Интернет Университет Суперкомпьютерных технологий

Учебный курс

Введение в параллельные алгоритмы

Лекция 4
Сортировка данных с точки зрения МВС (окончание)

Якобовский М.В., д.ф.-м.н.
Институт математического моделирования РАН, Москва

О С Н О В Н А Я

Расположить в порядке неубывания *N* элементов массива чисел, используя *p* процессоров

Ц Е Л Ь

Две задачи сортировки массива чисел

A. Объём оперативной памяти одного процессорного узла ***достаточен*** для одновременного размещения в ней всех элементов массива

B. Объём оперативной памяти одного процессорного узла ***мал*** для одновременного размещения в ней всех элементов массива

Задача B

- Части массива хранятся на нескольких процессорах
  - Каждая часть массива должна быть упорядочена
  - На процессорах с б**о**льшими номерами должны быть размещены элементы массива с б**о**льшими значениями
    - Правильно $\langle 1,2,3,5 \rangle \quad \langle 5,6,7,7 \rangle \quad \langle 8,8,9 \rangle$
    - Ошибка $\langle 1,2,3,5 \rangle \quad \langle 5,7,6,7 \rangle \quad \langle 8,8,9 \rangle$
    - Ошибка $\langle 1,2,3,5 \rangle \quad \langle 5,6,7,8 \rangle \quad \langle 7,8,9 \rangle$

$$N = 11$$
$$p = 3$$

Задача В

- Будем рассматривать только процесс упорядочивания элементов:
  – Перед началом сортировки на каждом из процессоров уже есть часть элементов массива
  – После окончания сортировки на каждом из процессоров должно остаться столько элементов, сколько их было в начале (но, это уже могут быть другие элементы, расположенные ранее на других процессорах)

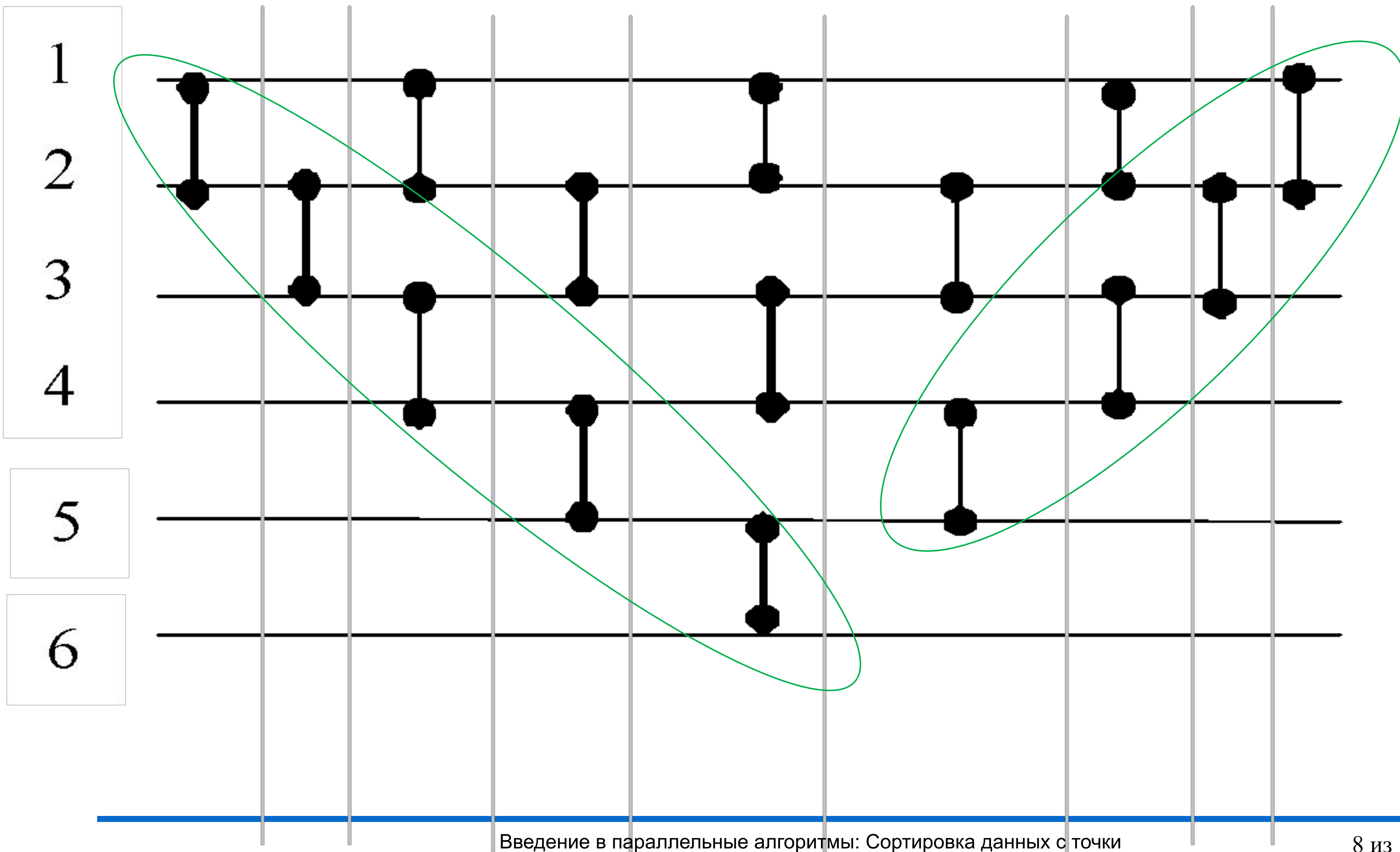
Этапы сортировки

- Упорядочивание фрагментов массива на каждом из процессоров
- Перераспределение элементов массива между процессорами с сохранением упорядоченности массива на каждом отдельном процессоре

