Тема урока: «Логарифмическая функция и ее приложения»

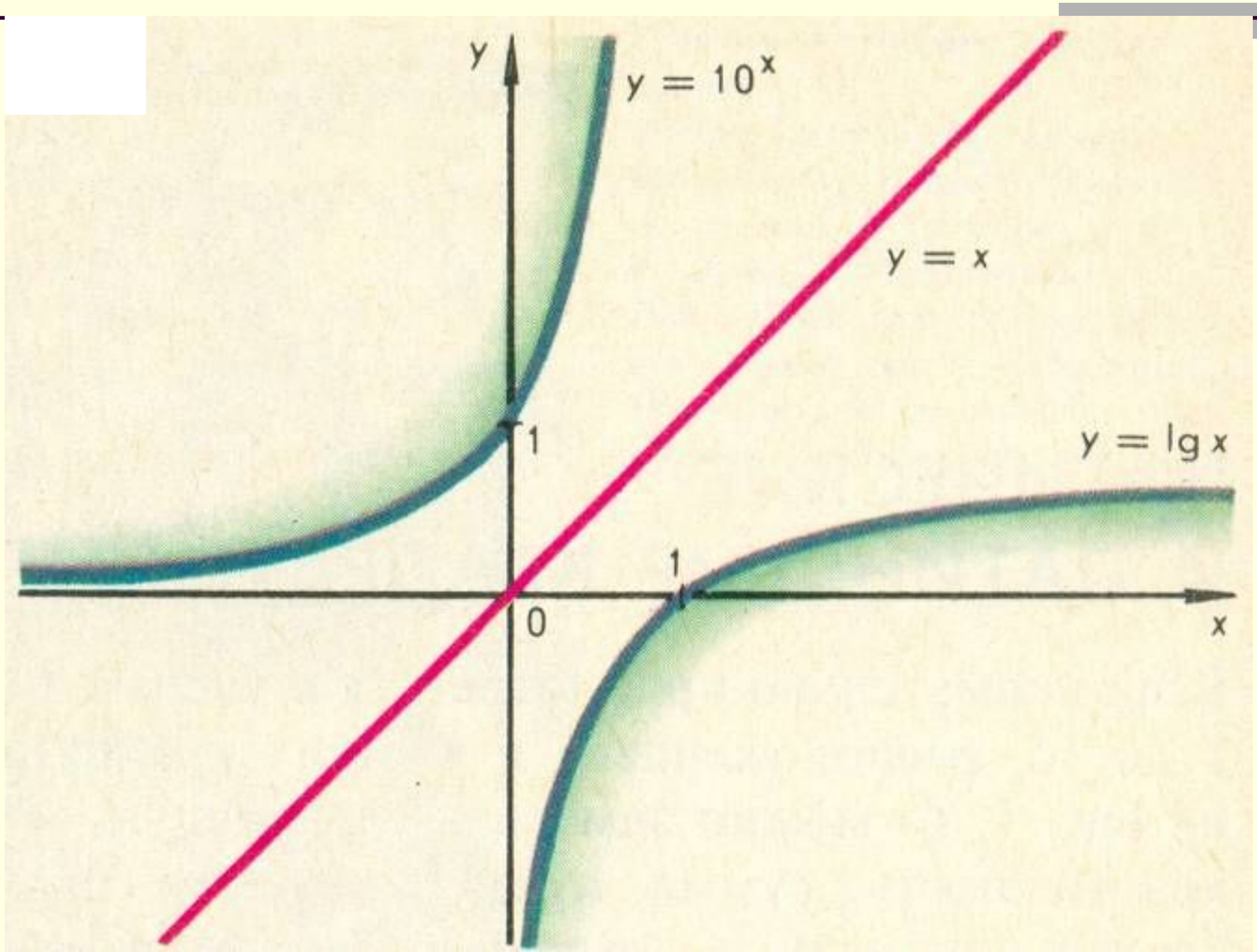
Потому-то словно пена,
Опадают наши рифмы.
И величие степенно
Отступает в логарифмы.

