О ВЛИЯНИИ ПРЕЦЕССИИ ОРБИТЫ ЛУНЫ НА ЭВОЛЮЦИЮ И ВРЕМЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВЫСОКОАПОГЕЙНЫХ ОРБИТ ИСЗ

Виктория И. ПРОХОРЕНКО

vprokhor@iki.rssi.ru

АННОТАЦИЯ

- *Проблема выбора орбит ИСЗ с длительным временем существования не является новой. Она всегда была актуальной, однако в последние годы эта проблема приобрела большую актуальность из-за того, что существенно повысился ресурс бортовых приборов и бортовой энергетики. Теперь необходимое время существования орбит измеряется не годами, а десятилетиями. Это заставило произвести переоценку ценностей и вернуться к рассмотрению факторов, влияющих на длительность времени существования.*

Введение

- Полученное в классической работе М.Л. Лидова [1961] решение для спутникового варианта двукратно- осредненной ограниченной задачи трех тел содержат необходимые, но не достаточные рекомендации для решения рассматриваемой задачи.

- Численные эксперименты в рамках ретроспективного анализа времени существования спутников серии «Прогноз», запущенных на высокоапогейные орбиты в 1972 - 1995, показали существенное влияние некоторых факторов, которые лежат вне решения осредненной задачи трех тел

Введение (2)

- Для орбиты «Прогноз-6» с начальным значением высоты апогея (перигея) 197 900 км (498 км) и датой старта 22.09.1977 время существования составляло около 40 лет.
- Численный расчет эволюции под влиянием гравитационных возмущений от Луны и Солнца для гипотетического варианта орбиты «Прогноз-6» с измененной ровно на один год датой старта (1978) и фиксированными значениями всех остальных начальных условий дает время существования более 500 лет.
- А гипотетический перенос запуска на 1988 год привел бы ко времени баллистического существования не более 7 лет.

Введение (3)

- Здесь дело в прецессии орбиты Луны (которая, сохраняя постоянное наклонение к плоскости эклиптики около 5.5°, прецессирует с периодом 18.6 года).
- Упомянутые орбиты типа ПРОГНОЗ-6 с разными датами старта отличаются начальными значениями углового расстояния между линиями узлов орбиты спутника и орбиты Луны на плоскости эклиптики.
- Это различие никак не влияет на процесс эволюции, описываемый решением осредненной задачи.

Введение (4)

- Это приводит к необходимости создания инструментов для анализа эволюции орбит с учетом новых факторов.
- Использование для этих исследований численных методов решения полной системы дифференциальных уравнений требует очень больших затрат машинного времени на той технике, которой мы располагаем на сегодняшний день.
- Расчет эволюции орбиты высокоапогейного спутника с учетом влияния Луны и Солнца на 10 лет требует около 50 мин машинного времени.

Введение (5)

- Мы предлагаем алгоритм, основанный на использовании эволюции по Лидову в качестве невозмущенного движения, а прецессию орбиты Луны – в качестве возмущающего фактора.
- В докладе обсуждаются различные аспекты разработки этого алгоритма и первые результаты его использования.

Полученные М.Л. Лидовым [1961] аналитические решения двукратно осредненной ограниченной задачи трех тел в хилловском приближении

$$c_0 = a; \quad c_1 = \varepsilon \cos^2 i; \quad c_2 = (1-\varepsilon)(2/5 - \sin^2\omega \sin^2 i); \qquad (1)$$

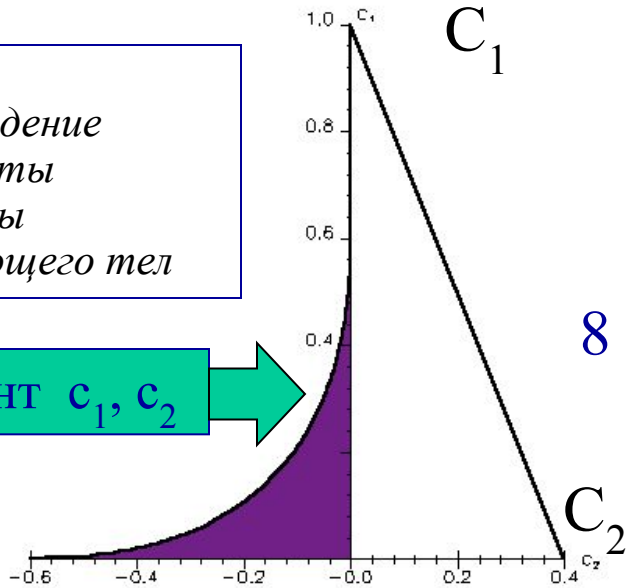
$$N - N_0 = -\frac{1}{A}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{(1-\varepsilon)\varepsilon^{1/2}\sin^2 i \sin 2\omega}; \quad A = \frac{15}{2}\pi \frac{M_1}{M}\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 \varepsilon_1^{-3/2}; \qquad (2)$$

$$\Omega - \Omega_0 = -A\int_{N_o}^{N} \frac{\cos i\,((1-\varepsilon)\sin^2\omega + \varepsilon/5)dN}{\varepsilon^{1/2}}, \qquad (3)$$

$$c_0 = a_0; \quad c_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0; \quad c_2 = (1-\varepsilon_0)(2/5 - \sin^2\omega_0 \sin^2 i_0). \qquad (5)$$

a - большая полуось, $\varepsilon = 1 - e^2$, e – эксцентриситет;
i, ω, и Ω - наклонение, аргумент перицентра и прямое восхождение восходящего узла орбиты ИСЗ, отнесенные к плоскости орбиты возмущающего тела; N – номер витка; ε_1 – параметр ε орбиты возмущающего тела; M, M_1 – масса центрального и возмущающего тел

Область возможных значений интегральных констант c_1, c_2



Зависимость орбитальных элементов от времени τ

В работе Ю.Ф. Гордеевой [1968] получено выражение зависимости эволюции орбитальных элементов от времени через эллиптический интеграл первого рода.

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = -\frac{2\sqrt{6}}{5} sign(\sin 2\omega)\sqrt{(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)};$$

$$\boxed{\tau = A\left(\frac{\sqrt{\mu}}{2\pi a^{3/2}}\right)t = Bt}$$

$\beta = 1-5/2c_2$; α, γ корни уравнения: $\varepsilon^2 - \varepsilon(1+\frac{5}{3}(c_1+c_2)) + \frac{5}{3}c_1 = 0.$

Использование замены переменных $k^2\sin^2\varphi = \frac{\beta-\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}$; $k^2 = \frac{\beta-\varepsilon_{\min}}{\alpha-\varepsilon_{\min}}$; (5)

приводит к выражению τ через эллиптический интеграл первого рода

$$\tau = sign(\sin 2\omega)\alpha_\tau F(\varphi,k),$$ где $\alpha_\tau = \frac{5}{\sqrt{6(\alpha-\varepsilon_{\min})}}$ (6)

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_{\min} + (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min})sn^2(u+K(k))}$$

где $u = \tau/\alpha_\tau$

$T_u = 2\,K(k)$ - период изменения $\varepsilon(u)$; $T_\tau = 2\,\alpha_\tau K(k)$ - период изменения $\varepsilon(\tau)$

Примечание: Здесь приведены выражения для параметров k, ϕ, α_τ для $c_2 > 0$ при $c_2 < 0$ в выражениях (5), (6) нужно поменять местами α и β

Безразмерный период либрационных составляющих эволюции орбитальных элементов

Введем безразмерные параметры : $a_* = a/l, \quad t_* = t/\chi, \quad \mu_* = \mu\tau^2/l^3,$

используя характерные размер, время и массу : $l = R, \quad \chi = 1\,год, \quad m = R^3/f\tau^2;$

f – *гравитационная константа*, R - *радиус центрального тела.*

Выразим период либрации T через безразмерный период T_C, который в свою очередь выражается через безразмерные параметры

$$T = T_C\chi \qquad T_C = B\left|L_C(c_1, c_2)\right| \qquad \left|L_C(c_1, c_2)\right| = 2\,\alpha_\tau K(k); \qquad (7)$$

$$B = \frac{4}{15}a_*^{-3/2}L_D^{-1} \qquad L_D = \mu_{1*}a_{1*}^{-3}\varepsilon_1^{-3/2}\mu_*^{-1/2} \qquad (8)$$

K (k)- полный эллиптический интеграл первого рода.

a_* - большая полуось спутника;

L_D - параметр подобия возмущений;

Используемые варианты безразмерного времени и соответствующие им значения либрационного периода

- $t^* = t/\chi$ (либрационный период T_C)
- $\tau = t^* /B$ (либрационный период $|Lc|$)
- $u = \tau/\alpha_\tau$ (либрационный период 2K)
- $\varphi = \pi\, u/K(k) + \pi/2$ (либрационный период 2π)

Выражение для Ω в функции параметра τ

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = sign(\cos i)\frac{\sqrt{c_1}}{5}\left(1+\frac{5c_2-2c_1-2}{\varepsilon - c1}\right);$$

$$\boxed{\Omega(\tau) = sign(\cos i)\frac{\sqrt{c1}}{5}(\tau + (5c_2-2c_1-2)\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{dv}{\varepsilon - c_1}) + \Omega_0}$$

Далее возможны два пути :

- Использование полученного М.А Вашковьяком [1999] решения, основанного на представлении ε через sn эллиптический, что приводит к выражению Ω (τ) через эллиптические интегралы третьего рода
- Использование приближенной апроксимации ε с помощью sin(φ), что позволяет выразить Ω (τ) через элементарные функции

Применение гармонической апроксимации

$$\boxed{\varepsilon = b + d\sin\phi,} \quad b = \frac{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}{2}; \quad d = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{2}; \qquad (9)$$

Замена переменной $\varphi = 2\pi\,\tau/|Lc| + \pi/2$ (10)

$$\frac{d\Omega}{d\phi} = sign(\cos i)\frac{|L_C|}{2\pi}\frac{\sqrt{c_1}}{5}\left(1 + \frac{5c_2 + 2c_1 - 2}{b - c_1 + d\sin\phi}\right);$$

$$\boxed{\Omega = sign(\cos i)\frac{|L_C|}{2\pi}\frac{\sqrt{c1}}{5}(\phi + (5c_2 + 2c_1 - 2)\,I(\phi)) + \Omega_0}$$

Табличный интеграл $I(\varphi)$

$$I(\phi) = \int\frac{d\phi}{b - c_1 + c\sin\phi} = \frac{2}{\sqrt{(b-c_1)^2 - d^2}}\,arctg\frac{(b-c_1)tg\frac{\phi}{2} + d}{\sqrt{(b-c_1)^2 - d^2}}$$