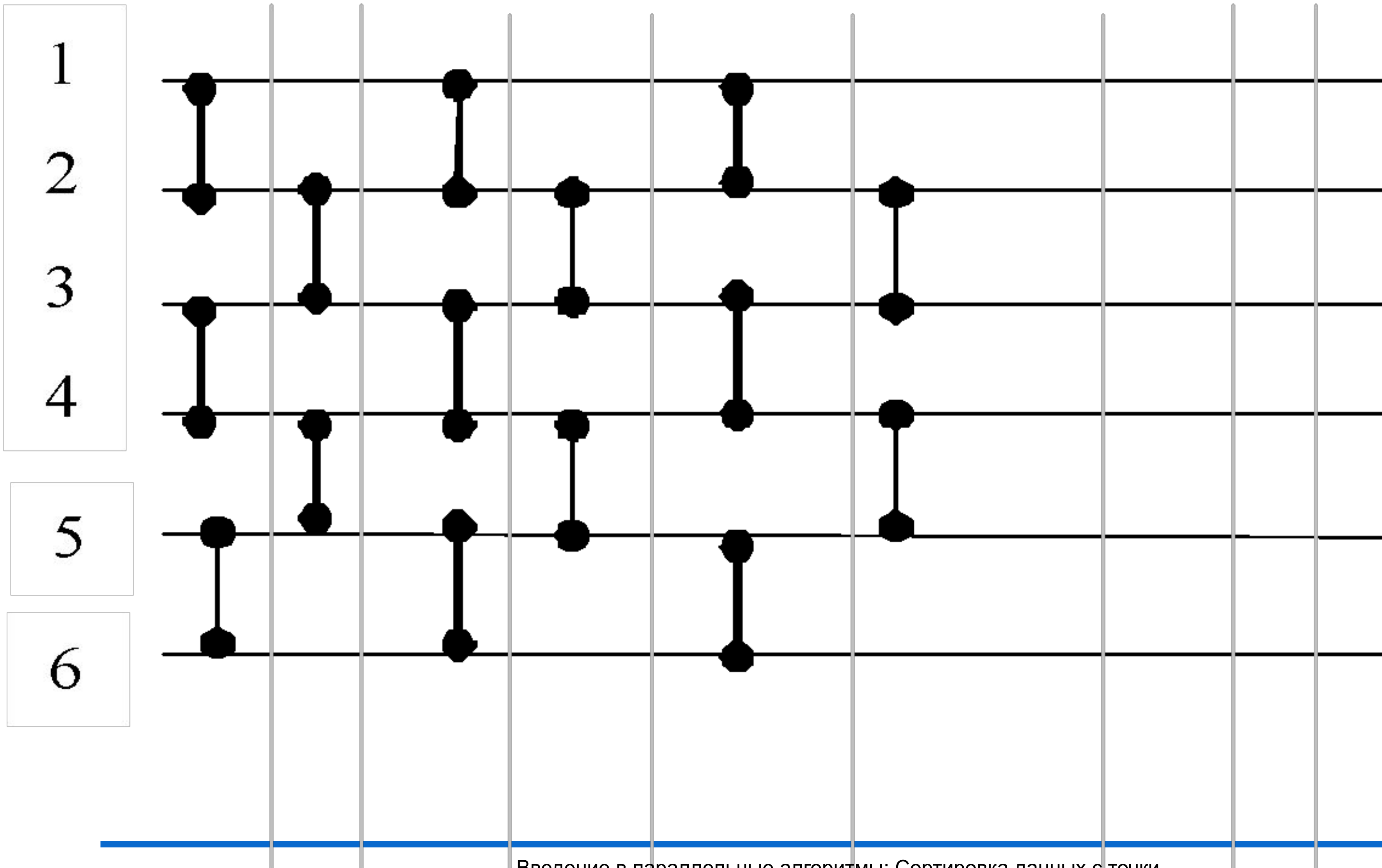
Стратегия перераспределения данных между процессорами

?

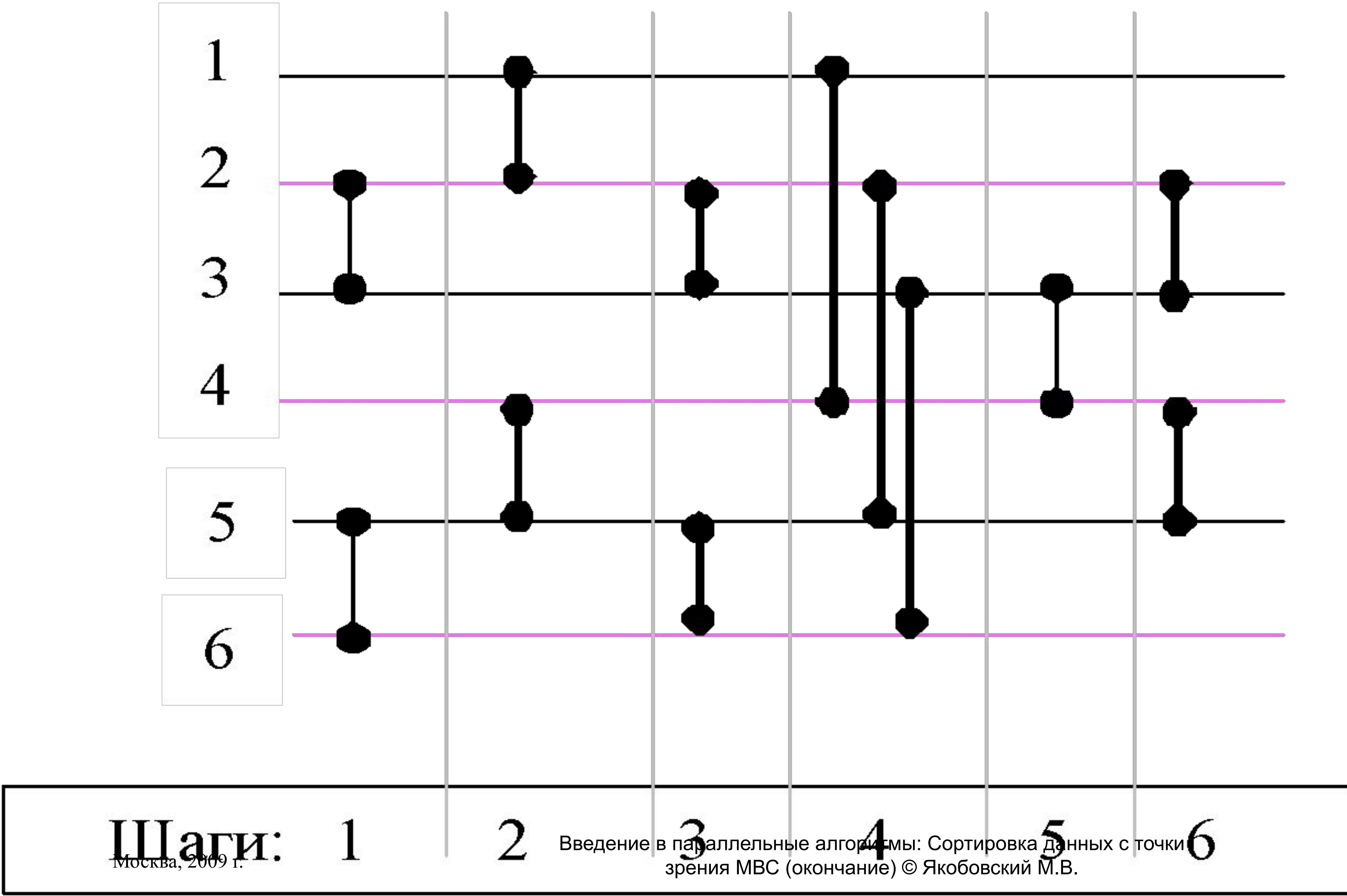
Сеть сортировки (пузырёк) $n=6$ $s=2n-3=9$