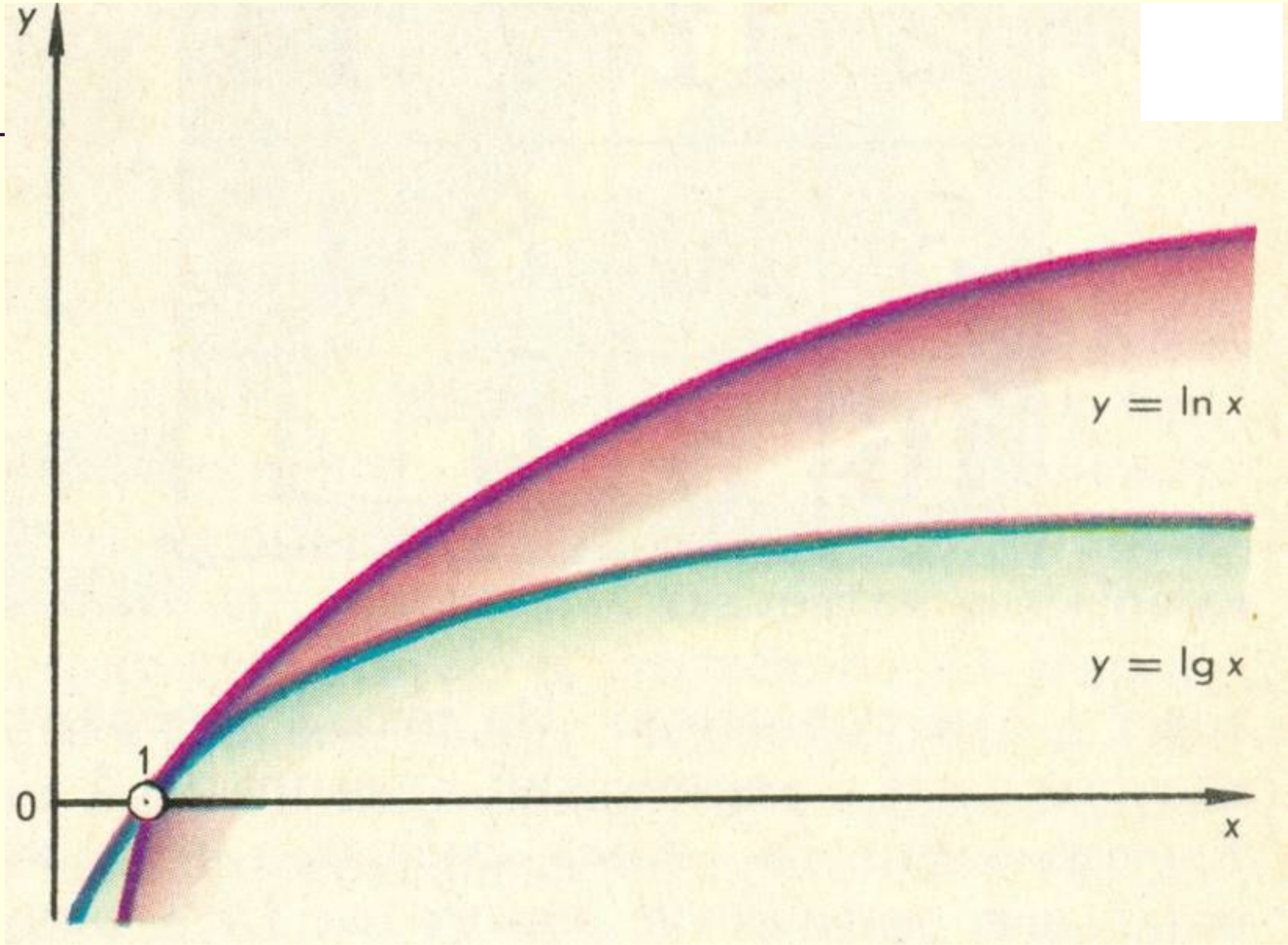
Борис Слуцкий

Цель урока:

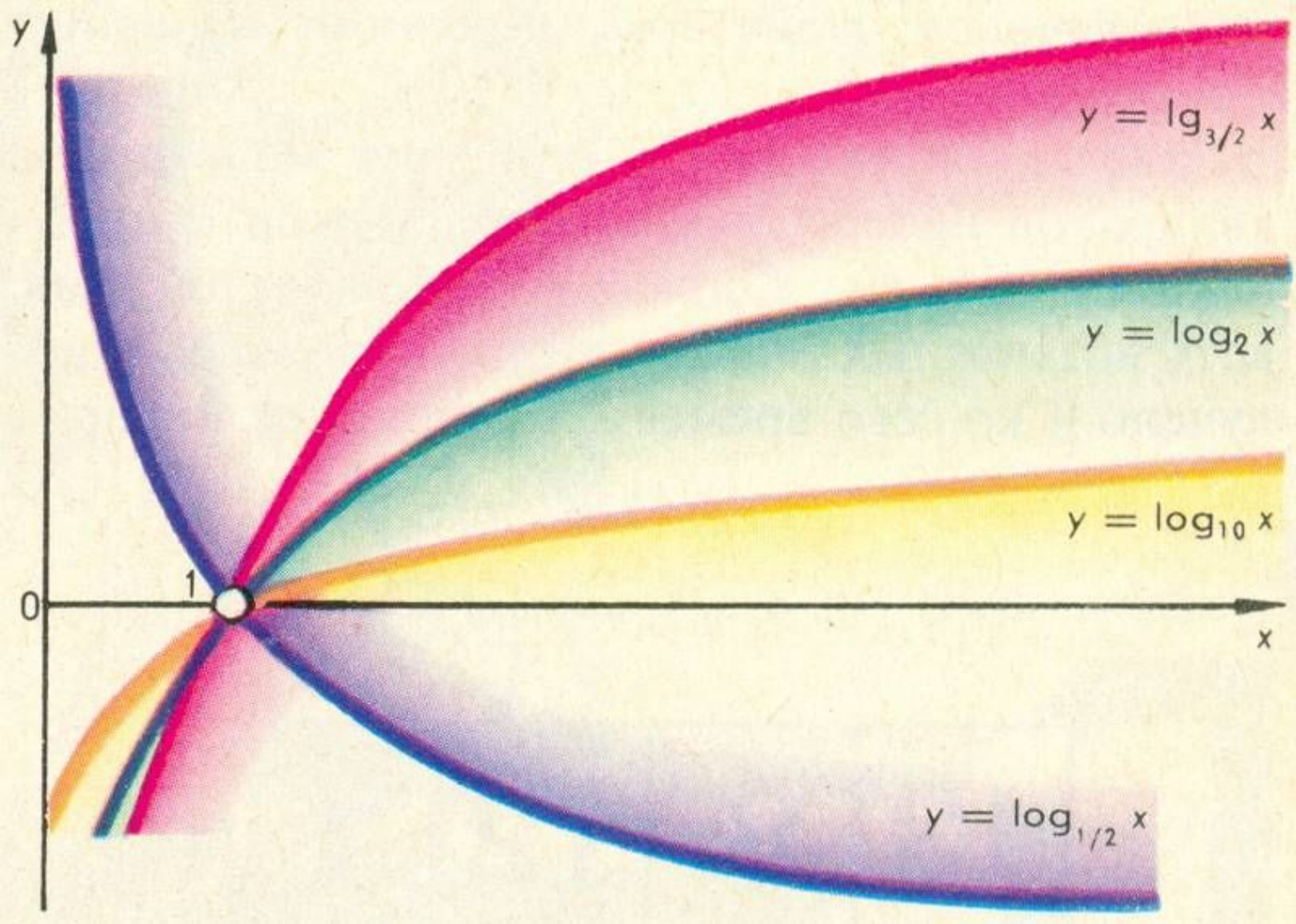
- расширять представления учащихся о логарифмической функции, применении ее свойств в нестандартных ситуациях;
- развивать интерес к истории математики и ее практическим приложениям, логическое мышление и математическую грамотность речи;
- воспитывать познавательную активность, чувство ответственности, культуру общения и диалога.