Представление Ω в функции параметра φ в виде суммы ротационной и либрационной составляющих

$$\boxed{\Omega(\phi) = Q\frac{|L_C|}{2\pi}((1+s)\phi - sf(\phi)) + \Omega_0;} \qquad (11)$$

$$\boxed{Q = sign(\cos i)\sqrt{c_1}/5} \qquad (12)$$

$$s(c_1, c_2) = \frac{5c_2 + 2c_1 - 2}{\sqrt{(\varepsilon_{\max} - c_1)(\varepsilon_{\min} - c_1)}}; \qquad (13)$$

$$\boxed{f(\phi, c_1, c_2) = \phi - 2arctg\frac{(\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min} - 2c_1)tg\frac{\phi}{2} + \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{2\sqrt{(\varepsilon_{\max} - c_1)(\varepsilon_{\min} - c_1)}},} \qquad (14)$$

Период ротационной составляющей эволюции Ω, при аппроксимации синусом

$$\left|L_{\Omega}(c_1, c_2)\right| = T_{\Omega(\tau)} = \frac{10\pi}{\sqrt{c_1}(1+s)};$$

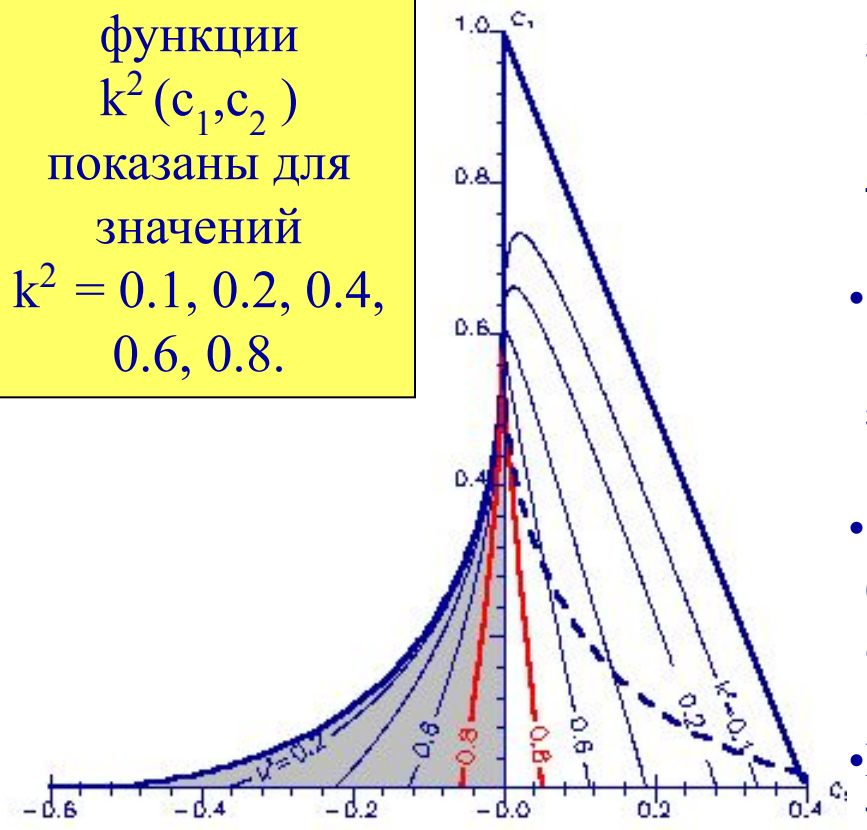
$$s = \frac{5c_2 + 2c_1 - 2}{\sqrt{(\varepsilon_{\max} - c_1)(\varepsilon_{\min} - c_1)}}; \quad (15)$$

$$T_{\Omega(t^*)} = \frac{4}{15}\frac{a_*^{-3/2}}{L_D}\left|L_{\Omega}(c_1, c_2)\right|,$$

$$\mathrm{T}_{\Omega(t)} = T_{\Omega(t^*)}\chi \quad (16)$$

Значения модуля эллиптического интеграла k^2 в функции c_1, c_2

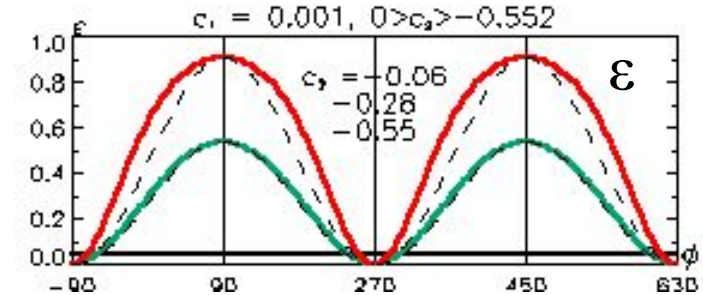
Линии уровня функции $k^2(c_1,c_2)$ показаны для значений $k^2 = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.



На следующих слайдах представлены полученные двумя способами результаты расчетов эволюции параметров ε, ω, Ω в функции φ на двух периодах либрации при различных значениях параметров c_1,c_2 :

- Сплошной линией показаны результаты расчетов с использованием обращения эллиптических интегралов первого рода [Ю.Ф. Гордеева, 1968],
- Штриховой линией – результаты расчетов, основанные на использовании аппроксимации

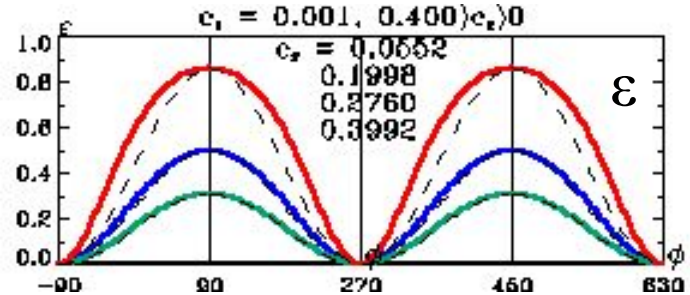
  $\varepsilon = \alpha + \delta \sin\varphi$.
- Расчеты эволюции параметра Ω выполнены только одним способом (с применением аппроксимации)

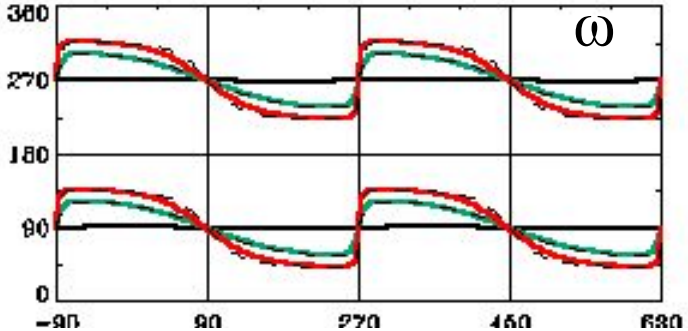


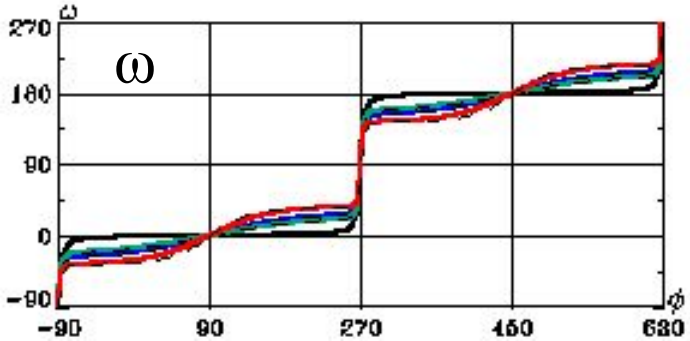
$c_1 = .001$

$c_{2min} = -.552$

$c_{2max} = .3996$





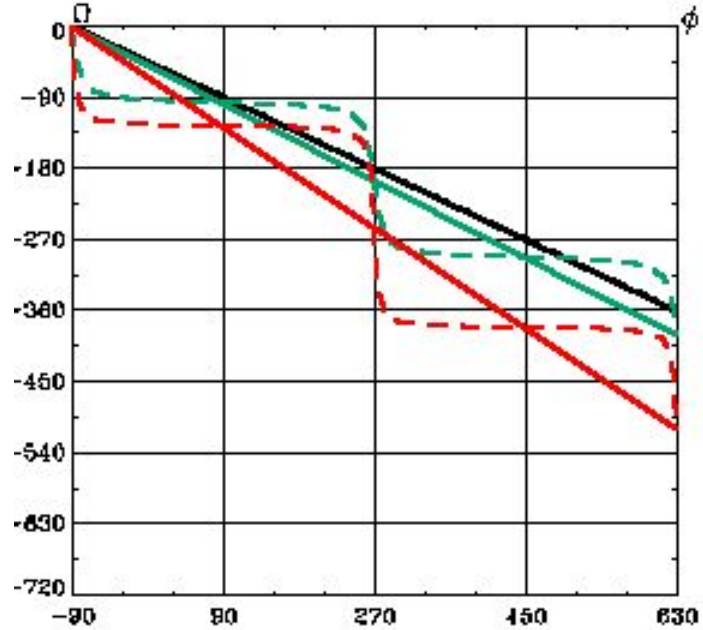


$c_2 < 0$:

$.1 c_{2min} = -.06$;

$.5\ c_{2min} = -.28$;

$.99\ c_{2min} = -.55$



$c_2 > 0$:

$-.1\ c_{2min} = .06$;

