

Векторы.



Кудиновой Яны 9^аб^ш Класс 2008г.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!!!

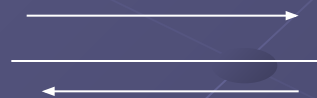
- Многие физические величины, например сила, перемещение материальной точки, скорость, характеризуется не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие физические величины называются векторными величинами(или коротко векторами).
- Рассмотрим пример. Пусть на тело действует сила 8Н. На рисунке силу изображают отрезком со стрелой(рис.1). Стрелка указывает направление силы, а длина отрезка соответствует в набранном масштабе числовому значению силы. Так на(рис.1) сила в 1Н изображена отрезком длиной 0,6 см, поэтому сила в 8Н изображена отрезком длиной 4,8 см.

Рис.1



- Отвлекаясь от конкретных свойств физических векторных величин, мы приходим к геометрическому понятию вектора.
- Рассмотрим произвольный отрезок. Его концы называются также граничными точками отрезка. На отрезке можно указать два направления: от одной граничной точки к другой и наоборот(рис.2). Чтобы выбрать одно из направлений, одну граничную точку отрезка назовем началом отрезка, а другую - концом и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.

Рис.2



Глава 1. Понятие вектора.

- Определение: отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором.
- Любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется нулевым. Начало нулевого вектора совпадает с его концом, на рисунке такой вектор изображается одной точкой. Нулевой вектор обозначается буквой M , то данный нулевой вектор можно обозначить так: \overrightarrow{MM} . Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$.
- Длинной или модулем ненулевого вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB . Длина вектора \overrightarrow{AB} (вектор a) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|a|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}|=0$.

Равенство векторов.

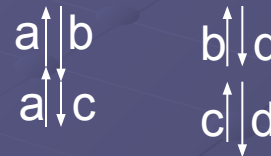
- Коллинеарные вектора – нулевые вектора, лежащие либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

коллинеарные вектора

сонаправленные



противоположно-направленные



сонаправленные



Противоположно-направленные



- Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

$$\vec{a} = \vec{d}, \text{ если}$$

$$1. |\vec{a}| = |\vec{d}|$$

$$2. \vec{a} \uparrow \vec{d}$$

Откладывание вектора от данной точки.

- Если точка A — начало вектора \vec{a} , то говорят, что вектор a отложен от точки A (рис.3). Докажем следующее утверждение:
- От любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору \vec{a} , и притом только один.

В самом деле, если \vec{a} — нулевой вектор, то искомым вектором является вектор \vec{MM} . Допустим, что вектор \vec{a} нулевой, а точки A и B — его начало и конец. Проведем через точку M прямую p , параллельную AB . На прямой p отложим отрезки MN и MN' тот, который сонаправлен с вектором \vec{a} . Из построения следует, что такой вектор только один.

замечание:

● Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой. Так обозначены, например, равные векторы скорости различных точек (рис.4). Иногда про такие вектора говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек.

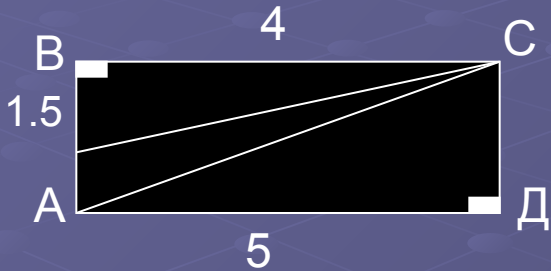
Задачи.

№1. в прямоугольнике ABCD $AB=3\text{см}$, $BC=4\text{см}$, M-середина стороны AB.
Найдите длины векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{MC} , \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{AC} .

РЕШЕНИЕ:

ABCD-прямоугольник.

$AB=3\text{см}$, $BC=4\text{см}$, M-середина AB.



$$|\overrightarrow{AB}|=3\text{см}$$

$$|\overrightarrow{BC}|=4\text{см}$$

$$|\overrightarrow{DC}|=3\text{см}$$

$$|\overrightarrow{MC}|=MC=BC+BM=16+225=\sqrt{18,25}$$

$$|\overrightarrow{MA}|=1.5\text{см}$$

$$|\overrightarrow{CB}|=4\text{см}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=5\text{см}$$

№2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Равны ли векторы: 1) \vec{AB} и \vec{DC} ; 2) \vec{BC} и \vec{DA} ; 3) \vec{AO} и \vec{OC} ; 4) \vec{AC} и \vec{BD} .