$$y = \log_a x, \quad x>0, \quad a>0, \quad a \neq 1$$





y
y = ln x
y = lg x
1
0
x



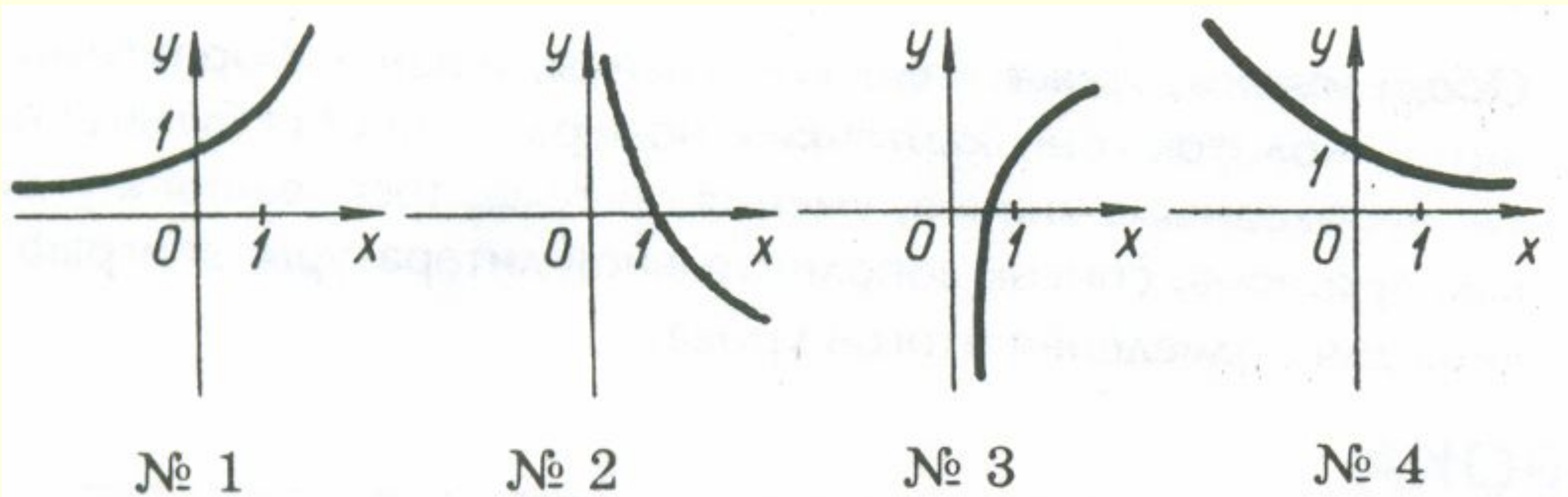
y
$y = \lg_{3/2} x$
$y = \log_2 x$
$y = \log_{10} x$
1
0
x
$y = \log_{1/2} x$

Из указанных функций назовите логарифмическую

$$y = 4x, \quad y = \log_5 25 + x^2, \quad y = \ln (x + 2),$$

$$y = 2{,}5^x, \; y = \log_5 125 + \frac{5}{x}.$$

Какой график является графиком функции $y = \log_{0,4} x$?



Ответ: №2

Совпадают ли графики функций? Ответ обоснуйте.

$f(x) = x + 1$ и $g(x) = 2^{\log_2(x+1)}$?

1. Да. 2. Нет.

Ответ: 2. Нет

При каких значениях x имеет смысл выражение:

$$\log_{0,5}(\log_2 x)?$$

1. При любом значении x.
2. При положительном значении x.
3. При $x > 1$.
4. При $0 < x < 1$.

Ответ: При *$x>1$*

Найти область определения функции $y = \log_2(5 - 3x)$

1. $\left(-1\frac{2}{3};\infty\right)$. 2. $\left(-\infty;-1\frac{2}{3}\right)$. 3. $\left(1\frac{2}{3};\infty\right)$. 4. $\left(-\infty;1\frac{2}{3}\right)$.