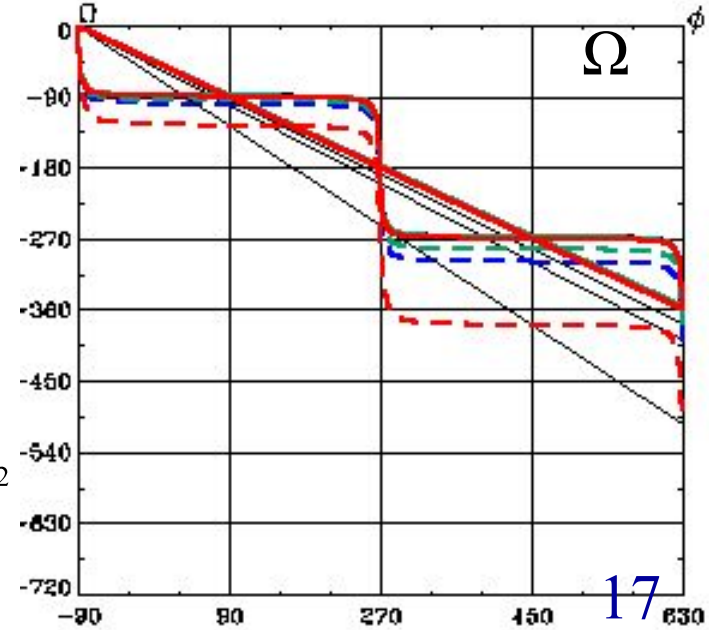
$.5\ c_{2max} = .20$

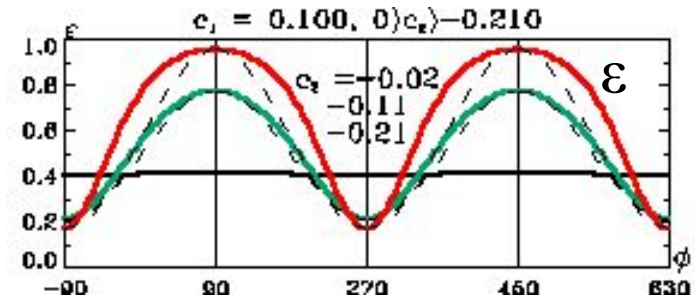
$-.5\ c_{2min} = .28$;

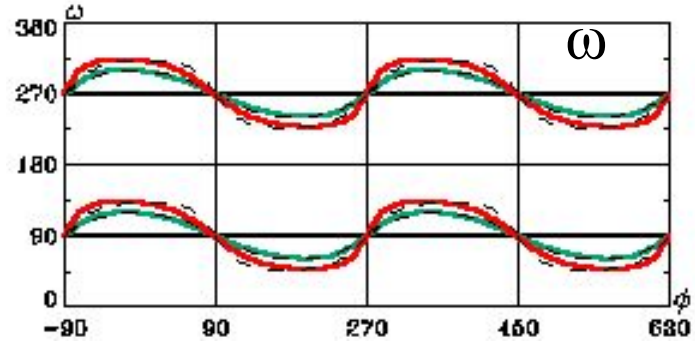
$.99\ c_{2max} = 0.40$

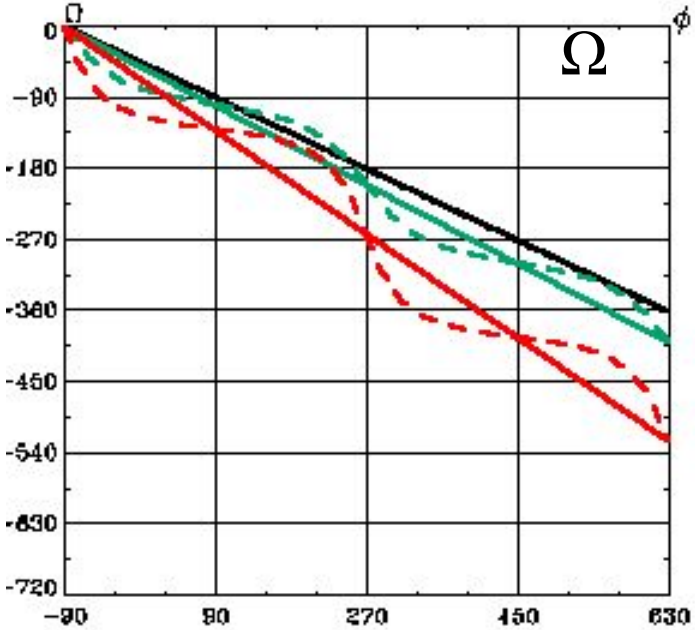
$$_{min} = -3/5\left(1-\sqrt{5/3c_1}\right)^2$$

$$_{max} = 2/5(1-c_1)$$









$c_1 = 0.1$

$c_{2min} = -0.210$

$c_{2max} = 0.360$

$c_2 < 0$:

$.1 c_{2min} = -.002$;

$.5\ c_{2min} = -.011$;

$.99\ c_{2min} = -.21$

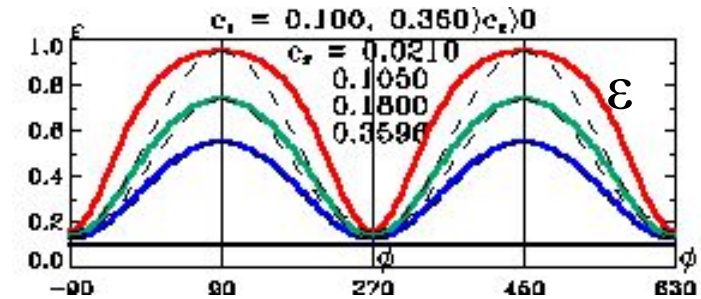
$c_2 > 0$:

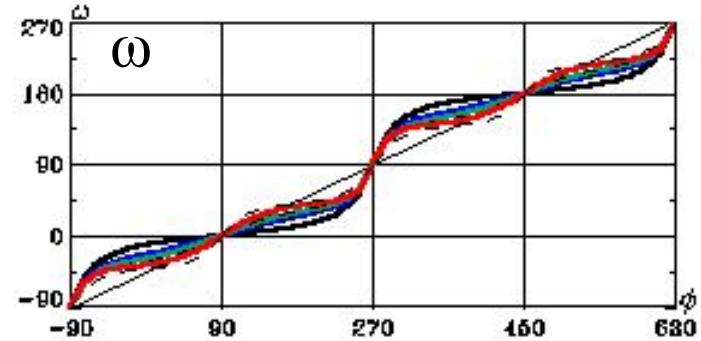
$-.1\ c_{2min} = .002$;

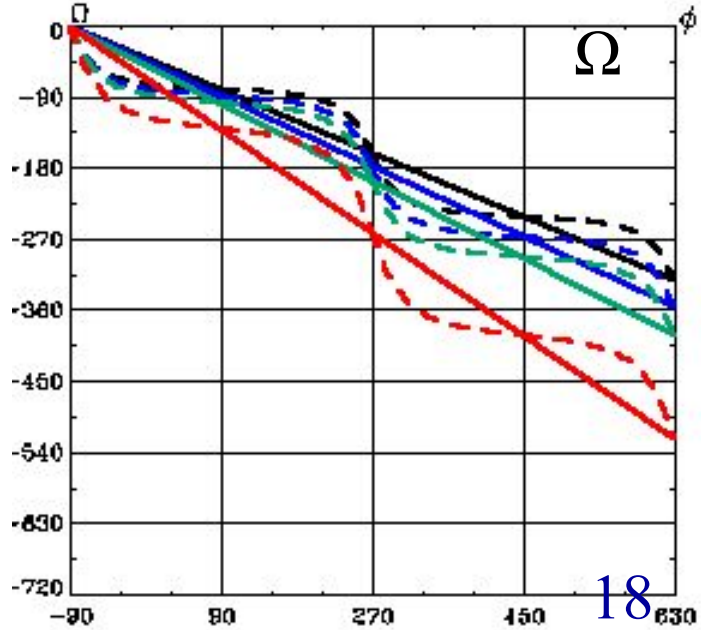
$-.5\ c_{2min} = .011$;

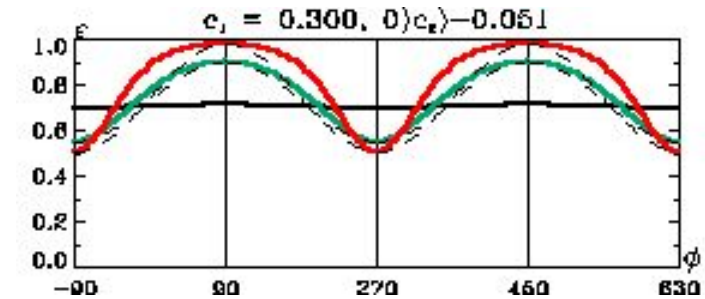
$.5\ c_{2max} = .180$;

