

САБИНСКИЙ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ РАЙОН
МОУ «Гимназия» п.г.т. Б. Сабы

**Презентация к
методической разработке для
спецкурса:
«Обратные тригонометрические
функции»
(10-11 кл.).**

Учитель математики
Сафина Гулсина Миннехановна

2010 г

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

1. Уравнения, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями.

Пример. Решить уравнение.

$$\arcsin(3x^2 - 4x - 1) = \arcsin(x + 1)$$

Решение.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 1 = x + 1 \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x - 1 = x + 1 \\ -1 \leq x + 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{3} \\ -2 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Ответ. $x = -\frac{1}{3}$

**Уравнения, левая и правая части которых являются
разноименными обратными тригонометрическими функциями.**

Пример. Решить уравнение

$$\arccos \frac{7x+5}{13} = \arcsin \frac{4x+1}{13}$$

Решение:

$$\arccos \frac{7x+5}{13} = \arcsin \frac{4x+1}{13} \Leftrightarrow \left(\frac{7x+5}{13}\right)^2 + \left(\frac{4x+1}{13}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 65x^2 + 78x - 143 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{143}{65} \end{cases}$$

Корень $x = -\frac{143}{65}$ является посторонним

Ответ. $\{1\}$

Замена переменной.

Пример. Решить уравнение

$$\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$$

Решение.

Данное уравнение равносильно следующему:

$$\arcsin x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) = \frac{\pi^2}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 \arcsin^2 x - 9\pi \arcsin x + \pi^2 = 0$$

Пусть $\arcsin x = t$ $|t| \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда $18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

Поэтому $\begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{3} \\ \arcsin x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ответ. $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций.

Пример. Решить уравнение

$$2 \arcsin 2x = 3 \arccos x$$

Решение. Функция $y=2\arcsin 2x$ является монотонно возрастающей, а функция $y=3\arccos x$ монотонно убывающей.

Число $x=0,5$ является, очевидно, корнем данного уравнения.

В силу теоремы 2 этот корень – единственный.

Ответ. $\{0,5\}$

Уравнения, сводимые к алгебраическим и тригонометрическим уравнениям.

Пример 7. Решить уравнение
 $\arccos(3x - 4) = 2 \operatorname{arctg}(5 - 3x)$

Решение. Пусть

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(5 - 3x) = \alpha \\ \arccos(3x - 4) = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 5 - 3x \\ \cos 2\alpha = 3x - 4 \end{cases}$$

Сложив уравнения этой системы, получим тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg} \alpha + \cos 2\alpha = 5 - 3x + 3x - 4$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \cos 2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 0$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \sin^2 \alpha = 0$$

$$\sin \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 2 \sin \alpha \right) = 0$$

$$\sin \alpha = 0$$

$$\alpha_1 = \pi h, h \in Z$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} - 2 \sin \alpha = 0$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 1$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$\alpha_1 = 0 \in [0; \pi], \alpha_2 = \frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$$

Найти x

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad & \arccos(3x - 4) = 0 \\ & 3x - 4 = \cos 0 \\ & 3x - 4 = 1 \\ & 3x = 5 \\ & x = \frac{5}{3} \in \text{ОДЗ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\pi}{4} \quad & \arccos(3x - 4) = \frac{\pi}{2} \\ & 3x - 4 = \cos \frac{\pi}{2} \\ & 3x - 4 = 0 \\ & 3x = 4 \\ & x = \frac{4}{3} \in \text{ОДЗ} \end{aligned}$$

Ответ. $\left\{ \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right\}$