Векторы.

Кудиновой Яны 9"б"Класс 2008г.

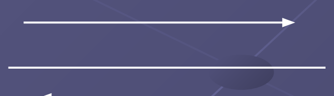
Это интересно!!!

- Многие физические величины, например сила, перемещение материальной точки, скорость, характеризуется не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие физические величины называются векторными величинами(или коротко векторами).
- Рассмотрим пример. Пусть на тело действует сила 8Н. На рисунке силу изображают отрезком со стрелой(рис.1). Стрелка указывает направление силы, а длина отрезка соответствует в набранном масштабе числовому значению силы. Так на(рис.1) сила в 1Н изображена отрезком длиной 0,6 см, поэтому сила в 8Н изображена отрезком длиной 4,8 см.

Рис.1

- Отвлекаясь от конкретных свойств физических векторных величин, мы приходим к геометрическому понятию вектора.
- Рассмотрим произвольный отрезок. Его концы называются также граничными точками отрезка. На отрезке можно указать два направления: от одной граничной точки к другой и наоборот(рис.2). Чтобы выбрать одно из направлений, одну граничную точку отрезка назовем началом отрезка, а другую - концом и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.

Рис.2



Глава 1. Понятие вектора.

- Определение: отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором.
- Любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется нулевым. Начало нулевого вектора совпадает с его концом, на рисунке такой вектор изображается одной точкой. Нулевой вектор обозначается буквой М, то данный нулевой вектор можно обозначить так: $\overrightarrow{MM}$. Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$.
- Длинной или модулем ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка АВ. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$(вектор $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}|=0$.

Равенство векторов.

- *<u>Коллинеарные вектора</u> – нулевые вектора, лежащие либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.*

коллинеарные вектора

сонаправленные

$a \uparrow\uparrow d$

$b \uparrow\uparrow c$

противоположно-направленные

$a \uparrow\downarrow b$ $\quad$ $b \uparrow\downarrow d$

$a \uparrow\downarrow c$ $\quad$ $c \uparrow\downarrow d$

сонаправленные

Пртивоположно-направленные

- Векторы называются равными, если они сонаправленны и их длины равны.

$\vec{a} = \vec{d}$,если

1. $|\vec{a}| = |\vec{d}|$

2. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{d}$

Откладывание вектора от данной точки.

- *Если точка А-начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор а отложен от точки А(рис.3).* Докажем следующее утверждение:
- ***<u>От любой точки М можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.</u>***

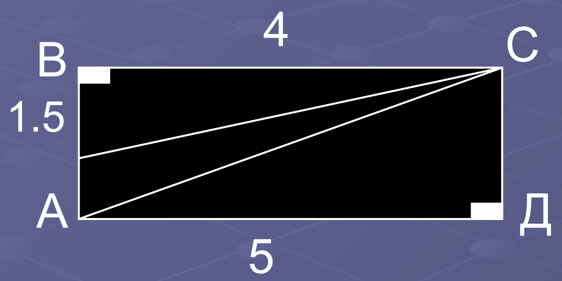
В самом деле, если $\vec{a}$-нулевой вектор, то искомым вектором является вектором $\overrightarrow{MM}$. Допустим, что вектор $\vec{a}$ нулевой, а точки А и В-его начало и конец. Проведем через точку М прямую р, параллельную АВ. На прямой р отложим отрезки MN и MN‘ тот, которой сонаправлен с вектором $\vec{a}$. Из построения следует, что такой вектор только один.

<u>замечание:</u>

- *Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой. Так обозначены, например, равные векторы скорости различных точек (рис.4). Иногда про такие вектора говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек.*

Задачки.

№1. в прямоугольнике АВСД АВ=3см, ВС=4см, М-середина стороны АВ. Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{\text{ДС}}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{\text{СД}}$, $\overrightarrow{AC}$.



РЕШЕНИЕ:

АВСД-прямоугольник.

АВ=3см, ВС=4см, М-середина АВ.

$|\overrightarrow{AB}|$=3см

$|\overrightarrow{BC}|$=4см

$|\overrightarrow{\text{ДС}}|$=3см

$|\overrightarrow{MC}|$=MC=BC+BM=16+225=√18,25

$|\overrightarrow{MA}|$=1.5см

$|\overrightarrow{CB}|$=4см

$|\overrightarrow{AC}|$=5см

№2.В параллелограмме АВСД диагонали пересекаются в точке О.Равны ли векторы:1)$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{\text{ДC}}$; 2)$\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{\text{ДA}}$; 3)$\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; 4)$\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{\text{BД}}$.

РЕШЕНИЕ:

ДАНО:

АВСД-парал.