Ответ: №4

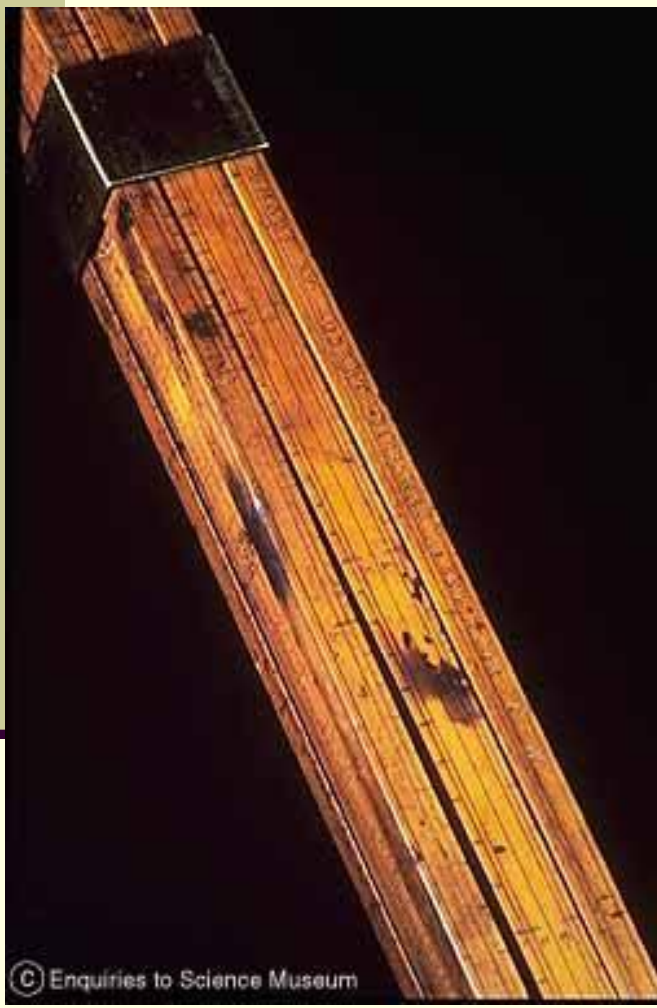

Решение уравнений
История возникновения
Логарифмическая спираль
Применение логарифмов
Софизм
Звезды, шум и логарифмы
Логарифм в музыке
Решение неравенств

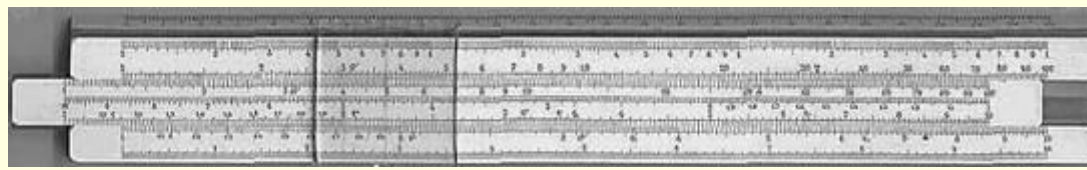
Джон Непер

(1550 г.— 4 апреля 1617г.)

- Шотландский математик - изобретатель логарифмов.
- В 1590-х годах пришел к идее логарифмических вычислений и составил первые таблицы логарифмов, однако свой знаменитый труд “Описание удивительных таблиц логарифмов” опубликовал лишь в 1614 году.
- Ему принадлежит определение логарифмов, объяснение их свойств, таблицы логарифмов синусов, косинусов, тангенсов и приложения логарифмов в сферической тригонометрии.

Музей логарифмических линеек





Логарифмы в музыке

«… Даже изящные искусства питаются ею
Разве музыкальная гамма не есть -
Набор передовых логарифмов?»

Из «Оды экспоненте»

А.А. Эйхенвальд

Частоту любого звука можно выразить формулой

Ноте «до» соответствует частота, равная n колебаниям в секунду.

В октаве частота колебаний нижнего звука в 2 раза меньше верхнего.

Тогда ноте «до» 1-й октавы будут соответствовать $2n$ колебания в секунду, а ноте «до» 3-й октавы - $n \cdot 2^m$ колебания в секунду и т.д.

Обозначим все ноты хроматической гаммы номерами p.

$$N_{pm} = n \cdot 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)^p$$

Логарифмируя эту формулу, получаем

$$\lg N_{pm} = \lg n + m\lg 2 + p\frac{\lg^2}{12},$$

$$\lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{12}\right)\lg 2.$$

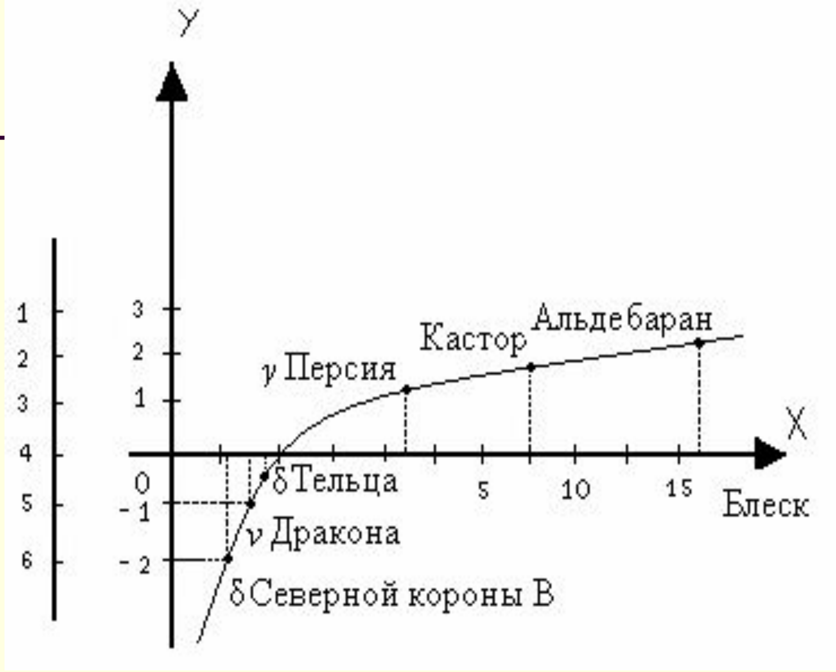
Принимая частоту самого низкого «до» за единицу ***n=1*** и приводя логарифмы к основанию ***2***, имеем

$$\log_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

Задание

Решить уравнение:

Звезды, шум и логарифмы



По вертикальной оси отложим блеск звезд в единицах Гиппарха (распределение звезд по субъективным характеристикам (на глаз) на 6 групп), а на горизонтальной - показания приборов. По графику видно, что объективные и субъективные характеристики не пропорциональны, а прибор регистрирует возрастание блеска не на одну и ту же величину, а в 2,5 раза. Эта зависимость выражается логарифмической функцией.

Логарифм шума

Единица измерения ***decибел*** используется в звуковой технике.

Связано это с тем, что мы реагируем не на абсолютные, а на относительные изменения уровня какого-либо воздействия, в том числе и звукового.

Если сила звука (интенсивность, I, Вт/м2) изменится в 10 раз, то субъективное ощущение громкости — всего лишь на одну ступеньку, при 100-кратном увеличении силы звука — на две (lg100 = 2), при 1000-кратном — на три (lg1000 = 3). Поэтому увеличение или уменьшение силы звука принято измерять в логарифмических единицах, и каждое десятикратное изменение силы звука оценивается единицей, называемой ***Бел* (Б).**

На практике используется в основном **единица, равная десятой части *Бела - децибел.***

Значение в децибелах равно десяти десятичным логарифмам отношения интенсивностей двух сигналов.

Логарифмическая «комедия 2>3»

Комедия начинается с неравенства $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

Затем следует преобразование $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rangle \left(\frac{1}{2}\right)^3,$

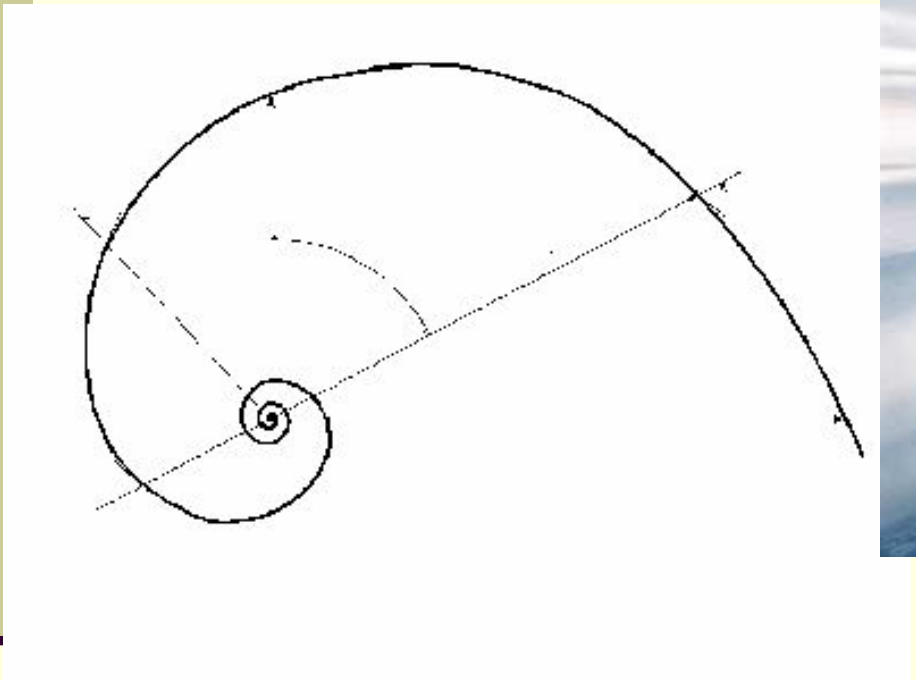
Большему числу соответствует больший логарифм

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rangle \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3, 2\lg\frac{1}{2} \rangle 3\lg\frac{1}{2}.$$

