

Системы счисления

Определение. Непозиционные и позиционные системы счисления.
Развернутая форма записи числа в позиционной системе счисления.
Правило счета. Таблица эквивалентов чисел.
Двоичная система счисления.
Перевод чисел между двоичной, восьмеричной, десятичной и шестнадцатеричной системами счисления.
Максимальное значение числа при известной длине разрядной сетки.
Двоичная арифметика.
Упражнения.

Система счисления

- **Система счисления** — это способ представления чисел цифровыми знаками и соответствующие ему правила действий над числами.
- Системы счисления можно разделить:
 - непозиционные системы счисления;
 - позиционные системы счисления.

Непозиционные системы счисления

- В непозиционной системе счисления значение (величина) символа (цифры) не зависит от положения в числе.
 - Пример 1. У многих народов использовалась система, алфавит которой состоял из одного символа — палочки. Для изображения какого-то числа в этой системе нужно записать определенное множество палочек, равное данному числу: ||||| — число пять.
 - Пример 2. Самой распространенной непозиционной системой счисления является римская. Алфавит римской системы записи чисел состоит из символов: I — один, V — пять, X — десять, L — пятьдесят, C — сто, D — пятьсот, M — тысяча.
 - Величина числа определяется как сумма или разность цифр в числе (например, II — два, III — три, XXX — тридцать, CC — двести).
 - Если же большая цифра стоит перед меньшей цифрой, то они складываются (например, VII — семь),
 - если наоборот — вычитаются (например, IX — девять).



Позиционные системы счисления

- В позиционных системах счисления значение (величина) цифры определяется ее положением в числе.
- Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием.
- **Основание позиционной системы счисления** — количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.
 - Основание 10 у привычной десятичной системы счисления (десять пальцев на руках). Алфавит: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.
 - Основание 60 придумано в Древнем Вавилоне: деление часа на 60 минут, минуты — на 60 секунд, угла — на 360 градусов.
 - Основание 12 распространили англосаксы: в году 12 месяцев, в сутках два периода по 12 часов, в футе 12 дюймов.
 - Основание 5 широко использовалось в Китае.
- За основание можно принять любое натуральное число — два, три, четыре и т.д., образовав новую позиционную систему: двоичную, троичную, четверичную и т.д.

Развернутая форма записи числа

- Позиция цифры в числе называется **разрядом**.
- $A_q = a_{n-1} \times q^{n-1} + \dots + a_1 \times q^1 + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \dots + a_{-m} \times q^{-m}$, где
 - q — основание системы счисления (*количество используемых цифр*)
 - A_q — число в системе счисления с основанием q
 - a — цифры многоразрядного числа A_q
 - n (m) — количество целых (дробных) разрядов числа A_q

- Пример:

2 1 0 -1 -2

$$239,45_{10} = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}.$$

$a_2 a_1 a_0 a_{-1} a_{-2}$

Правило счета

- **Продвижением** цифры называют замену её следующей по величине.
- Продвижение старшей цифры (например, цифры 9 в десятичной системе) означает замену её на 0.
- **Правило счёта:** для образования целого числа, следующего за любым данным целым числом, нужно продвинуть самую правую цифру числа; если какая-либо цифра после продвижения стала нулем, то нужно продвинуть цифру, стоящую слева от неё.

Таблица эквивалентов чисел

A_{10}	A_2	A_8	A_{16}
0	0	0	0
1	1	1	1
2		2	2
3		3	3
4		4	4
5		5	5
6		6	6
7		7	7
8			8
9			9

A_{10}	A_2	A_8	A_{16}
10			A
11			B
12			C
13			D
14			E
15			F
16			
17			
18			
19			

Двоичная система счисления

- Официальное «рождение» двоичной системы счисления (в её алфавите два символа: 0 и 1) связывают с именем Готфрида Вильгельма Лейбница. В 1703 г. он опубликовал статью, в которой были рассмотрены все правила выполнения арифметических действий над двоичными числами.
- Преимущества:
 - для её реализации нужны технические устройства с двумя устойчивыми состояниями:
 - сеть ток — нет тока;
 - намагничен — не намагничен;
 - представление информации посредством только двух состояний надежно и помехоустойчиво;
 - возможно применение аппарата булевой алгебры для выполнения логических преобразований информации;
 - двоичная арифметика намного проще десятичной.
- Недостаток:
 - быстрый рост числа разрядов, необходимых для записи чисел.