РЕШЕНИЕ:

ДАНО:

$ABCD$ -парал.

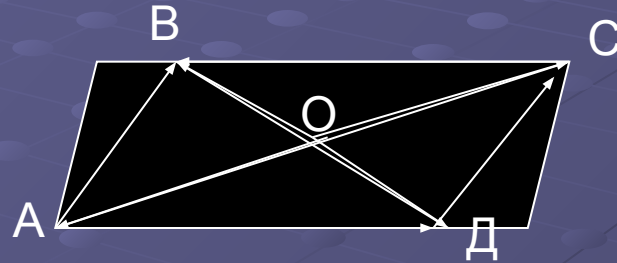
O -точка пересеч. диагоналей.

1) $\vec{AB} = \vec{DC}$

2) $\vec{BC} = \vec{AD}$

3) $\vec{AO} = \vec{OC}$

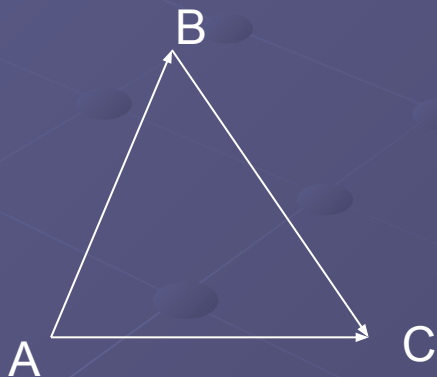
4) $\vec{AC} \neq \vec{BD}$



Сложение и вычитание векторов.

Сумма двух векторов.

- Рассмотрим пример: пусть материальная точка переместилась из точки А в точку В, а затем из точки В в точку С. В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами АВ и ВС, материальная точка переместилась из точки А в точку С. Поэтому это перемещение можно представить вектором АС. Поскольку перемещение из точки А в точку С складывается из перемещения из А в В и перемещения из В в С, то вектор АС естественно называть суммой векторов АВ и ВС: $AC=AB+BC$.



ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Пусть \vec{a} и \vec{b} — два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор \overrightarrow{AB} , равный \vec{a} . Затем от точки B отложим вектор \overrightarrow{BC} , равный \vec{b} . Вектор \overrightarrow{AC} называется суммой векторов \vec{a} и \vec{b} (рис.5).

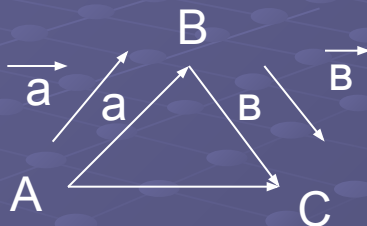
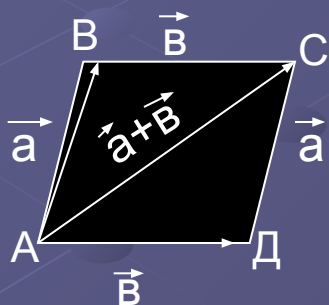


Рис.5

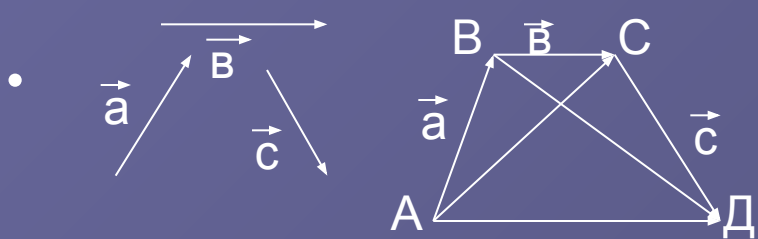
Правило параллелограмма

ТЕОРЕМА: для любых векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} справедливы равенства:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон).
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).