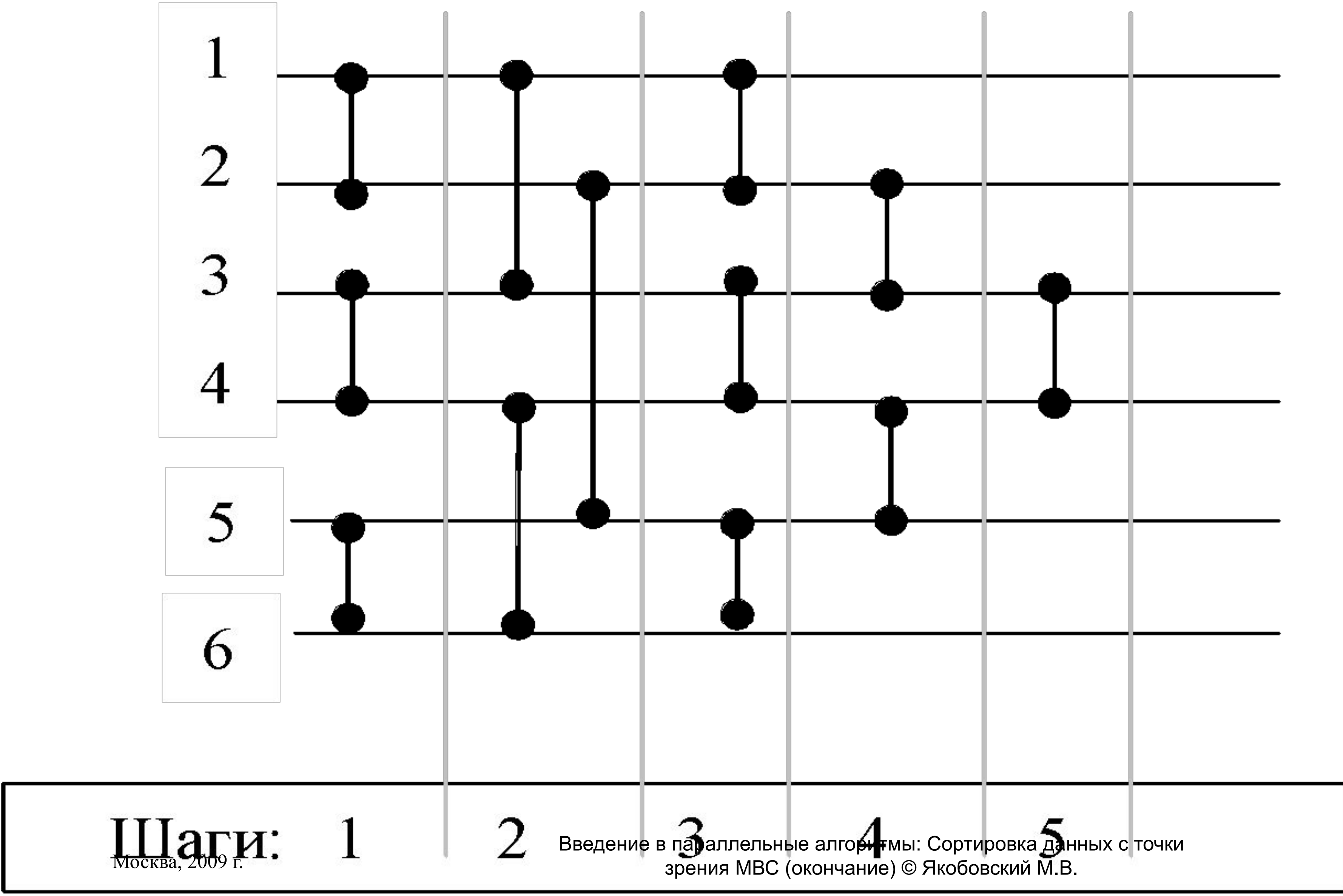
Сеть сортировки четно-нечетные перестановки *n*=6 *s*=*n*=6



