Научно-исследовательская работа по математике на тему

Исследование производственной функции Кобба-Дугласа методами математического анализа и компьютерного моделирования.

Введение.

- **<u>Целью настоящей работы</u>** является применение методов математического анализа и компьютерного моделирования для исследования известной в экономической теории двухфакторной производственной функции.

- ***Актуальность темы работы*** следует из принципа прикладной экономической направленности (в силу профиля класса) всех математических исследований, приведенных в работе.

- ***Методы исследований.*** При написании работы мною были применены:
  1) методы математического анализа функций двух аргументов;
  2) графическое приложение программы Excel;
  3) экономические определения и тезисные утверждения со ссылкой на книги по экономической теории.

- ***Практическая направленность.*** Работа наглядно демонстрирует на примере одной известной в экономике функции, как методы математического анализа позволяют получить выводы, полезные для экономических исследований.

Открытие функции Кобба-Дугласа.

$$Y = Y_0 K^{\alpha} L^{\beta}$$

где

Y - индекс производства,

Y_0 - коэффициент производительности,

K - индекс капитала,

L - индекс рабочей силы,

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ - коэффициенты эффективности ресурса.

$Y = Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, где $0<\alpha<1$; $\alpha + \beta = 1$.

Производственная двухфакторная функция.

Теорема. Функция Кобба-Дугласа ($Y = Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$) – линейно-однородная функция.

Доказательство. Докажем, что функция Кобба-Дугласа обладает свойствами линейно-однородной функции.

1) При K=0 или L=0 результат функционирования экономического объекта: Y=0.

2) Если K и L одновременно увеличить в n раз, то в такое же количество раз возрастает и Y ; т.е.:

$$f(nK, nL) = Y_0 (nK)^{\alpha} (nL)^{1-\alpha} = Y_0 n^{\alpha} K^{\alpha} n^{1-\alpha} L^{1-\alpha} = n^{\alpha+1-\alpha} K^{\alpha} L^{1-\alpha} = nf(K, L).$$

Линейный вид функции Кобба-Дугласа.

1) Прологарифмируем обе части равенства $Y = Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$.
2) Получим $\ln Y = \ln Y_0 + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L$.
3) Введем обозначения $\ln Y = z;\ \ln K = x;\ \ln Y_0 = a;\ \ln L = y$.
4) Приведем к виду линейной функции $z = a + \alpha x + (1-\alpha) y$.

1) Пусть $z = z_c - const$, тогда $z_c = kx^{\alpha}y^{1-\alpha}$. Разделив обе части равенства на k получим $x^{\alpha}y^{1-\alpha} = \dfrac{z_c}{k}$. Выразим отсюда y через x^{α}, для чего разделим обе части уравнения на x^{α} и возведем затем их в степень $\dfrac{1}{1-\alpha}$, получим $y = \left(\dfrac{z_c}{k}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot x^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Полагаем $\beta = \left(\dfrac{z_c}{k}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > 0$, тогда $y = \beta \cdot x^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ (*) – уравнение изокванты функции Кобба-Дугласа.

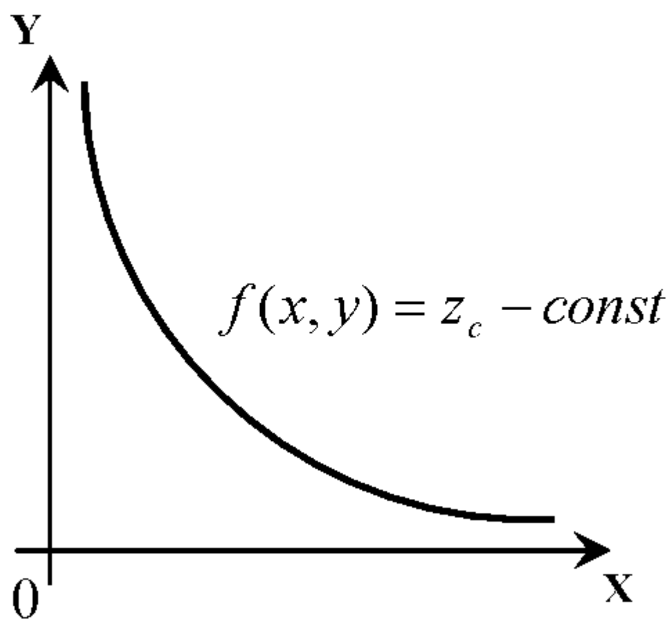
2) Дифференцируем y по x, получим $y' = \beta \cdot \left(-\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right) \cdot x^{-\frac{1}{1-\alpha}} < 0$ при всех допустимых значениях x, $\beta > 0$ и $0 < \alpha < 0$. Следовательно, функция (*) убывает. При этом, если $x \to \infty$, *то* $y \to 0$ и наоборот, если $y \to \infty$, *то* $x \to 0$. То есть оси координат являются асимптотами изокванты-графика функции (*).