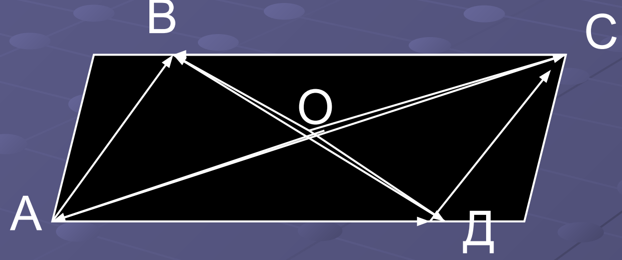
О-точка пересеч.диагоналей.

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\text{ДC}}$

2)$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\text{AД}}$

3)$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$

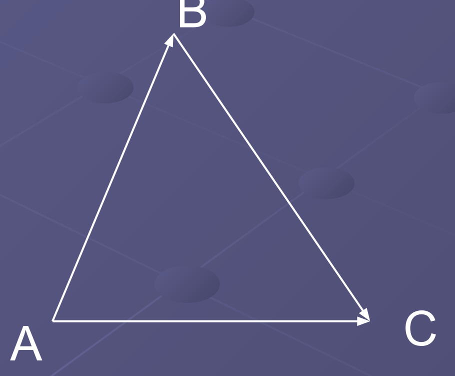
4)$\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{\text{BД}}$



Сложение и вычитание векторов.

Сумма двух векторов.

- Рассмотрим пример: пусть материальная точка переместилась из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C. В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами AB и BC, материальная точка переместилась из точки A в точку C. Поэтому это перемещение можно представить вектором AC. Поскольку перемещение из точки A в точку C складывается из перемещения из A в B и перемещения из B в C, то вектор AC естественно называть суммой векторов AB и BC:AC=AB+BC.



ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{в}$-два вектора. Отметим произвольную точку А и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки В отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{в}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$(рис.5).

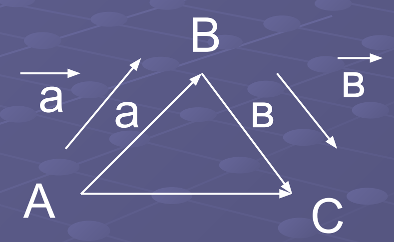
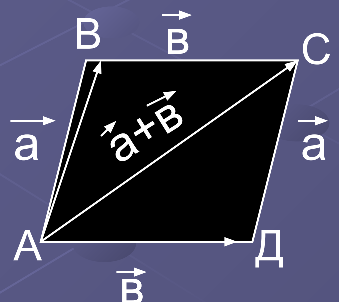


Рис.5

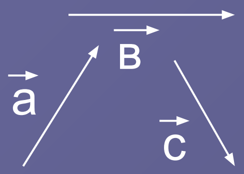
Правило параллелограмма

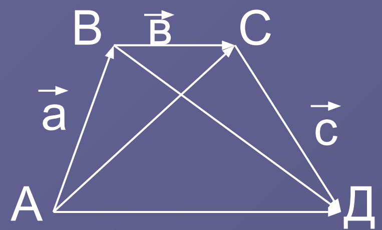
ТЕОРЕМА: для любых векторов $\vec{a}$,$\vec{в}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

1. $\vec{a}+\vec{в}=\vec{в}+\vec{a}$ (переместительный закон).
2. $(\vec{a}+\vec{в})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{в}+\vec{c})$ (сочетательный закон).



Переместительный закон





От любой точки А отложим вектор $\overrightarrow{АВ}=\vec{а}$, от точки В-отложим вектор $\overrightarrow{ВС}=\vec{в}$, а от точки С-вектор $\overrightarrow{СД}=\vec{с}$. Применяя правило треугольника, получим:

$(\vec{а}+\vec{в})+\vec{с}=(\overrightarrow{АВ}+\overrightarrow{ВС})+\overrightarrow{СД}=\overrightarrow{АС}+\overrightarrow{СД}=\overrightarrow{АД}$,

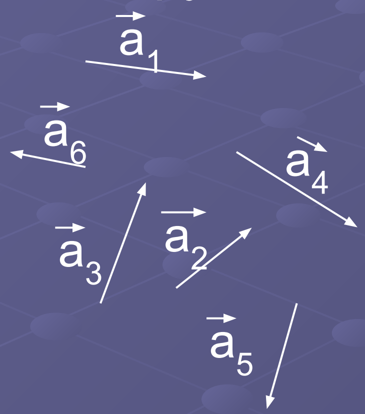
$\vec{а}+(\vec{в}+\vec{с})=\overrightarrow{АВ}+(\overrightarrow{ВС}+\overrightarrow{СД})=\overrightarrow{АВ}+\overrightarrow{ВД}=\overrightarrow{АД}$. Отсюда следует, что

