САБИНСКИЙ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ РАЙОН
МОУ «Гимназия» п.г.т. Б. Сабы

Презентация к методической разработке для спецкурса: «Обратные тригонометрические функции» (10-11 кл.).

Учитель математики
Сафина Гулсина Миннехановна

2010 г

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

1. Уравнения, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями.

Пример. Решить уравнение.

$$\arcsin(3x^2-4x-1)=\arcsin(x+1)$$

.

Решение.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2-4x-1=x+1 \\ |x+1|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x-1=x+1 \\ -1\le x+1\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ -2\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

.

Ответ. $x=-\frac{1}{3}$

Уравнения, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями.

Пример. Решить уравнение

$$\arccos\frac{7x+5}{13}=\arcsin\frac{4x+1}{13}$$

Решение:

$$\arccos\frac{7x+5}{13}=\arcsin\frac{4x+1}{13} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{7x+5}{13}\right)^2+\left(\frac{4x+1}{13}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow\quad 65x^2+78x-143=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{143}{65} \end{array}\right.$$

Корень $x=-\frac{143}{65}$ является посторонним

.

Ответ. $\{1\}$

Замена переменной.

Пример. Решить уравнение

$$\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$$

Решение.

Данное уравнение равносильно следующему:

.

$$\arcsin x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{\pi^2}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18\arcsin^2 x - 9\pi \arcsin x + \pi^2 = 0$$

Пусть $\arcsin x = t$ $\quad |t| \le \frac{\pi}{2}.$ Тогда $18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{6} \end{array}\right.$

Поэтому $\left[\begin{array}{l} \arcsin x = \frac{\pi}{3} \\ \arcsin x = \frac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Ответ. $\left\{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

.

Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций.

Пример. Решить уравнение

$$2\arcsin 2x = 3\arccos x$$

Решение. Функция *y=2arcsin 2x* является монотонно возрастающей,

а функция *y=3arccosx* монотонно убывающей.

Число *x=0,5* является, очевидно, корнем данного уравнения.

В силу теоремы 2 этот корень – единственный.

Ответ. $\{0{,}5\}$

Уравнения, сводимые к алгебраическим и тригонометрическим уравнениям.

Пример 7. Решить уравнение

$$\arccos(3x-4)=2arctg(5-3x)$$

Решение. Пусть

$$\begin{matrix} arctg(5-3x)=\alpha \\ \arccos(3x-4)=2\alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} tg\alpha=5-3x \\ \cos 2\alpha=3x-4 \end{cases}$$

Сложив уравнения этой системы, получим тригонометрическое уравнение

$$tg\alpha+\cos 2\alpha=5-3x+3x-4$$

$$tg\alpha+\cos 2\alpha=1$$

$$tg\alpha=1-\cos 2\alpha$$

$$tg\alpha=2\sin^2\alpha$$

$$tg\alpha-2\sin^2\alpha=0$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\sin^2\alpha=0$$

$$\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha}-2\sin\alpha\right)=0$$

$$\sin\alpha=0$$

$$\alpha_1=\pi h, h\in Z$$

$$\frac{1}{\cos\alpha}-2\sin\alpha=0$$

$$1-2\sin\alpha\cos\alpha=0$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 1$$
$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$
$$\alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$
$$\alpha_1 = 0 \in [0;\pi], \alpha_2 = \frac{\pi}{4} \in [0;\pi]$$

Найти *x*

$$\alpha = 0$$

$$\arccos(3x-4) = 0$$
$$3x - 4 = \cos 0$$
$$3x - 4 = 1$$
$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3} \in ОДЗ$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos(3x-4) = \frac{\pi}{2}$$
$$3x - 4 = \cos\frac{\pi}{2}$$
$$3x - 4 = 0$$
$$3x = 4$$
$$x = \frac{4}{3} \in ОДЗ$$

Ответ. $\left\{\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right\}$