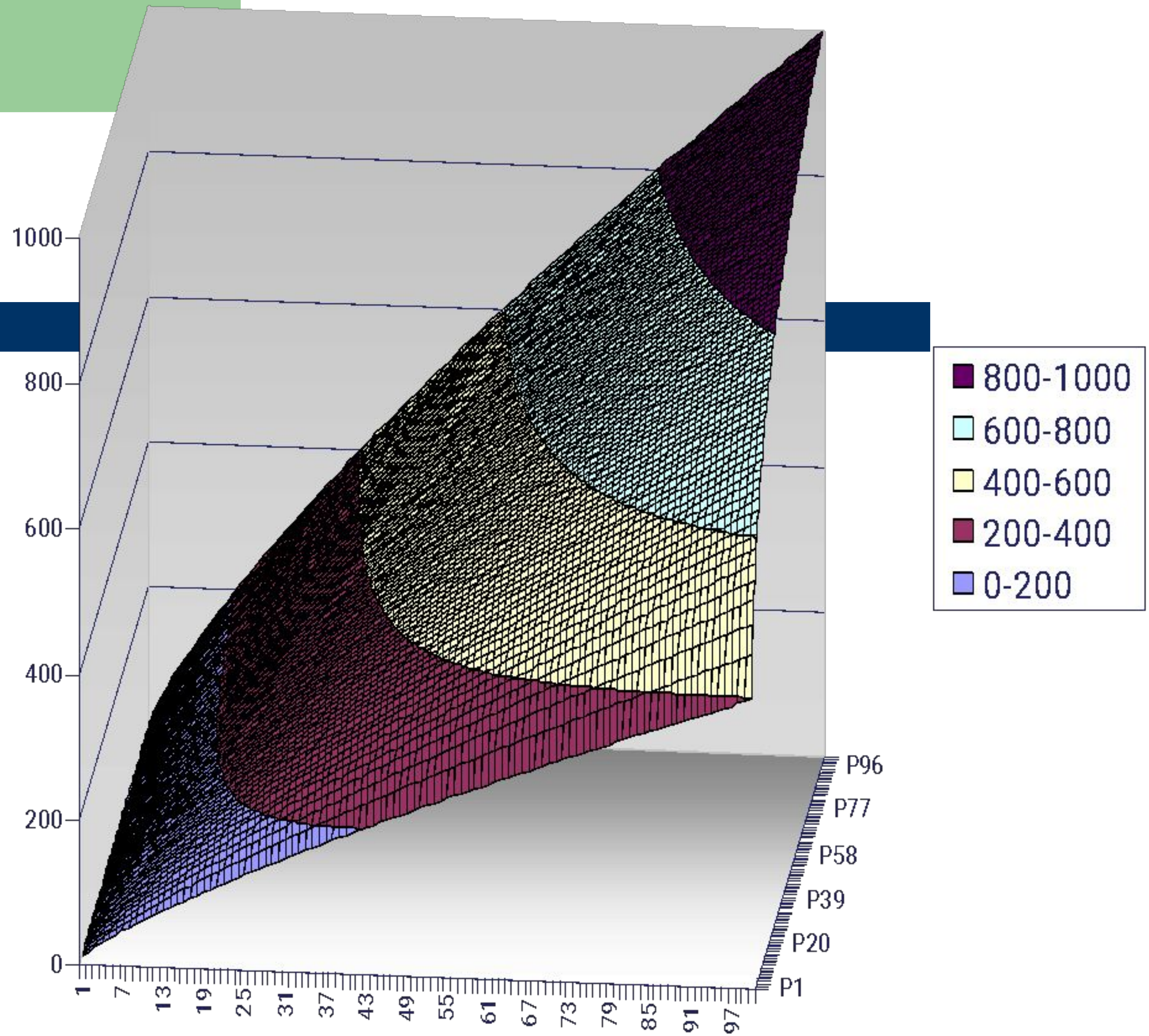
3) Найдем вторую производную функции (*)

