко, А.И. Шейхет* Ретроспективный геометрический анализ долгопериодической эволюции орбит и времени баллистического существования ИСЗ серии ПРОГНОЗ // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 5. С. 538.
- *Вашковьяк М.А. Тесленко Н.М.* Построение периодически эволюционирующих орбит спутника сжатой планеты в осредненной задаче Хилла с учетом прецессии орбиты возмущающей точки // Письма в Астрон. журн. 1998. Т. 24. № 6, С. 474.