Перевод чисел (8) → (2), (16) → (2)

- Перевод восьмеричных и шестнадцатеричных чисел в двоичную систему: каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной *триадой* (тройкой цифр) или *тетрадой* (четверкой цифр).

- Примеры:

$$5371_8 = \underbrace{101}_5 \underbrace{011}_3 \underbrace{111}_7 \underbrace{001}_1_2;$$

$$1A3F_{16} = \underbrace{1}_1 \underbrace{1010}_A \underbrace{0011}_3 \underbrace{1111}_F_2$$

- Переведите:

$$3754_8 = \quad \quad \quad 2$$


$$2ED_{16} = \quad \quad \quad 2$$

Перевод чисел (2) → (8), (2) → (16)


- Чтобы перевести число из двоичной системы в восьмеричную или шестнадцатеричную, его нужно разбить влево и вправо от запятой на *триады* (для восьмеричной) или *тетрады* (для шестнадцатеричной) и каждую такую группу заменить соответствующей восьмеричной (шестнадцатеричной) цифрой.

- Примеры:

$$1101010000111_2 = 1\ 5\ 2\ 0\ 7_8;$$



$$110111000001101_2 = 6\ E\ 0\ D_{16}$$



- Переведите:

$$1011111010101100_2 = \quad \quad \quad 8$$
$$1011010100000110_2 = \quad \quad \quad 16$$

Перевод чисел $(q) \rightarrow (10)$

- Запись числа в развернутой форме и вычисление полученного выражения в десятичной системе.

- Примеры:

$$110110_2 = \mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0 = 54_{10};$$

$$237_8 = \mathbf{2} \times 8^2 + \mathbf{3} \times 8^1 + \mathbf{7} \times 8^0 = 128 + 24 + 7 = 159_{10};$$

$$3FA_{16} = \mathbf{3} \times 16^2 + \mathbf{15} \times 16^1 + \mathbf{10} \times 16^0 = 768 + 240 + 10 = 1018_{10}.$$

- Переведите:

$$1100011010_2 = \quad \quad \quad 10$$

$$162_8 = \quad \quad \quad 10$$

$$E23_{16} = \quad \quad \quad 10$$

Перевод чисел $(10) \rightarrow (q)$

- Последовательное целочисленное деление десятичного числа на основание системы q , пока последнее частное не станет равным нулю.
- Число в системе счисления с основанием q — последовательность остатков деления, изображенных одной q -ичной цифрой и записанных в порядке, обратном порядку их получения.
- Примеры:

The image shows three examples of integer division where remainders are collected in reverse order:

- Example 1:** $75 \overline{) 2}$ with subsequent divisions: $1 \overline{) 37} \overline{) 2}$, $1 \overline{) 18} \overline{) 2}$, $0 \overline{) 9} \overline{) 2}$, $1 \overline{) 4} \overline{) 2}$, $0 \overline{) 2} \overline{) 2}$, $0 \overline{) 1} \overline{) 2}$. The remainders are 2, 1, 0, 1, 0, 0, which are read from bottom to top as 001012.
- Example 2:** $75 \overline{) 8}$ with subsequent divisions: $3 \overline{) 9} \overline{) 8}$, $1 \overline{) 1} \overline{) 8}$. The remainders are 8, 1, 3, which are read from bottom to top as 318.
- Example 3:** $75 \overline{) 16}$ with subsequent divisions: $(B_{16}) \overline{) 11} \overline{) 4} \overline{) 16}$, $4 \overline{) 0}$. The remainders are 0, 4, 11, which are read from bottom to top as 411.