$$y'' = \beta \cdot \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \cdot \left(-\frac{1}{1-\alpha}\right) \cdot x^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}} \quad \text{или} \quad y'' = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)^2} \cdot x^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}} > 0.$$

Следовательно, функция (*) вогнута на всей области определения.

4) Построим схематический график изокванты функции Кобба-Дугласа, пользуясь данными пунктов 2) и 3).





1000
800
600
400
200
0
1 7 13 19 25 31 37 43 49 55 61 67 73 79 85 91 97
P1 P20 P39 P58 P77 P96
800-1000
600-800
400-600
200-400
0-200

Предельные производительности ресурсов.

Теорема. Увеличение затрат y и x приводит к росту выпуска продукции. Кроме того, предельные производительности обоих ресурсов прямо пропорциональны их средним производительностям. При этом коэффициентом пропорциональности служит показатель степени соответствующего ресурса: α для x и $(1-\alpha)$ для y.

Доказательство.

1) Для функции Кобба-Дугласа

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[kx^{\alpha} y^{1-\alpha}\right] = k \cdot y^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x^{\alpha}\right] = k \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot y^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{x} \cdot k \cdot x^{\alpha} y^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{x} \cdot$$

Аналогичным образом рассчитывается $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(1-\alpha)}{y} \cdot f(x,y) > 0$ для $y, x > 0$ и $0 < \alpha < 1$.

Предельные нормы замещения.

Уравнение изокванты производственной функции $z = f(x, y)$ имеет вид $f(x, y) = z_c - const$. Вдоль изокванты $\partial z = \partial z_c = 0$, а значит (по определению дифференциала функции) $\partial z = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = 0$. Отсюда выразим отношения приращений затрат ресурсов и обозначим их γ_{yx} и γ_{xy}:

$$\gamma_{yx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x}{f'_y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{f'_y}{f'_x}.$$

Имеем: $\gamma_{yx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{y}{x}$, аналогично для $\gamma_{xy} = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{x}{y}. \Rightarrow$

Теорема. γ_{xy} прямо пропорционален производительности труда $\frac{y}{x}$; γ_{yx} прямо пропорционален трудоемкости $\frac{x}{y}$.

Показатели эластичности.

Для функции Кобба-Дугласа:

$$E_x = \frac{\partial f}{\partial x} \div \frac{f}{x} = \left(\frac{\alpha}{x} \cdot f\right) \div \frac{f}{x} = \alpha;$$

$$E_y = \frac{\partial f}{\partial y} \div \frac{f}{y} = \left(\frac{1-\alpha}{y} \cdot f\right) \div \frac{f}{y} = 1-\alpha. \Rightarrow$$

Теорема. Показатели степеней α и $(1-\alpha)$ в функции Кобба-Дугласа – это коэффициенты эластичности выпуска по соответствующим ресурсам

Заключение.

Задача, которую я поставил перед собой при написании работы:

1) изложить экономические утверждения
2) сопроводить их математическими выкладками для создания более полной и подробной научной картины по предмету.

<u>Результат.</u> Поставленная цель выполнена. Представленная работа представляет из себя ценный методический материал, как по математической науке (практическое применение алгебраических методов), так и по экономической (исследование производственной функции).