После сокращения на $\lg\frac{1}{2}$ *имеем* $2 \rangle 3$

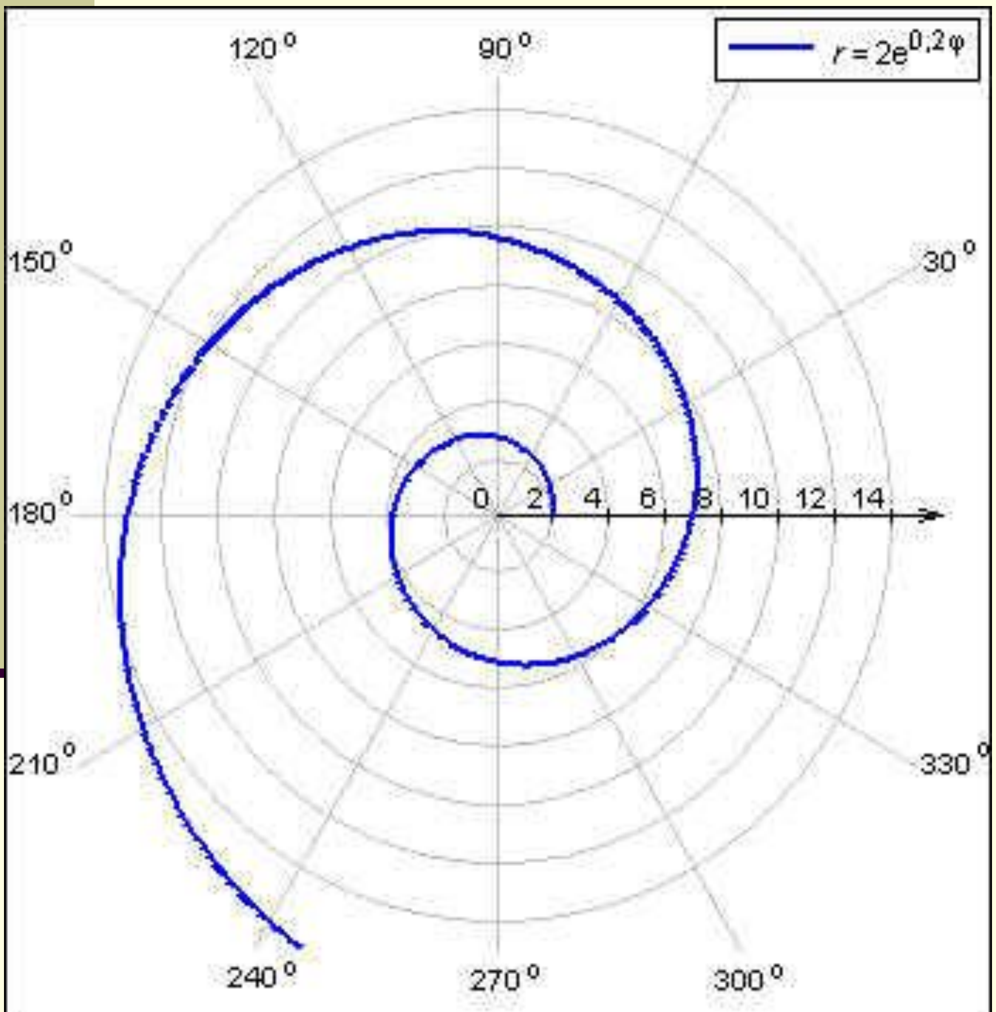
В чем ошибка этого доказательства?

Логарифмическая спираль



На рисунке видно, что эта спираль пересекает все прямые, проходящие через полюс под одним и тем же углом.

Логарифмическая спираль



Уравнение этой спирали $r = ae^{k\varphi}$, где

r - расстояние от произвольной точки М на спирали до выбранной точки **О**, φ - угол между лучом **ОМ** и выбранным лучом ***Ox,***

a и ***k*** - постоянные.

Решая его, получим

$$\ln e^{k\varphi} = \ln\frac{r}{a}, k\varphi = \ln\frac{r}{a}, \varphi = \frac{1}{k}\ln\frac{r}{a}.$$