Напоминание: первый остаток 11_{10} в этом примере записывается шестнадцатеричной цифрой B_{16} .

- Переведите:

$$\begin{aligned} 141_{10} &= && 2 \\ 141_{10} &= & 8 & \\ 141_{10} &= & 16 & \end{aligned}$$

Максимальное значение числа

- Для записи одного и того же значения в различных системах счисления требуется разное число позиций или разрядов:
 96_{10} (2 разряда) = 60_{16} (2 разряда) = 140_8 (3 разряда) = 1100000_2 (7 разрядов)
- Чем меньше основание системы, тем больше длина числа (длина разрядной сетки).
- Если длина разрядной сетки задана, то это ограничивает максимальное по абсолютному значению число, которое можно записать.
- $A_{q(\max)} = q^N - 1$, где N — длина разрядной сетки (любое положительное число).
- Пример. Если в двоичной системе счисления длина разрядной сетки $N=8$, то $A_{2(\max)} = 2^8 - 1 = 255$ — максимальное число, которое можно записать в этих восьми разрядах (1111111_2).

Двоичная арифметика

Таблица сложения

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 1 + 0 &= 1 \\ 0 + 1 &= 1 \\ 1 + 1 &= 10 \end{aligned}$$

Таблица вычитания

$$\begin{aligned} 0 - 0 &= 0 \\ 1 - 0 &= 1 \\ 1 - 1 &= 0 \\ 10 - 1 &= 1 \end{aligned}$$

Таблица умножения

$$\begin{aligned} 0 \times 0 &= 0 \\ 1 \times 0 &= 0 \\ 1 \times 1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ + 101101 \\ \hline 1001000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1001000 \\ - 101101 \\ \hline 11011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110101001 \quad | \quad 10001 \\ - 10001 \\ \hline 10011 \\ - 10001 \\ \hline 10001 \\ - 10001 \\ \hline 00000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11001 \\ \times 10001 \\ \hline 11001 \\ + 00000 \\ + 00000 \\ + 00000 \\ + 11001 \\ \hline 110101001 \end{array}$$

Упражнения

- Во сколько раз увеличится число $10,1_2$ при переносе запятой на один знак вправо?
- При переносе запятой на два знака вправо число $11,11_x$ увеличилось в 4 раза. Чему равен x ?
- Какое минимальное основание может иметь система счисления, если в ней записано число 23?
- $48_{10} \rightarrow$ 2^*
- $16_{10} \rightarrow$ 8^*
- $891_{10} \rightarrow$ 16^*
- $1101111011_2 \rightarrow$ 10^*
- $257_8 \rightarrow$ 10^*

Упражнения

- $7B8_{16} \rightarrow$ 10^*
- Двоичное число записано в виде многочлена:
 $1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0$. Какой вид имеет число в двоичной, десятичной записи?
- Сравните числа: 11101_2 $1D_{16}^{2}$ 10
- $111101001000_2 \rightarrow$ 16^*
- $1100001111_2 \rightarrow$ 8^*
- $4F3D_{16} \rightarrow$ 2^*
- $713_8 \rightarrow$ 2^*
- Составьте таблицу эквивалентов чисел от 0 до 22 для $q=10$ и $q=6$.

Литература

- Семакин И.Г., Варакин Г.С. Информатика. Структурированный конспект базового курса.
- Под ред. Семакина И.Г. Информатика. Задачник-практикум в 2 т. Том 1.
- Шауцукова Л.З. Информатика: Учебное пособие для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.
- Угринович Н.Д. Информатика и информационные технологии. Учебник для 10-11 классов.
- Соловьёва Л.Ф. Информатика в видеосюжетах.