Сеть сортировки n=6 s=?=5



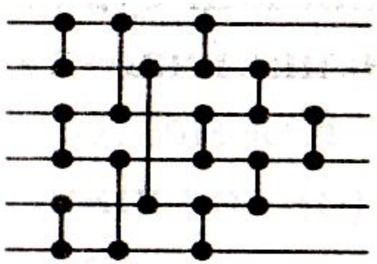
Минимальная сеть сортировки n=6 s=?=5



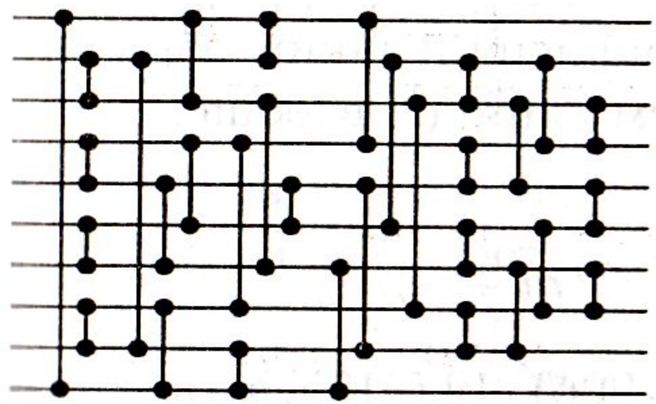
Минимальные сети сортировки

[Дональд Э.Кнут]

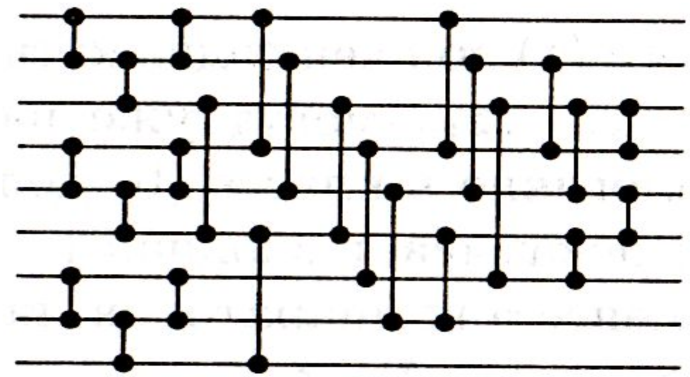
n=6 s=5



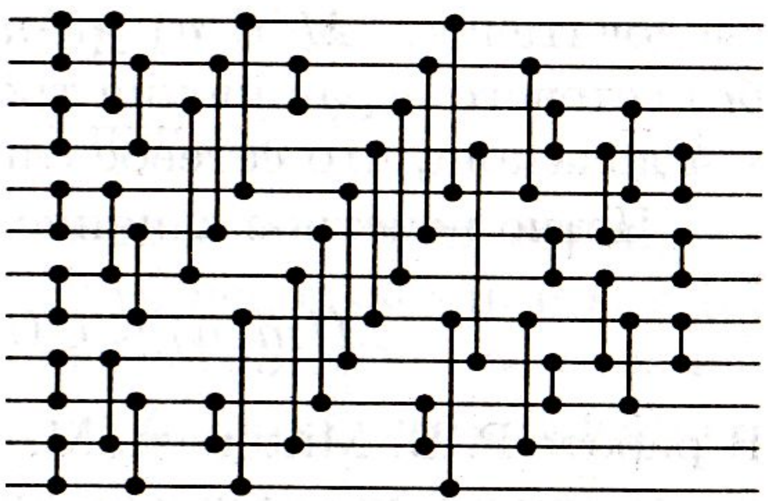
n=10 s=7



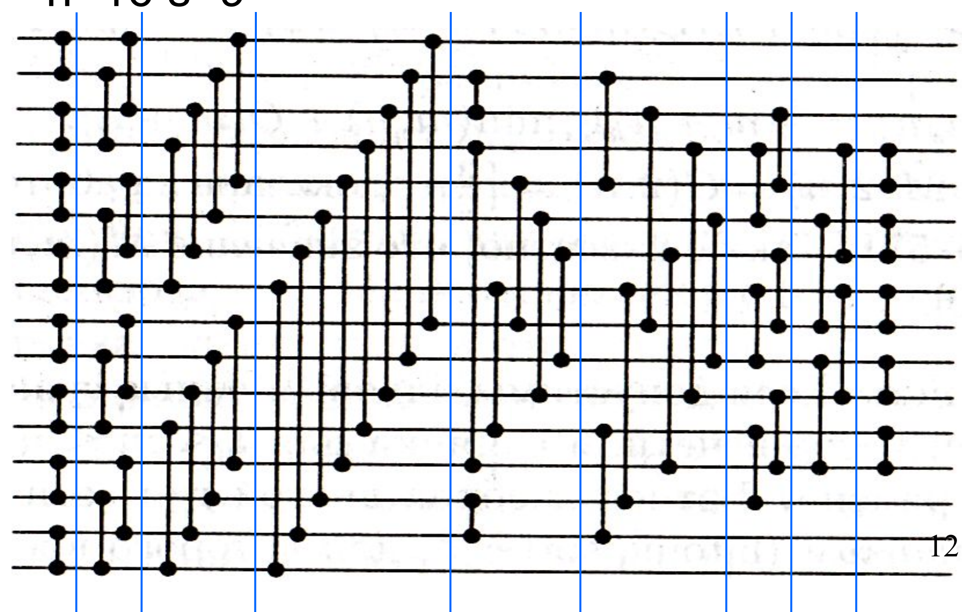
n=9 s=8



n=12 s=8



n=16 s=9



Четно-нечетное слияние Бэтчера

Объединение двух упорядоченных массивов размера m и n: <x[1]…x[m]> и <y[1]…y[n]> .

a) Если m=0 или n=0, то сеть пуста

b) m=n=1, то нужен один компаратор.

c) Если mn>1, то

сольём нечетные элементы последовательностей
<x[1], x[3] …x[(m+1)/2-1]> и <y[1], y[3] …y[(n+1)/2-1]>, и получим
<v[1], v[2] …v[(n+1)/2+(m+1)/2-2]>

Сольём четные элементы последовательностей
<x[2], x[4] …x[m/2]> и <y[2], y[4] …y[n/2]>, и получим
<w[2], w[2] …w[n/2+m/2]>