$.99\ c_{2max} = .360$



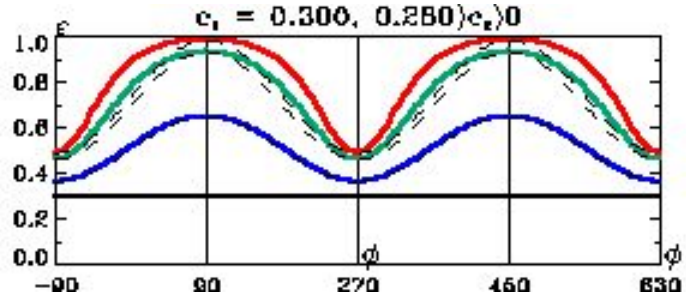


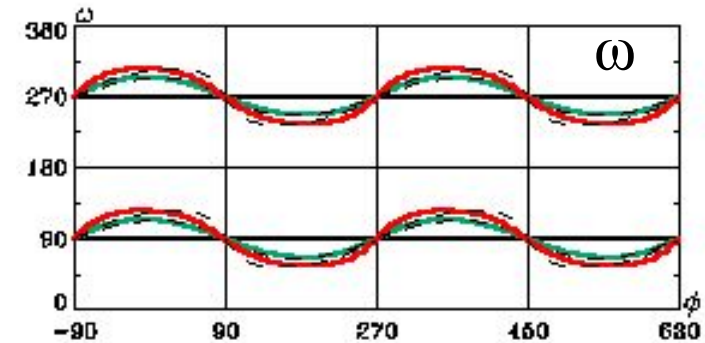




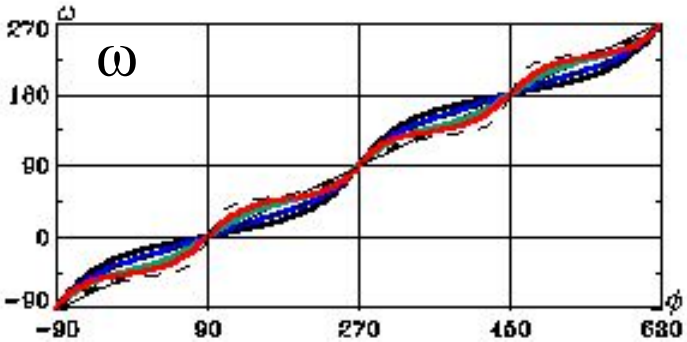
$c_1 = 0.3$

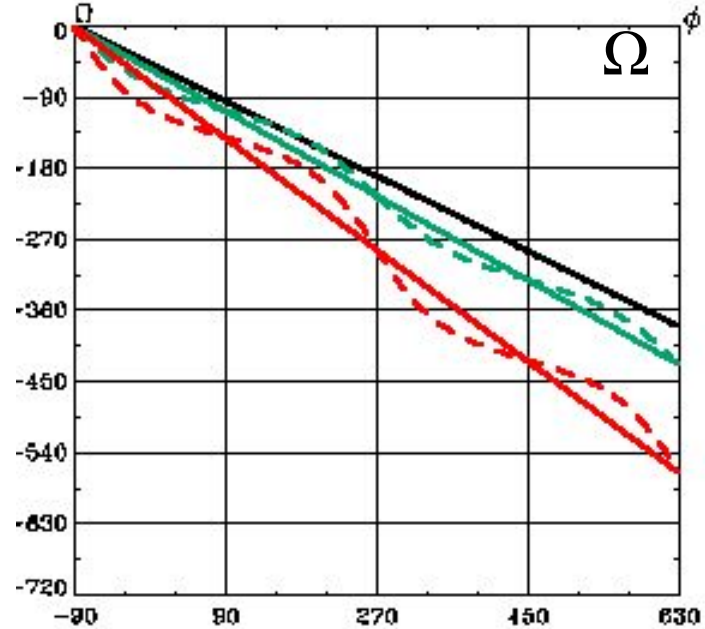
$c_{2min} = -0.051$
$c_{2max} = 0.280$



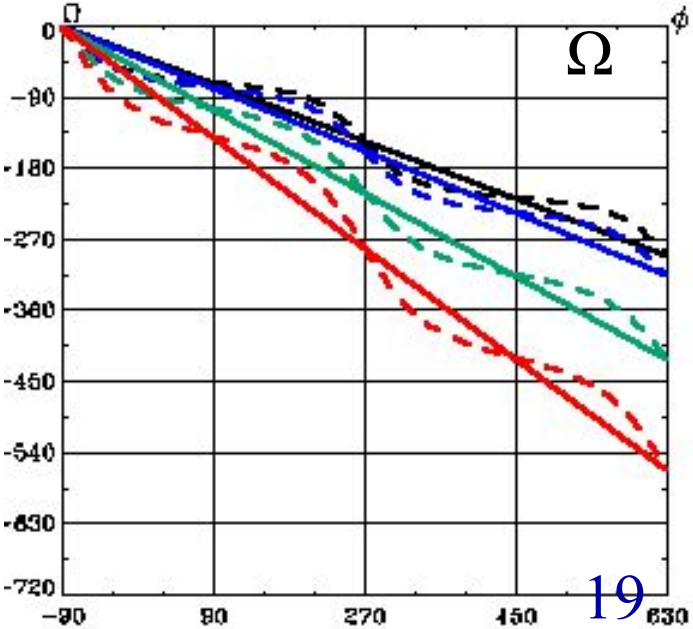


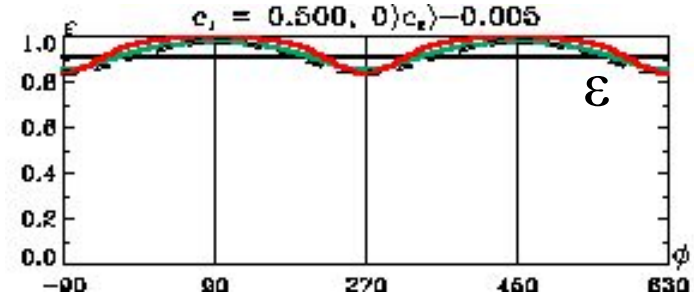
$c_2 < 0$:
$.1 c_{2min} = -.005$;
$.5\ c_{2min} = -.026$;
$.9999\ c_{2min} = -.051$

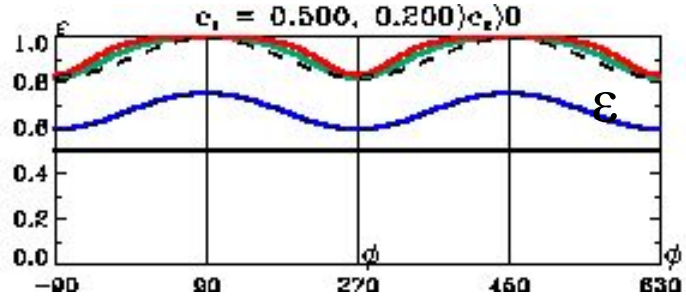




$c_2 > 0$:
$-.1\ c_{2min} = .005$;
$-.5\ c_{2min} = .026$;
$.5\ c_{2max} = .140$;
$.99\ c_{2max} = .280$



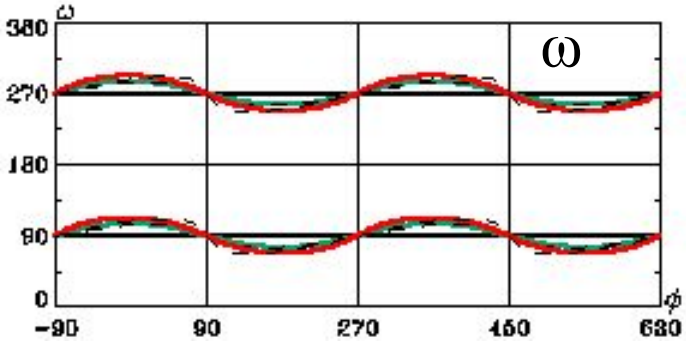


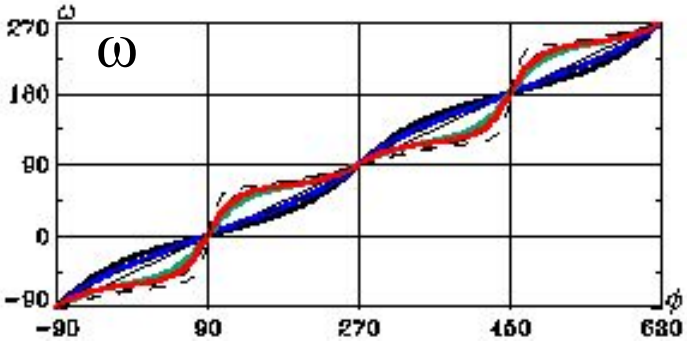


$c_1 = 0.5$

$c_{2min} = -0.005$

$c_{2max} = 0.200$



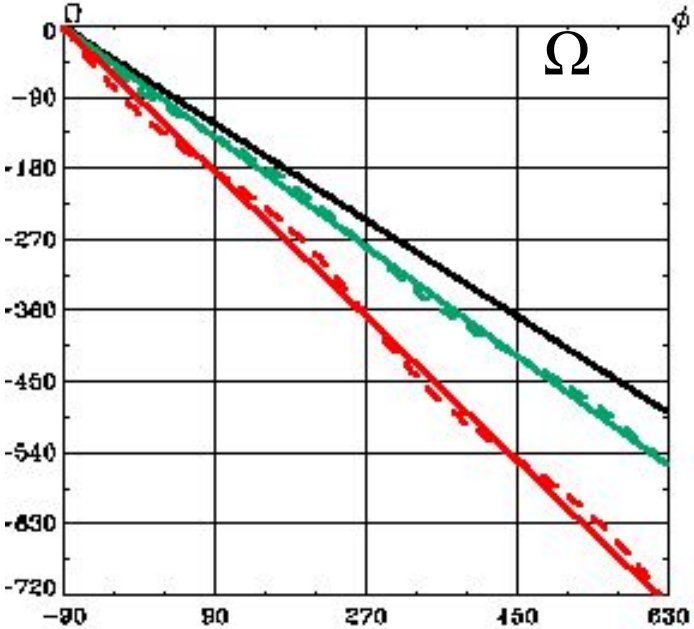


$c_2 < 0$:

$.1 c_{2min} = -.0005$;

$.5\ c_{2min} = -.0023$;

$.9999\ c_{2min} = -.005$



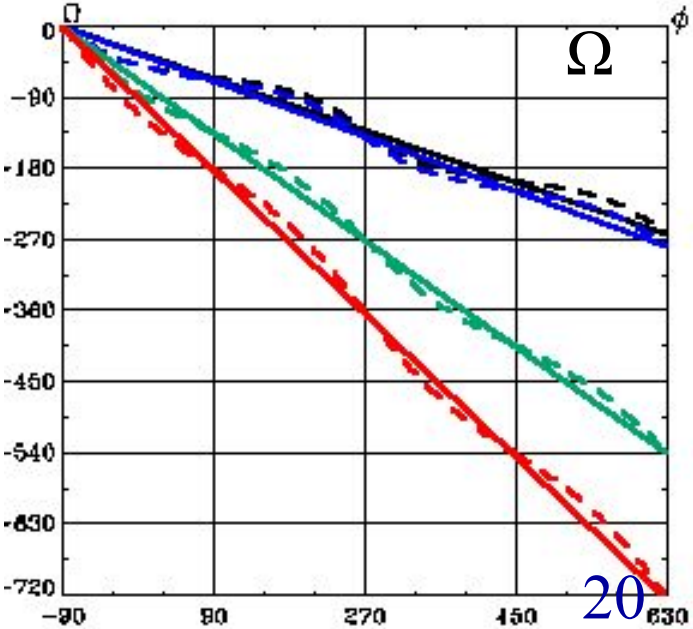
$c_2 > 0$:

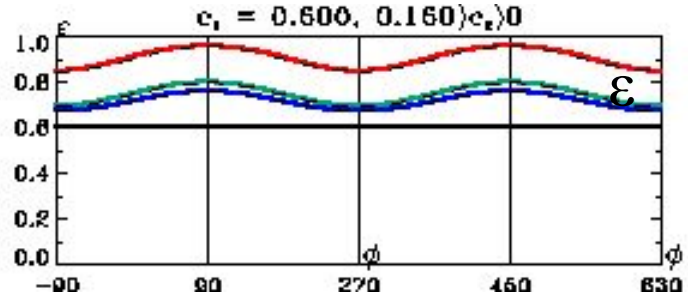
$-.1\ c_{2min} = .0005$;

$-.5\ c_{2min} = .0023$;

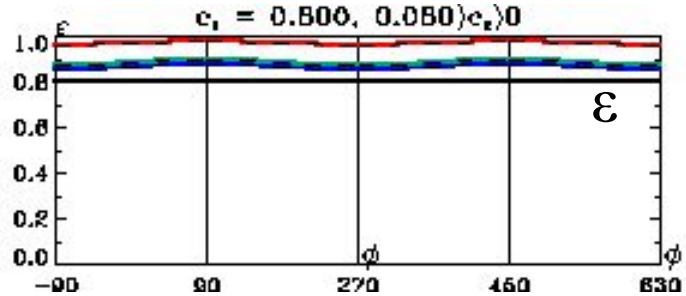
$.5\ c_{2max} = .100$;