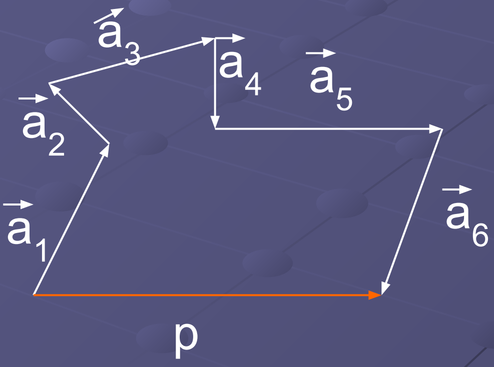
$(\vec{а}+\vec{в})+\vec{с}=\vec{а}+(\vec{в}+\vec{с})$.

СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН

ПРАВИЛО МНОГОУГОЛЬНИКА

- Правило многоугольника можно сформулировать также следующим способом:если $A_1, A_2, \ldots, A_{\text{Н}}$-произвольные точки плоскости, то $A_1A_2 + A_3A_2 + \ldots + A_{\text{Н-1}} = A_1A_{\text{Н}}$.Это равенство справедливо для любых точек $A_1, A_2, \ldots, A_{\text{Н}}$, в частности в том случае, когда некоторые из них совпадают. Например, если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору.





$p = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

Вычитание векторов.

- Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{в}$ равна вектору $\vec{a}$.
- Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ обозначаются так: $\vec{a}-\vec{в}$.
- ТЕОРЕМА: для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ справедливо равенство $\vec{a}-\vec{в}=\vec{a}+(-\vec{в})$.
- Доказательство: По определению разности векторов $(\vec{a}-\vec{в})+\vec{в}=\vec{a}$. прибавив к обеим частям этого равенства вектор $(-\vec{в})$, получим

$$(\vec{a}-\vec{в})+\vec{в}+(-\vec{в})=\vec{a}+(-\vec{в}),\text{или}$$

$$(\vec{a}-\vec{в})+\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{в}),\text{откуда}$$

$$\vec{a}-\vec{в}=\vec{a}+(-\vec{в}).$$

теорема доказана.

Практические задания.

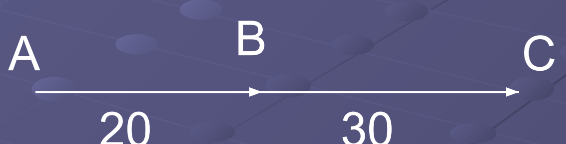
- 1.Турист прошел 20км на восток из города А в город В, а потом 30км на восток в город С. Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$?
- Решение.

$\overrightarrow{AB}$=20км

$\overrightarrow{BC}$=30км

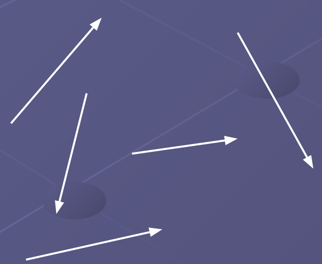
$\overrightarrow{AC}$=50км, т.е $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,

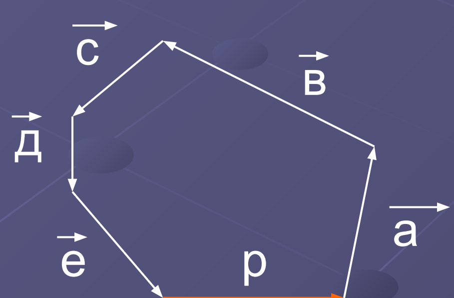
получим $\overrightarrow{AC}$=20км+30км=50км.



ЗАДАЧА 2.

Начертите попарно неколлинеарные вектора $\vec{a},\vec{в},\vec{c},\vec{д},\vec{e}$ и, пользуясь правилом многоугольника, постройте вектор $\overrightarrow{a+в+c+д+e}$.



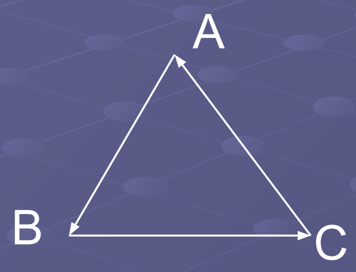


- ***Задача 3***. дан треугольник АВС. Выразите через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{в}=\overrightarrow{AC}$ следующие векторы: а)$\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CB}$; с)$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$.
- РЕШЕНИЕ:

А)векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$-противоположные, поэтому $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$.

В) по правилу треугольника $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Но $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, поэтому

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{в}.$$



Желаю прекрасных оценок!!!