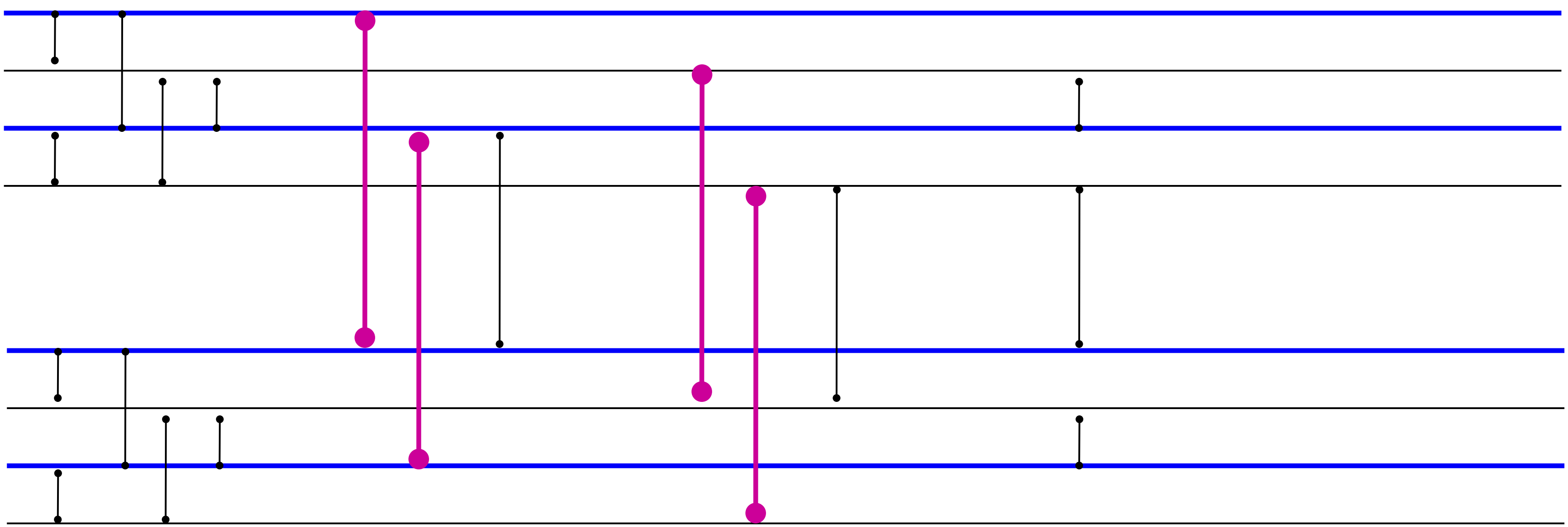
Применим операции сравнения перестановки к элементам
(w1,v2), (w2,v3), (w3,v4), …

И получим отсортированный массив <v[1], w[1], v[2], w[3], …>

Правильность сети

- Доказать правильность можно на основе принципа нулей и единиц:
  - Если сеть с n входами сортирует в порядке неубывания все 2^n последовательности из 0 и 1, то она будет сортировать в том же порядке любую последовательность n чисел.