← Переместительный закон



От любой точки А отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, от точки В-отложим вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а от точки С-вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

Применяя правило треугольника, получим:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

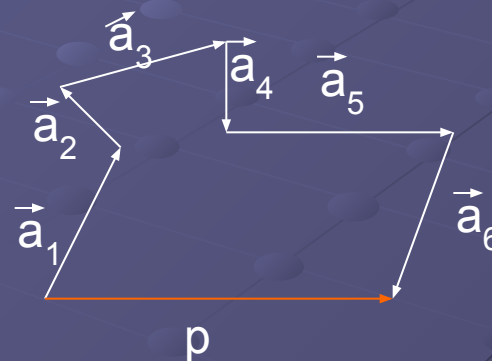
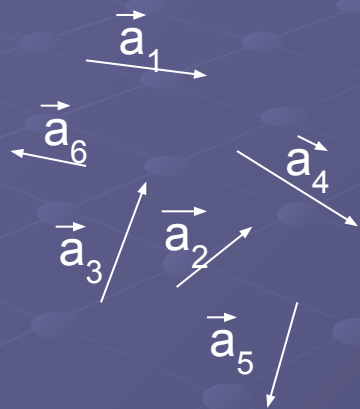
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}. \text{ Отсюда следует, что}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН

ПРАВИЛО МНОГОУГОЛЬНИКА

- Правило многоугольника можно сформулировать также следующим способом: если A_1, A_2, \dots, A_H - произвольные точки плоскости, то $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{H-1}A_H = A_1A_H$. Это равенство справедливо для любых точек A_1, A_2, \dots, A_H , в частности в том случае, когда некоторые из них совпадают. Например, если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору.



$$p = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 + \vec{a}_6$$

Вычитание векторов.

- Разность векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор, сумма которого с вектором \vec{b} равна вектору \vec{a} .
- Разность векторов \vec{a} и \vec{b} обозначаются так: $\vec{a}-\vec{b}$.
- ТЕОРЕМА: для любых векторов \vec{a} и \vec{b} справедливо равенство $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.
- Доказательство: По определению разности векторов $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$. прибавив к обеим частям этого равенства вектор $(-\vec{b})$, получим

$$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b}), \text{ или}$$

$$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{b}), \text{ откуда}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

теорема доказана.

Практические задания.

- 1. Турист прошел 20км на восток из города А в город В, а потом 30км на восток в город С. Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы \vec{AB} и \vec{BC} . Равны ли векторы $\vec{AB} + \vec{BC}$ и \vec{AC} ?

Решение.

$$\vec{AB} = 20\text{км}$$

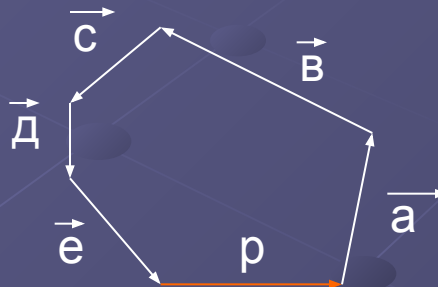
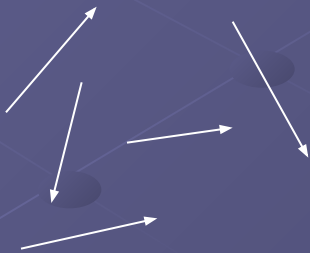
$$\vec{BC} = 30\text{км}$$

$$\vec{AC} = 50\text{км}, \text{ т.е. } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC},$$

получим $\vec{AC} = 20\text{км} + 30\text{км} = 50\text{км}$.

ЗАДАЧА 2.

Начертите попарно неколлинеарные вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ и, пользуясь правилом многоугольника, постройте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$.



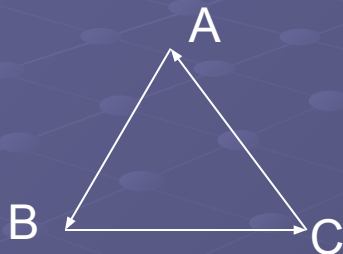
- **Задача 3.** дан треугольник ABC. Выразите через векторы $\vec{a}=\vec{AB}$ и $\vec{v}=\vec{AC}$ следующие векторы: а) \vec{BA} ; в) \vec{CB} ; с) $\vec{CB}+\vec{BA}$.

• РЕШЕНИЕ:

А) векторы \vec{BA} и \vec{AB} -противоположные, поэтому $\vec{BA}=-\vec{AB}$, или $\vec{BA}=-\vec{a}$.

В) по правилу треугольника $\vec{CB}=\vec{CA}+\vec{AB}$. Но $\vec{CA}=-\vec{AC}$, поэтому

$$\vec{CB}=\vec{AB}+(-\vec{AC})=\vec{AB}-\vec{AC}=\vec{a}-\vec{v}.$$



Желаю прекрасных оценок!!!