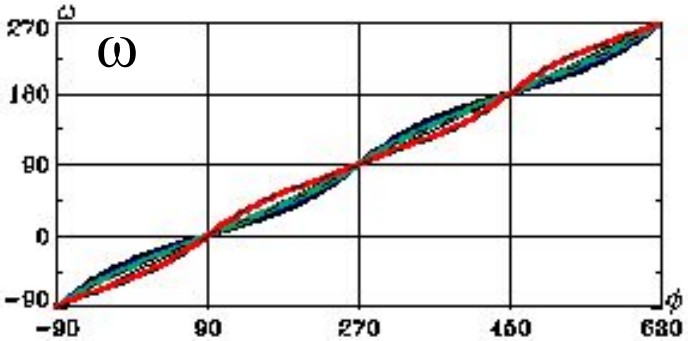
$.99\ c_{2max} = .200$



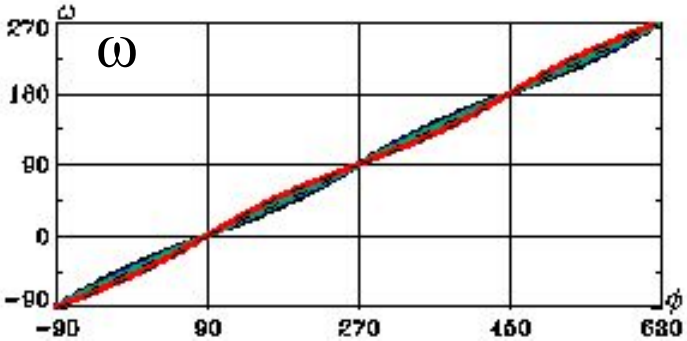


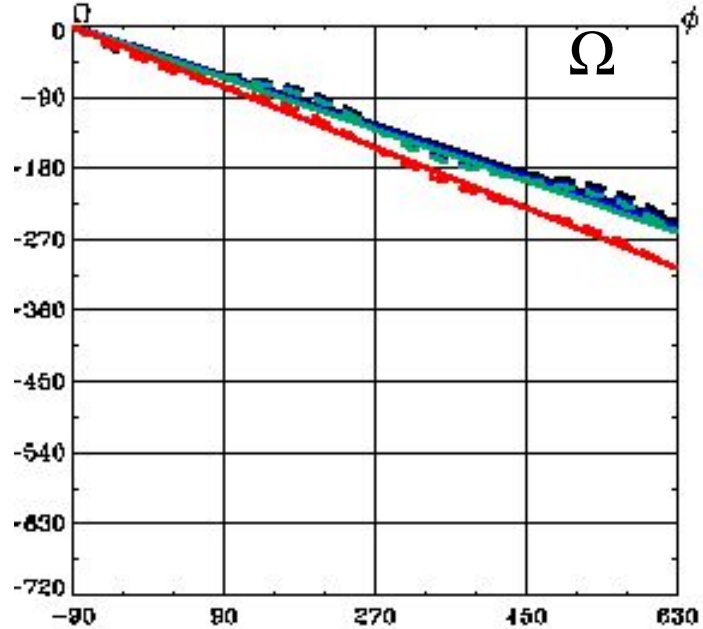
$c_1 = 0.6$,
$c_1 = 0.8$



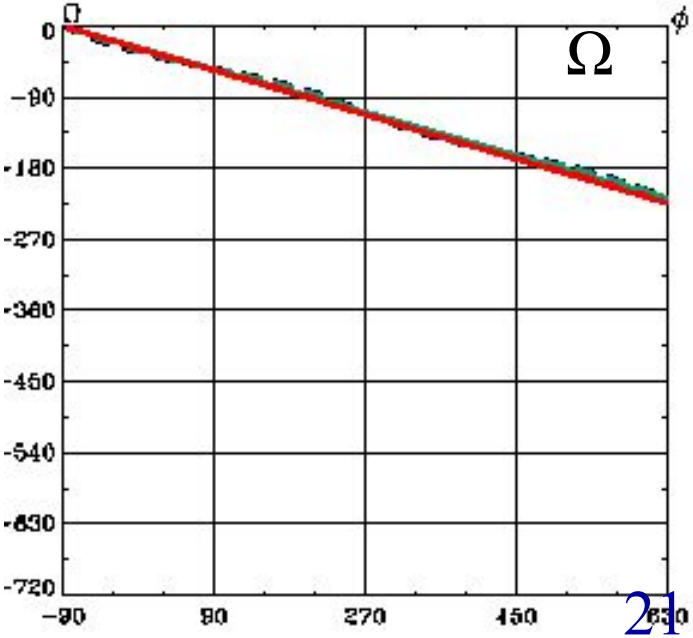


$c_1 = 0.6$
$c_2 > 0$, $c_{2max} = .16$
$.1\ c_{2max} = .016$;
$.5\ c_{2max} = .008$;
$.9999\ c_{2max} = .16$





$c_1 = 0.8$
$c_2 > 0$, $c_{2max} = .08$
$.1\ c_{2max} = .008$;
$.5\ c_{2max} = .04$;
$.9999\ c_{2max} = .08$



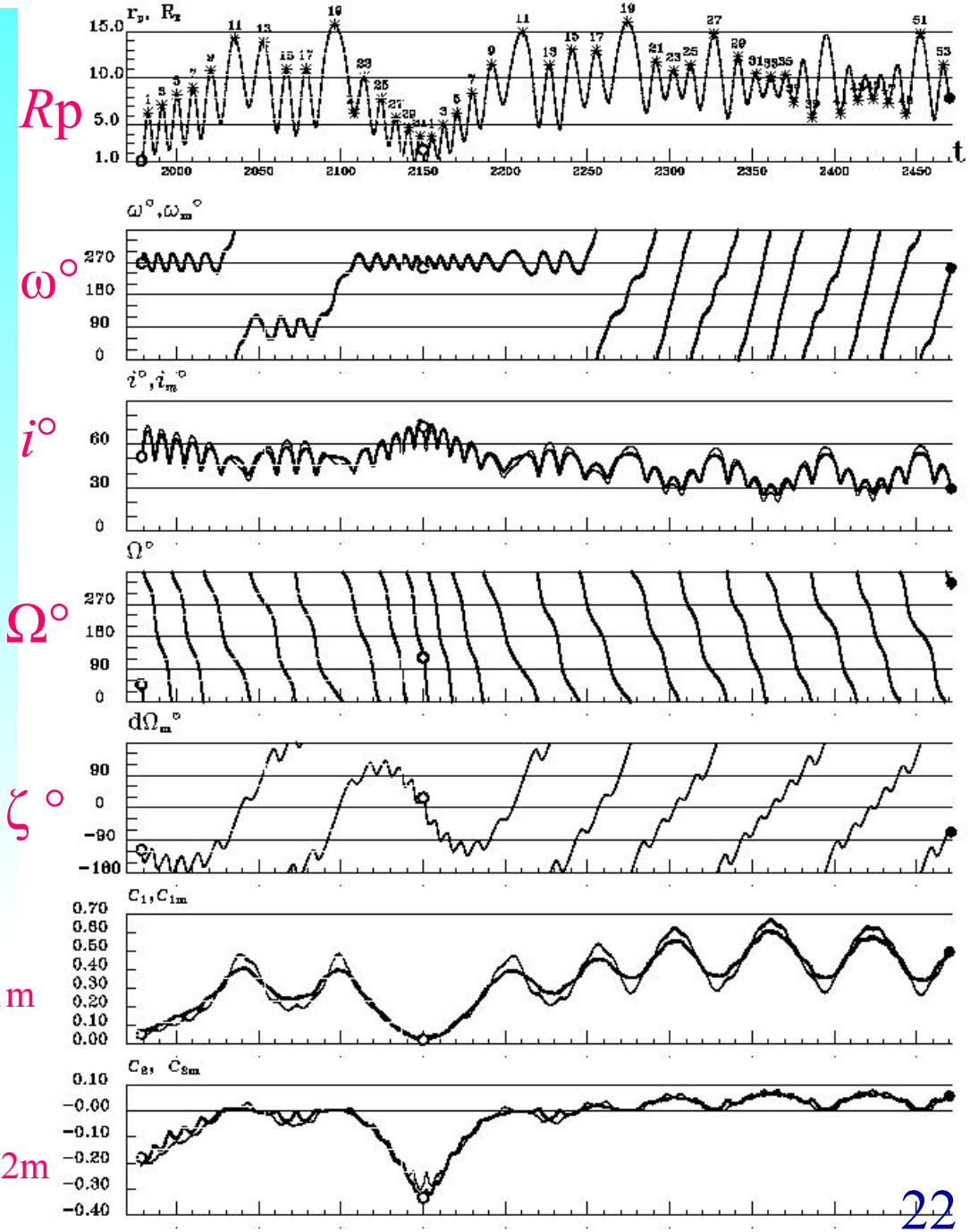
Эволюция орбитальных элементов гипотетической версии орбиты ПРОГНОЗ-6 с датой старта 22.09.1978

$\zeta_0 = 247.5°$.