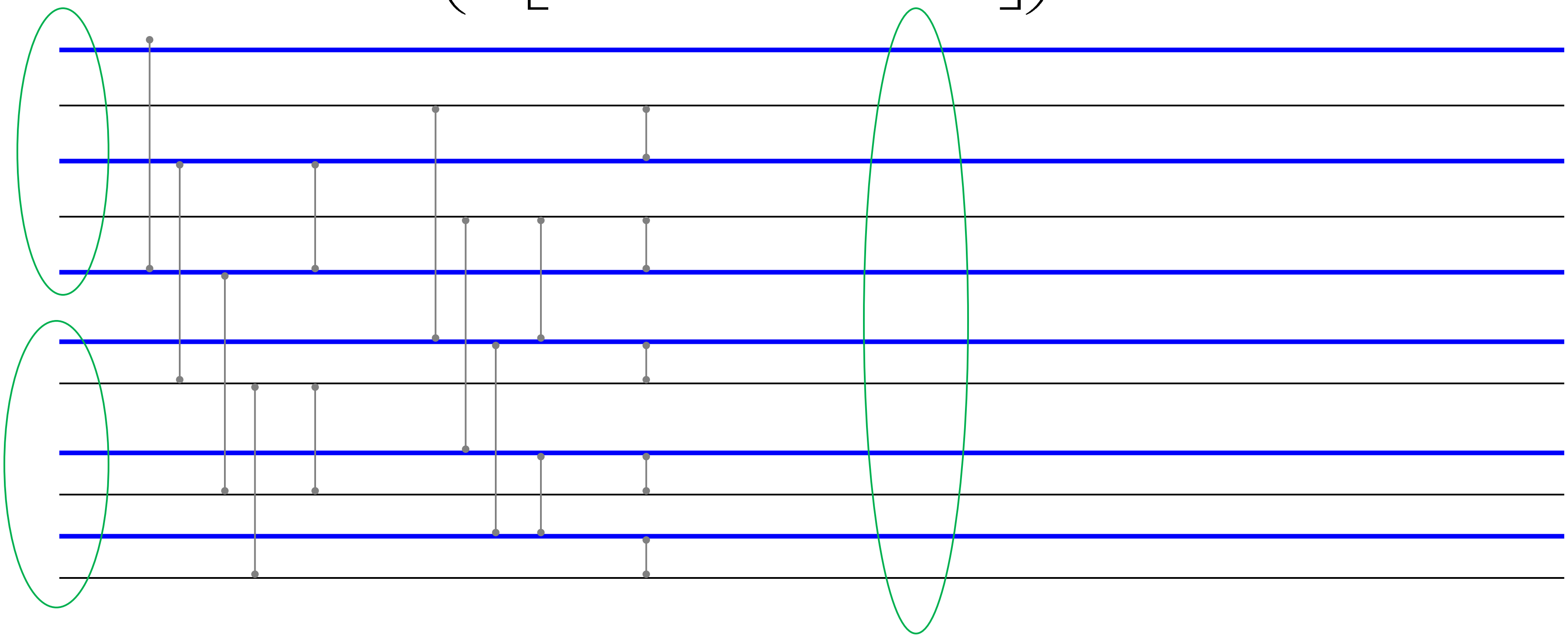
Сортировка 8ми элементов



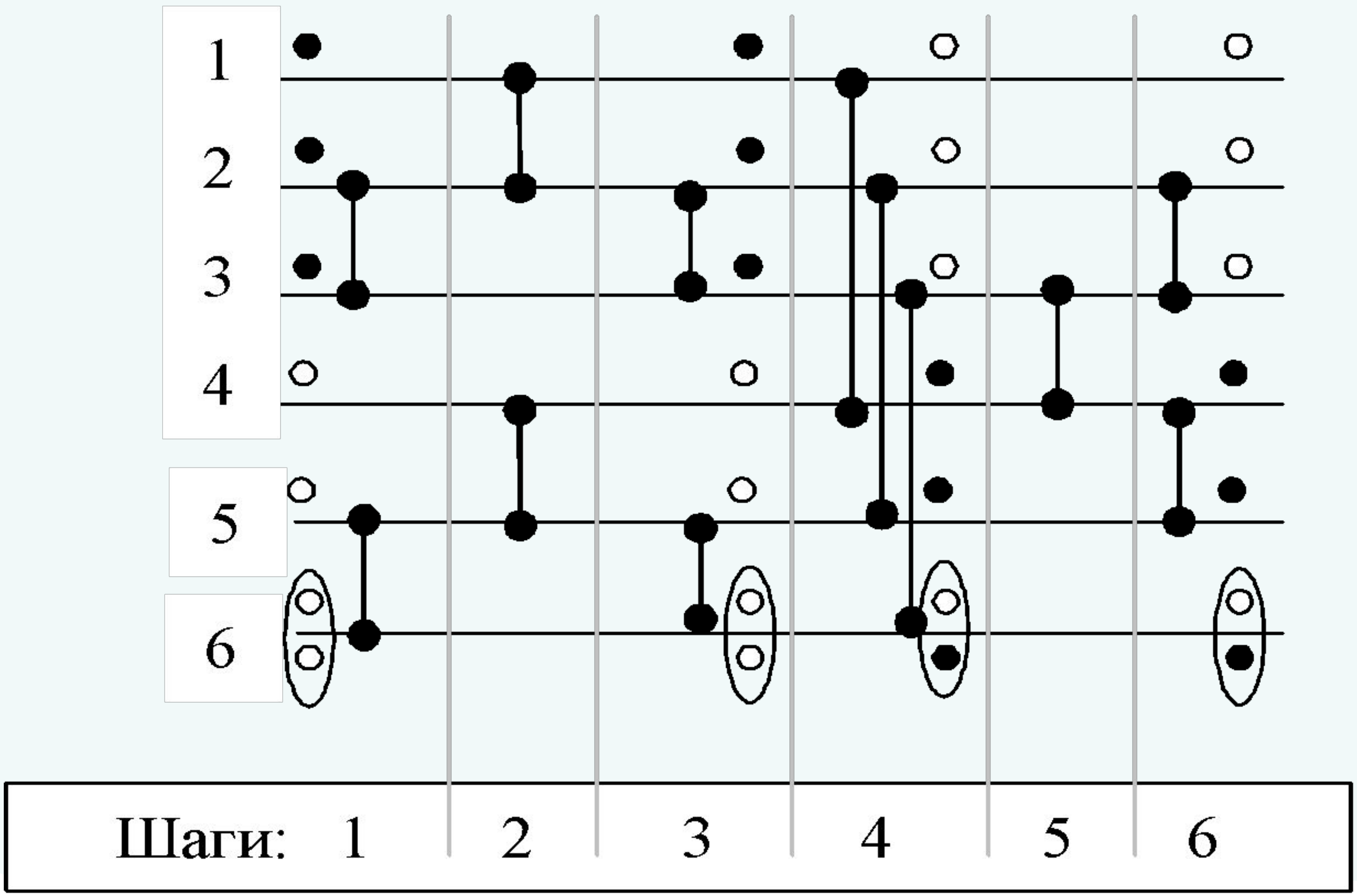
Обменная сортировка со слиянием

$$O\left(\frac{n}{p}\left[\log_2 \frac{n}{p} + \frac{\lceil \log_2 p \rceil^2}{2}\right]\right)$$

[Бэтчер]



Сортировка блоков – ОДИНАКОВОГО РАЗМЕРА



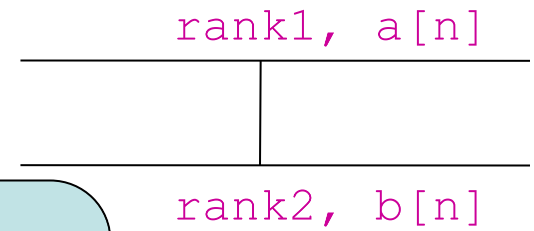
Сравнение алгоритмов сортировки

Алгоритм сортировки	Среднее число операций
Пирамидальная	$O(n \log_2 n)$
Слияние	$O(n \log_2 n)$
Параллельная сортировка методом сдваивания. Объём данных ограничен оперативной памятью вычислительного узла	$O\left(\frac{n}{p}\log_2\left(\frac{n}{p}\right)+n\right)$ $T \approx k_c \frac{n}{p}\log_2\left(\frac{n}{p}\right)+2k_c n+k_s n$
Параллельная четно-нечетная сортировка Объём данных ограничен общей оперативной памятью	$O\left(\frac{n}{p}\log_2\frac{n}{p}+n\right)$ $T = k_c \frac{n}{p}\log_2\left(\frac{n}{p}\right)+(k_c+k_s)n$
Параллельная «обменная сортировка со слиянием»	$O\left(\frac{n}{p}\log_2\frac{n}{p}+\frac{n}{p}\frac{\lceil\log_2 p\rceil^2}{2}\right)$

Слияние упорядоченных фрагментов

```
// объединить два упорядоченных массива a,b

for(ia=0,ib=0,k=0;k<n1+n2;k++)
   {
   if(ia>=n1) c[k]=b[ib++];
   else
   if(ib>=n2) c[k]=a[ia++];
   else
   if(a[ia]<b[ib]) c[k]=a[ia++];
   else            c[k]=b[ib++];
   }
```