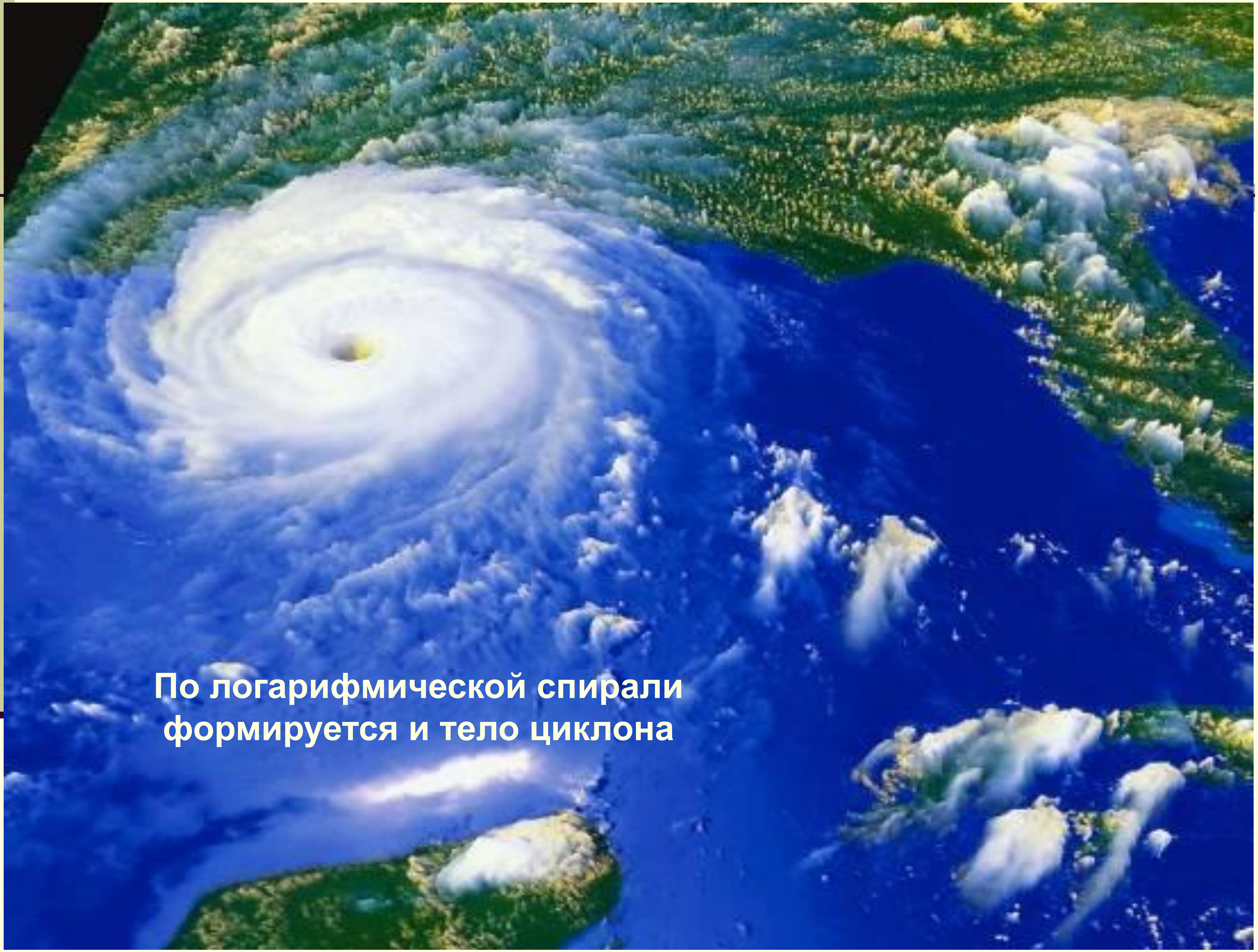
Логарифмическая спираль

Раковины морских животных могут расти лишь в одном направлении. Чтобы не слишком вытягиваться в длину, им приходится скручиваться, причем каждый следующий виток подобен предыдущему. А такой рост может совершаться лишь по логарифмической спирали или ее аналогиям. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, закручены по логарифмической спирали.

Логарифмическая спираль

Рога таких животных, как архары, закручены по логарифмической спирали.

В подсолнухе семечки расположены по дугам, близким к логарифмической спирали


По логарифмической спирали
формируется и тело циклона

ики, в

По логарифмическим спиралям закручены и многие галактики, в частности – Галактика Солнечной системы.

Творческое задание: «Логарифмическая диковинка»

Число 3 изобразить с помощью трех двоек и математических символов.

Решение: $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{8}}$, то $\log_2 2^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}; -\log_2 \frac{1}{8} = 3.$

Ответ: $3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

Решите неравенство

$$\log_{x+0,5}\left(3-x\right)\rangle 1$$

Подведем итоги


Решение уравнений
История возникновения
Логарифмическая спираль
Применение логарифмов
Софизм
Звезды, шум и логарифмы
Логарифм в музыке
Решение неравенств