Время существования более 500 лет

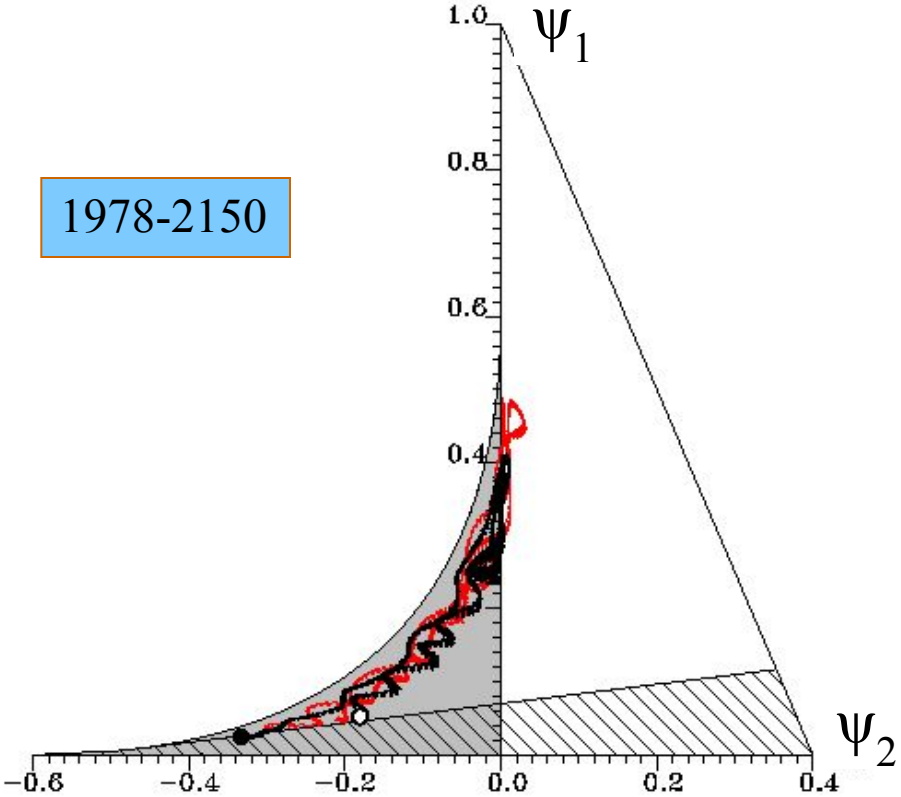
Численное интегриование

Время расчета – 48 часов

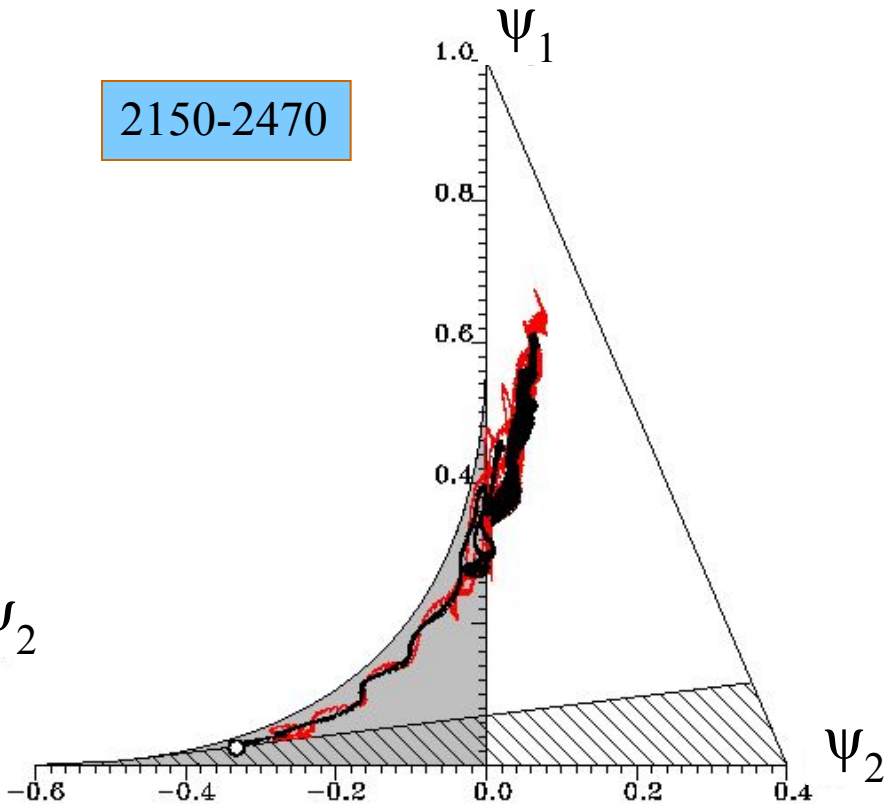


Гипотетическая версия орбиты ПРОГНОЗ-6 с датой старта 1978. Эволюция параметров ψ_1, ψ_2, ψ_{1m}, ψ_{2m} на интервале времени 1978 – 2470

1978-2150



2150-2470



Полуаналитический метод прогноза эволюции орбит под влиянием гравитационных возмущений внешнего тела с учетом прецессии орбиты возмущающего тела

В качестве основной плоскости отсчета будем использовать плоскость, перпендикулярную к оси прецессии орбиты возмущающего тела и проходящую через центральную точку. В нашей задаче возмущающее тела это Луна, а основная плоскость совпадает с плоскостью эклиптики.

На следующе слайдах представлены тригонометрические формулы используемые для перехода от одной плоскости отсчета к другой.

Связь между угловыми элементами i, ω, отсчитанными относительно плоскости эклиптики, и соответствующими элементами i_m, ω_m, отсчитанными относительно плоскости орбиты Луны

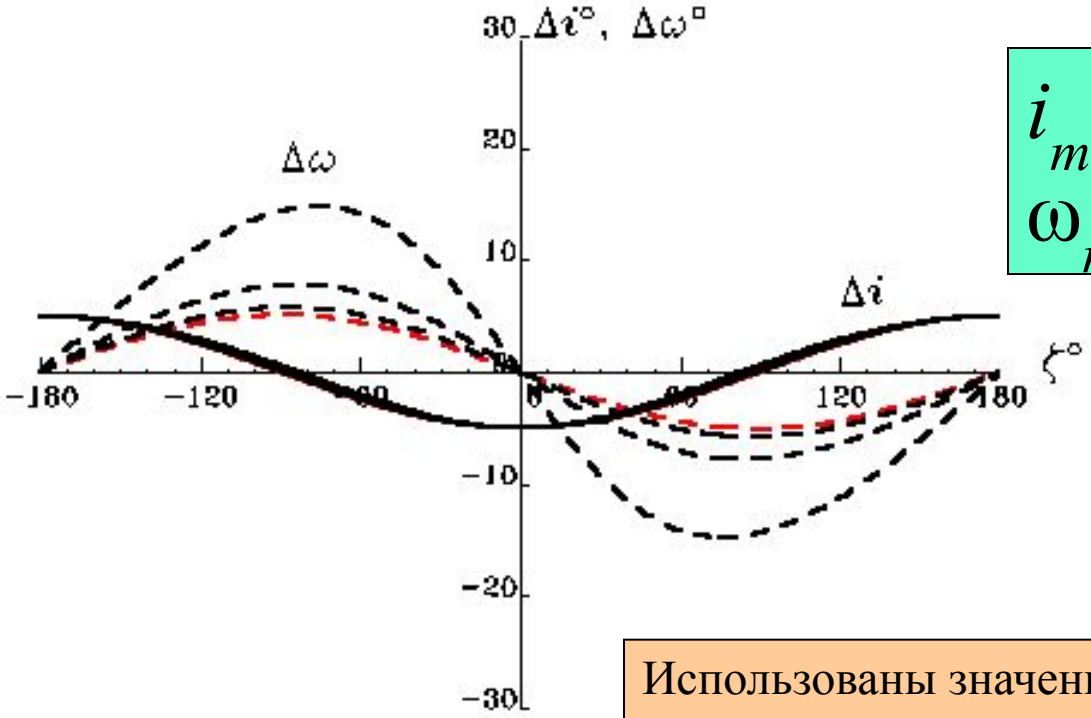
Зависимость значений i_m, ω_m от i, ω и углового расстояния ζ между восходящими узлами орбит спутника и Луны на плоскости эклиптики определяется следующими соотношениями:

$$\cos i_m = \cos\zeta \sin i \sin\delta + \cos i \cos\delta; \qquad \Delta i = i_m - i;$$
$$\cos\Delta\omega = (\sin i \cos\delta - \cos\zeta \cos i \sin\delta) / \sin i_m;$$
$$\sin\Delta\omega = -\sin\delta \sin\zeta / \sin i_m; \qquad \omega_m = \omega + \Delta\omega \qquad (17)$$

$$\cos\zeta_m = (\sin i_m \cos i - \cos\Delta\omega \cos i_m \sin i)/\sin\delta;$$
$$\cos\zeta_m = (-\sin\delta \cos i + \cos\zeta \cos\delta \sin i) / \sin i_m;$$
$$\sin\zeta_m = \sin i \sin\phi / \sin i_m; \qquad \Delta\zeta = \zeta_m - \zeta \qquad (18)$$

где $\delta = 5.5°$ - наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики, ζ_m - угловое расстояние линии узлов орбиты спутника на плоскости орбиты Луны от линии пересечения орбиты Луны с плоскостью эклиптики

Зависимость Δi и $\Delta\omega$ от ζ при разных значениях i



$$i_m = i + \Delta i(i, \zeta)$$
$$\omega_m = \omega + \Delta\omega\,(i, \zeta) \qquad (19)$$

Использованы значения i от 20° до 80° с шагом 20°. Красным цветом отмечена линия, соответствующая максимальному значению i

Описание алгоритма (1)

- Исходя из начальных условий a_0, ε_0 , i_0, ω_0, Ω_0, $\zeta_0 = \Omega_0 - \Omega_{0M}$, заданных в момент времени t_0 относительно плоскости эклиптики, рассчитываем значения ψ_{10} , ψ_{20} по формулам, правые части которых совпадают с правыми частями первых интегралов c_1 , c_2 (4) Лидовского решения осредненной задачи.

- Переходим к плоскости орбиты Луны, рассчитываем угловые элементы i_{0m}, ω_{0m} относительно этой плоскости по формулам (17) и значения ψ_{10m} , ψ_{20m} по формулам (4) .

Описание алгоритма (2)

- Делаем шаг Δt , используя Лидовское решение (6 - 16) учитывающее в качестве орбита возмущающего тела орбиту Луны замороженную на момент времени t_0. Получаем значения ε_1 , i_{1m}, ω_{1m}, ζ_{1m}, соответствующие моменту времени $t_1 = t_0 + \Delta t$.

- Возвращаемся к плоскости эклиптики, преобразуем угловые элементы по формулам (17), (18), получаем i_1, ω_1, ζ_1 , $\Omega_1 = \Omega_{0M} + \zeta_1$. Первый шаг завершен.