Слияние упорядоченных фрагментов

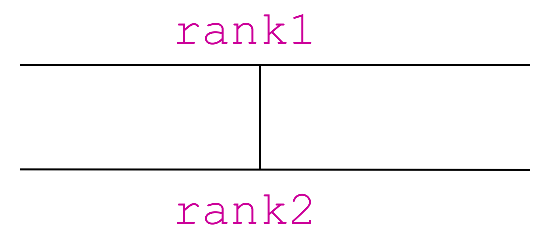



```
for(ia=0,ib=0,k=0;k<n;k++)
   {
   if(ia>=n1) c[k]=b[ib++];
   else
   if(ib>=n2) c[k]=a[ia++];
   else
   if(a[ia]<b[ib]) c[k]=a[ia++];
   else            c[k]=b[ib++];
   }
```

```
// n – число элементов в каждом из массивов a,b
```

Слияние упорядоченных фрагментов

```
Join(int *a, int *b, int *c, int n,rank1,rank2)
{
if(rank==rank1)
    for(ia=0,ib=0,k=0;k<n;)
        {
        if(a[ia]<b[ib]) c[k++]=a[ia++];
        else            c[k++]=b[ib++];
        }
else
    for(ia=n-1,ib=n-1,k=n-1;k>=0;)
        {
        if(a[ia]>b[ib]) c[k--]=a[ia--];
        else            c[k--]=b[ib--];
        }
}
```



Реализация компаратора слияния

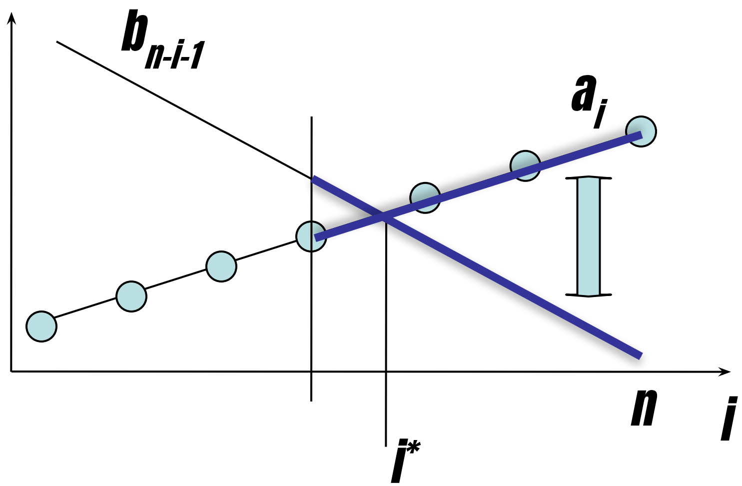
```
// взаимодействие процессоров rank и rankC
int *a,*b,*c,*tmp;
ASend(a,n,rankC);
ARecv(b,n,rankC);
ASync();

Join(a,b,c,n,min(rank,rankC),max(rank,rankC));

tmp=a;
a=c;
c=tmp;
```

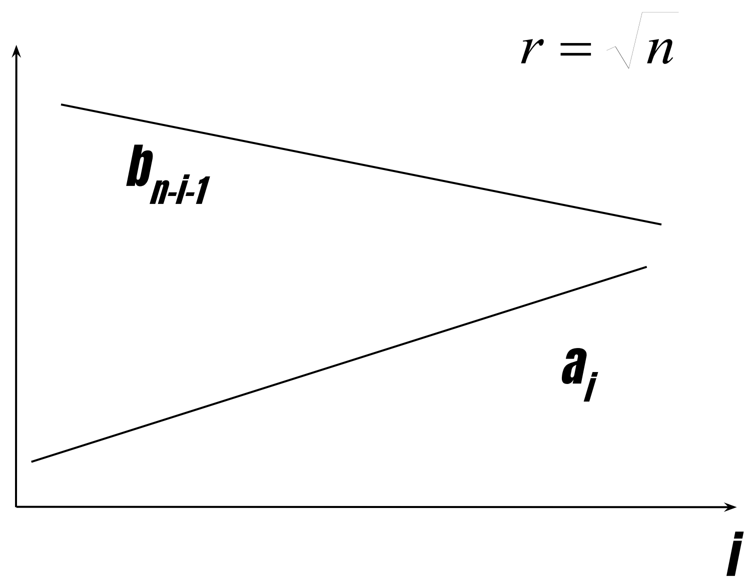
Сокращение объема передаваемых данных

- Каждое выполнение компаратора слияния требует передачи *n* элементов, даже если элементы уже расположены правильно
- На процессоре с меньшим номером подготовим массив, содержащий *r+1* элемент массива *a* с номерами