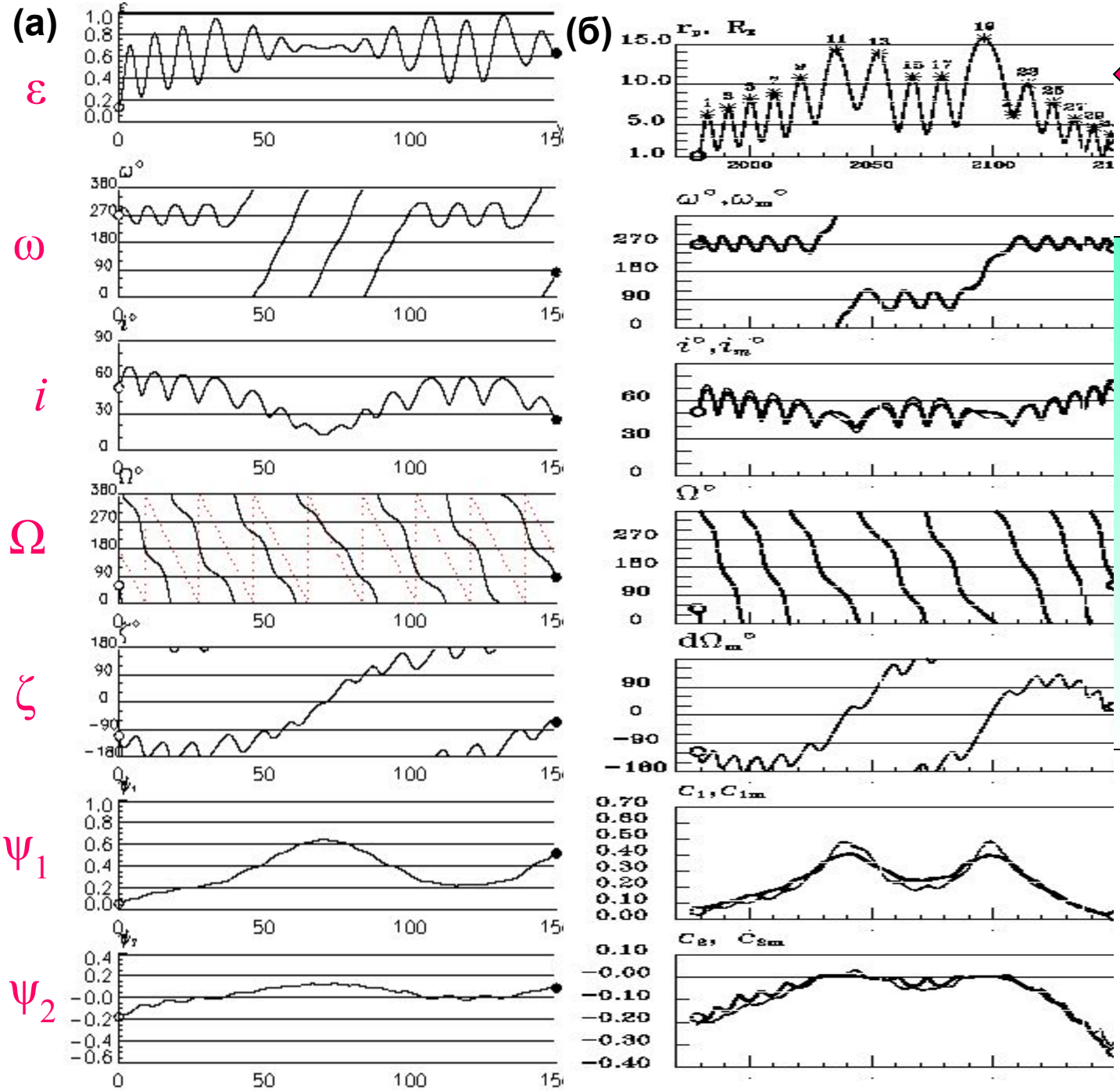
- Для нового шага используем орбиту Луны, замороженную на момент времени t_1

Сопоставление результатов полуаналитического расчета эволюции орбитальных элементов и результатов численного интегрирования

На следующих слайдах на примере орбиты типа ПРОГНОЗ-6 с гипотетическим стартом в 1978 году приводится сопоставление результатов полуаналитического расчета эволюции орбитальных элементов и результатов численного интегрирования на интервале времени 150 лет. И в том и в другом расчете учитываются гравитационные возмущений от Луны и Солнца и прецессия орбиты Луны

Для сопоставления используются следующих параметры: три угловых элемента орбиты ω, i, Ω; угловое расстояния ζ между линиями узлов орбиты спутника и орбиты Луны на плоскости эклиптики; параметры ψ_1, ψ_2, правые части которых соответствуют двум первым интегралам двукратно-осредненной задачи трех тел.

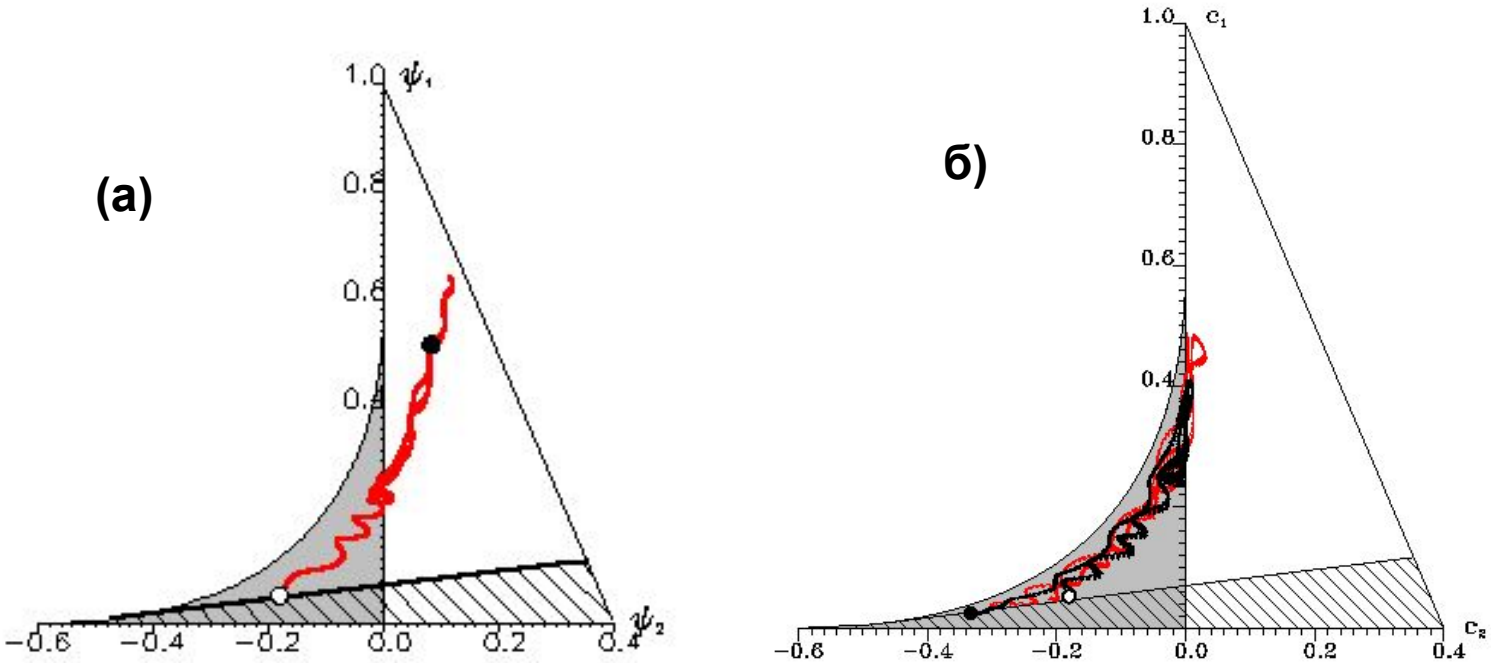
Различие состоит параметре, характеризующем форму орбиты: в первом случае используется параметр $\varepsilon = 1-e^2$, а во втором случае – R_p, радиус перицентра (измеряемый в радиусах земли). Эти параметры связаны между собой взаимно однозначным соответствием при известном значении большой полуоси a и имеют аналогичный характер эволюции.



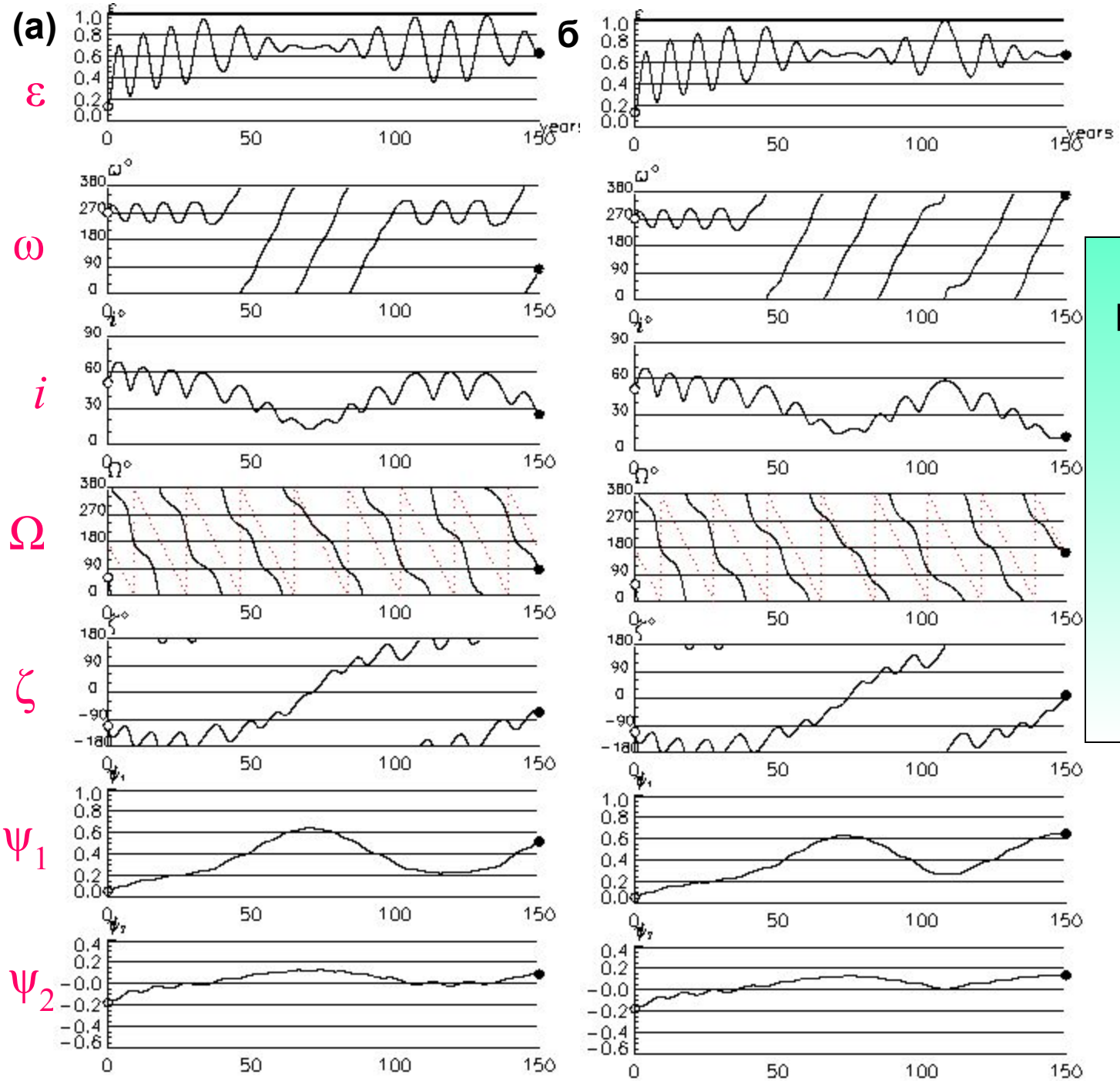
Результаты полу-аналитического расчета с шагом 12 суток (а) и результаты численного интегрирования (б) на интервале времени 150 лет