$$j\frac{n}{r},\quad j = 0 \ldots n$$

- и передадим его на процессор с большим номером





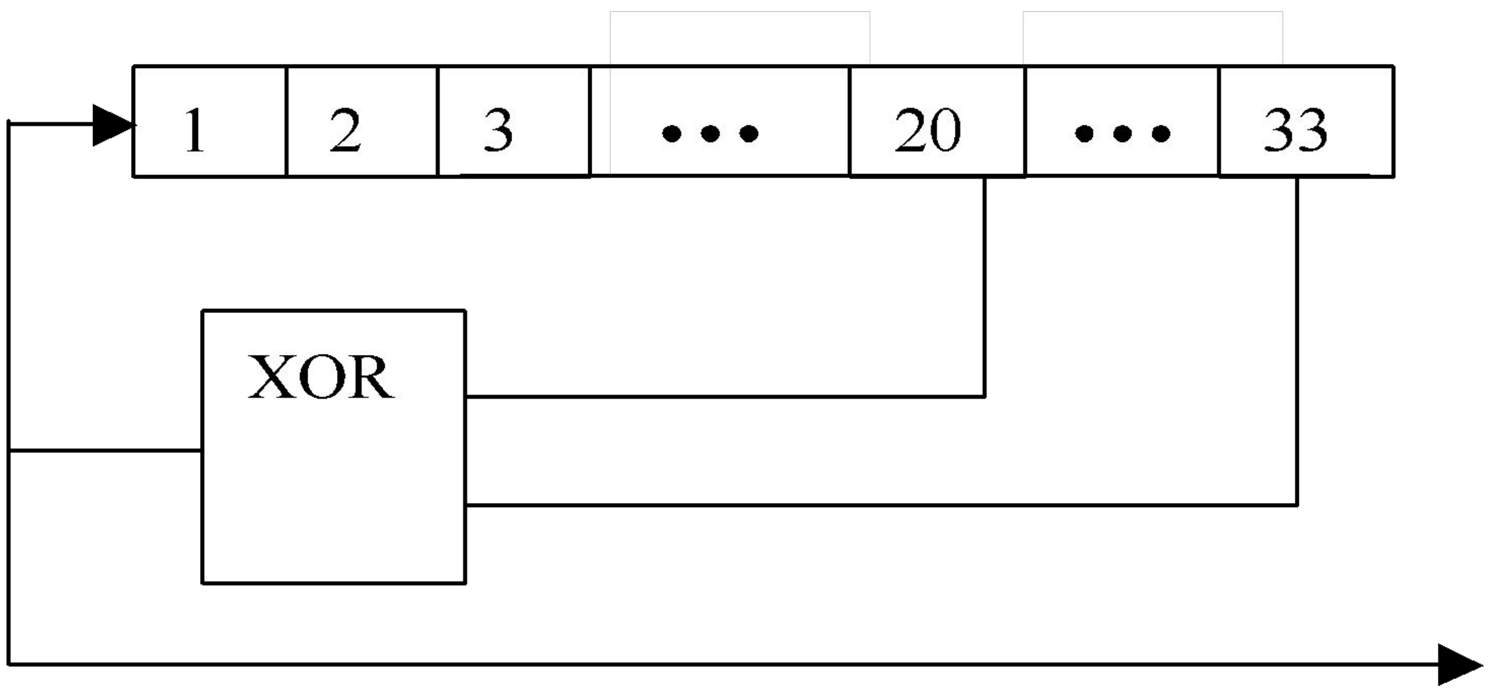
n=10^8

$$E^{\max}(n,p)=\frac{\log_2 n}{\log_2 n + s_p - \log_2 p} \approx \frac{1}{1+\log_n p(\log_2 p-1)/2}$$

P	*T,сек*	*E*	*S*	E^{max}	S^{max}	s_p
1	83.51	100.00%	1.00	100%	1.0	0
2	46.40	90.00%	1.80	100%	2.0	1
3	35.93	77.48%	2.32	95%	2.8	3
4	29.68	70.35%	2.81	96%	3.9	3
5	24.45	68.33%	3.42	91%	4.5	5
6	22.16	62.80%	3.77	92%	5.5	5
7	21.82	54.67%	3.83	89%	6.2	6
8	19.95	52.32%	4.19	90%	7.2	6
16	12.36	42.22%	6.75	82%	13.1	10
27	9.32	33.20%	8.97	74%	20.0	14
32	7.85	33.24%	10.64	73%	23.3	15
48	6.45	26.97%	12.95	66%	31.9	19
64	4.92	26.53%	16.98	64%	40.9	21
128	3.19	20.47%	26.20	56%	71.5	28
192	2.52	17.29%	33.19	51%	98.2	33
256	1.99	16.41%	42.02	49%	124.6	36
384	1.63	13.33%	51.20	49%	187.0	41
512	1.29	12.64%	64.74	42%	217.4	45
640	1.21	10.78%	69.02	41%	264.7	47

$$s_p \approx \frac{\lceil \log_2 p \rceil \left(\lceil \log_2 p \rceil + 1 \right)}{2}$$

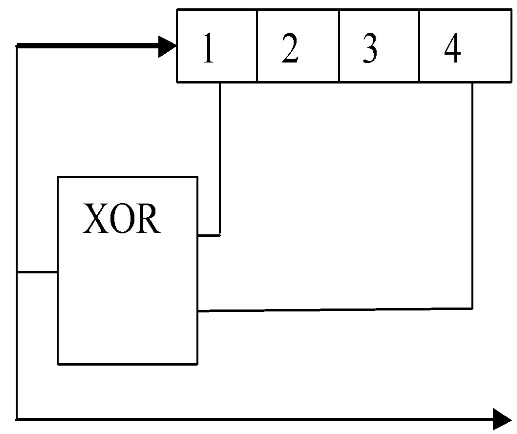
Генерация псевдослучайных чисел



Генерация псевдослучайных чисел

ABCD
D=C
C=B
B=A
A=(A+D)mod2

		A	B	C	D	(A+D)%2
1	15	1	1	1	1	0
2	14	0	1	1	1	1
3	13	1	0	1	1	0
4	10	0	1	0	1	1
5	5	1	0	1	0	1
6	11	1	1	0	1	0
7	6	0	1	1	0	0
8	12	0	0	1	1	1
9	9	1	0	0	1	0
10	2	0	1	0	0	0
11	4	0	0	1	0	0
12	8	0	0	0	1	1
13	1	1	0	0	0	1
14	3	1	1	0	0	1
15	7	1	1	1	0	1
16	15	1	1	1	1	0



Заключение

- Рассмотрен ряд, основанных на сетях методов параллельной сортировки массивов
- Рассмотрен вопрос оптимизации выполнения слияния на компараторе слияния
- Рассмотрен вопрос сокращения числа шагов и объема передаваемых данных

Список литературы

1. *Дональд Э.Кнут*. Искусство программирования, т.3. Сортировка и поиск 2-е изд.: Пер. с английского – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.
2. *Седжвик Роберт*. Фундаментальные алгоритмы на C++. Анализ/Структуры данных/Сортировка/Поиск: Пер. с англ./Роберт Седжвик. - СПб.: ООО "ДиаСофтЮП", 2002.-688с.
3. *Якобовский М.В.* Параллельные алгоритмы сортировки больших объемов данных. Москва, 2008, http://lira.imamod.ru/FondProgramm/Sort/ParallelSort.pdf

Контакты

Якобовский М.В.

д.ф.-м.н.,

зав. сектором

«Программного обеспечения многопроцессорных систем и вычислительных сетей»

Института математического моделирования

Российской академии наук

mail: mail: lira@imamod.rumail: lira@imamod.ru

web: web: http://lira.imamod.ru