Время расчета
а – 5 сек
б – 14 часов

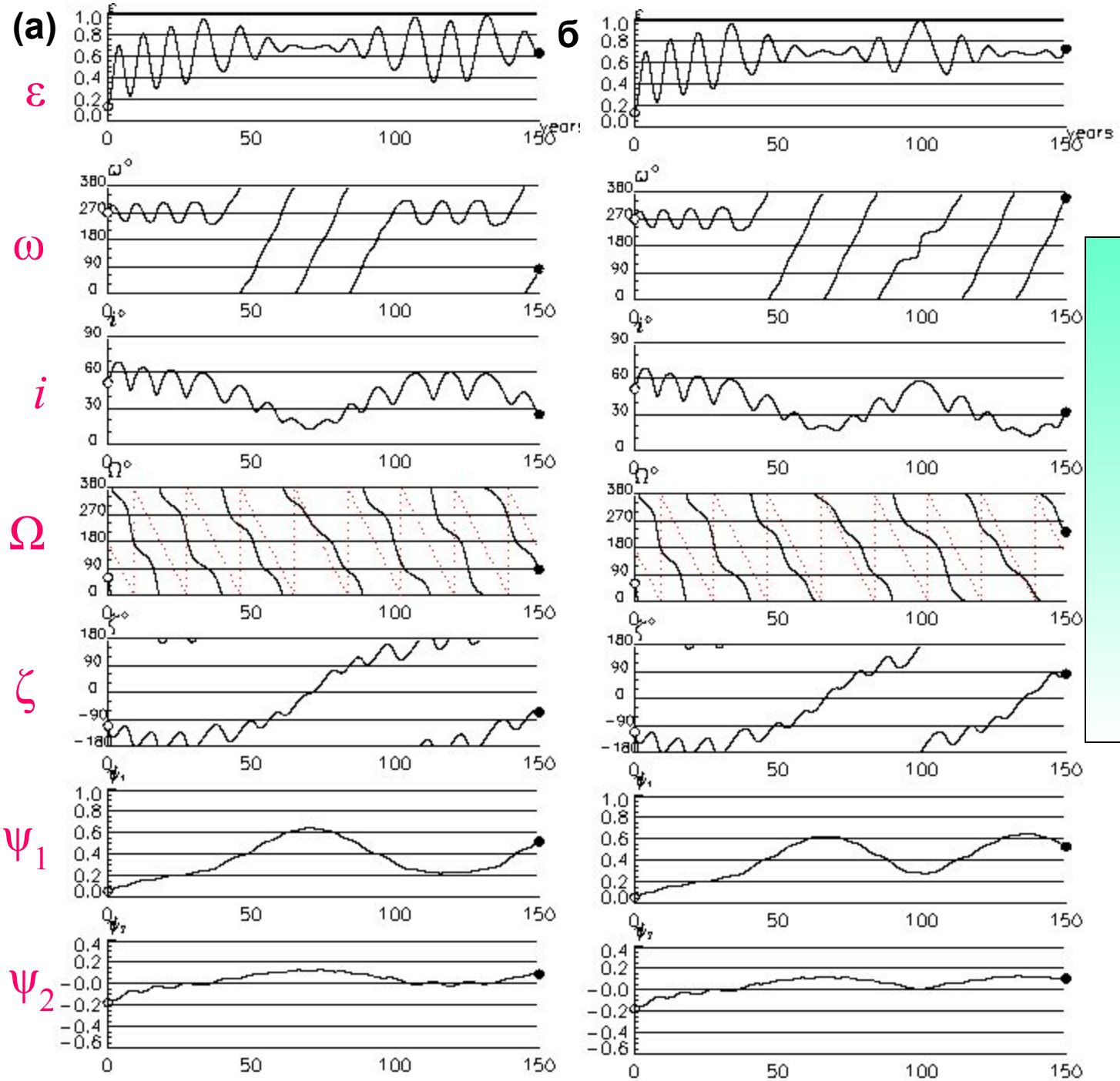
Эволюция положения точки $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ в области возможных значений этих параметров на интервале времени 150 лет



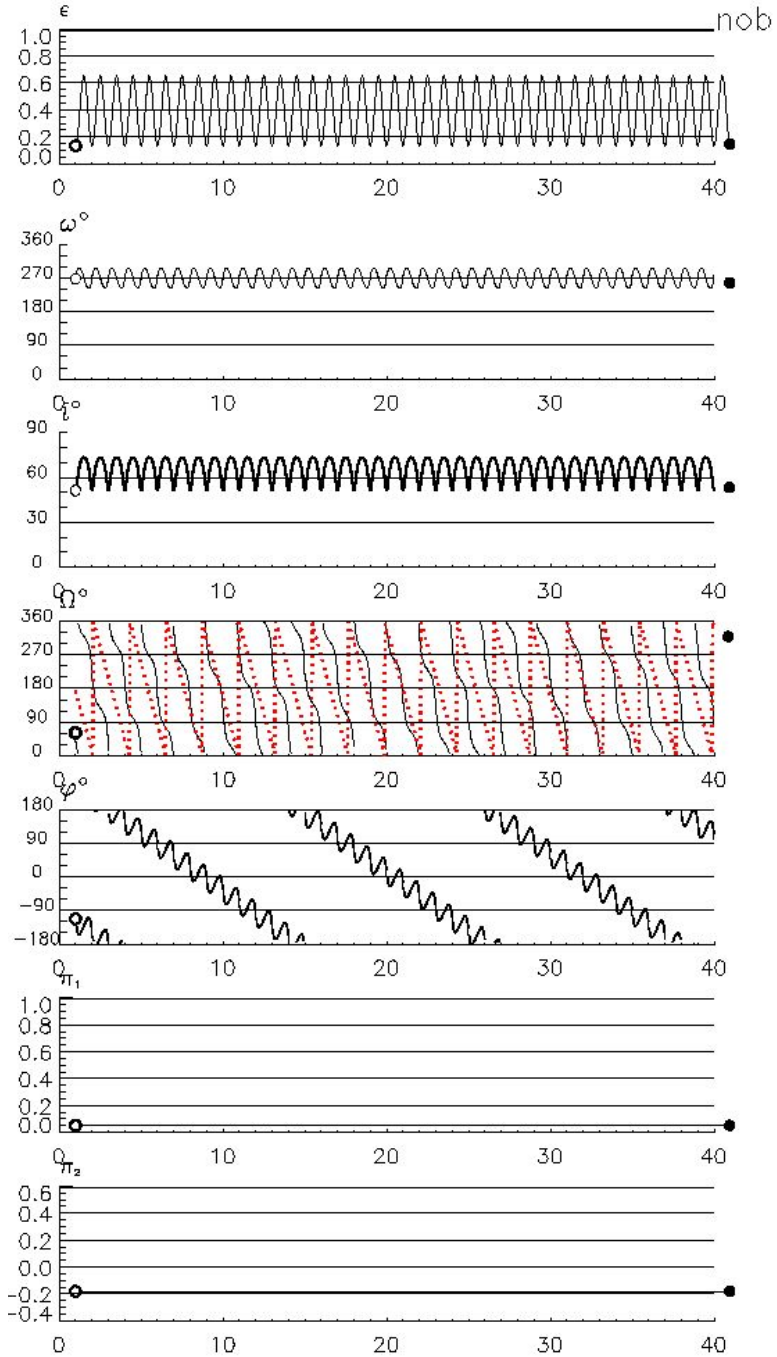
Сопоставление результатов полуаналитического расчета эволюции орбитальных элементов с шагом 12 суток **(а)** и результатов численного интегрирования **(б).** Начальная точка показана светлым кружком, а конечная точка – темным кружком.



Сравнение результаты полу-аналитического расчета с шагом 12 суток (а) и с шагом 24 сутки (б) на интервале времени 150 лет



Сравнение результато полу-аналитического расчета с шагом 12 суток (а) и с шагом 6 суток (б) на интервале времени 150 лет



Эволюция орбиты ИСЗ типа ПРОГНОЗ-6 в отсутствие прецессии орбиты Луны

Заключение

- Разработан эффективный инструмент исследования эволюции и времени существования орбит ИСЗ подверженных гравитационных возмущений от Луны и Солнца.
- Полученный алгоритм отличается очень большим быстродействием. Расчет эволюции орбиты на 150 лет занимает не более 5 секунд против 14 часов при численном интегрировании.
- Это открывает широкие возможности для его применения как для выбора орбит, так и для исследования закономерностей эволюции различных классов орбит.

Список литературы

- *Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. // Искусственные спутники Земли. 1961. №. 8. С. 5.
- *Моисеев Н.Д.* О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек Труды ГАИШ, т.15, ч.1, с.100, 1945.
- *Гордеева Ю.Ф.* Зависимость элементов от времени в долгопериодических колебаниях в ограниченной задаче трех тел // Космич. исслед. 1968. Т. 6. № 4. С. 536.
- *Вашковьяк М.А.* Об эволюции орбит далеких спутников Урана // Письма в "Астрон. журн." 1999. Т. 25. № 7. С. 554.
- *Прохоренко В.И.* Геометрическое исследование решений ограниченной круговой двукратно осредненной задачи трех тел // Космич. исслед. 2001. Т. 39. № 6. С. 622.
- *Прохоренко В.И.* Исследование периодов эволюции эллиптических орбит в двукратно осредненной задаче Хилла // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 1. С. 22.
- *Назиров Р.Р., В.И. Прохоренко, А.И. Шейхет* Ретроспективный геометрический анализ долгопериодической эволюции орбит и времени баллистического существования ИСЗ серии ПРОГНОЗ // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 5. С. 538.
- *Вашковьяк М.А. Тесленко Н.М.* Построение периодически эволюционирующих орбит спутника сжатой планеты в осредненной задаче Хилла с учетом прецессии орбиты возмущающей точки // Письма в Астрон. журн. 1998. Т. 24. № 6, С. 474.