ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ
2012 (часть 3)

Лосева
Екатерина Анатольевна

С 3. Решите систему $\begin{cases} 9^{\lg x} + x^{2\lg 3} \geq 6 & \textbf{(1)} \\ \log_2^2 x + 6 \rangle 5\log_2 x & \textbf{(2)} \end{cases}$

Решение: ОДЗ системы $x \rangle 0$. Решим первое неравенство:

$$9^{\lg x} + x^{2\lg 3} \geq 6$$

$$9^{\lg x} + x^{\lg 9} \geq 6$$

Для упрощения левой части неравенства понадобится равенство:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, b, a, c \rangle 0; b \neq 1$$

Его нетрудно доказать, если прологарифмировать обе части основания b.
Итак, имеем неравенство:

$$2 \times 9^{\lg x} \geq 6$$

$$9^{\lg x} \geq 3$$

$$9^{\lg x} \geq 9^{\frac{1}{2}}$$

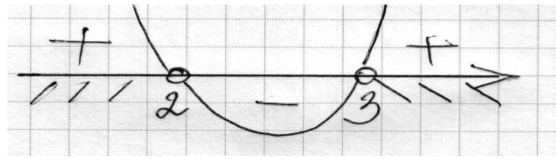
$$\lg x \geq \frac{1}{2}$$

$$x \geq \sqrt{10}$$

Решим второе неравенство: $\log_2^2 x + 6 > 5\log_2 x$

$t = \log_2 x$ выполним замену

$$t^2 - 5t + 6 > 0$$

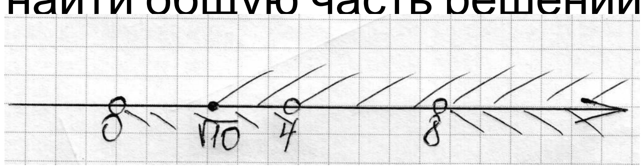


$$t \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$$

Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l}\log_2 x < 2 \\ \log_2 x > 3\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}0 < x < 4 \\ x > 8\end{array}\right. \qquad x \in (0;4) \cup (8;\infty)$$

Осталось найти общую часть решений этих неравенств:



$$x \in [\sqrt{10}; 4) \cup (8; \infty)$$

Ответ: $[\sqrt{10}; 4) \cup (8; \infty)$

С 3. Решите систему: $\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3^x} > 2\sqrt[4]{3} & \textbf{(1)} \\ \log_2^2 x + 6 \ge 5\log_2 x & \textbf{(2)} \end{cases}$

Решение: Решим первое неравенство. ОДЗ системы $x > 0$

Для решения первого неравенства немного по другому запишем первое слагаемое:

$$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}$$

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}$$

$$2 \times x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3} \,\big|\, :2$$

$$x^{\log_3 x} > \sqrt[4]{3}$$

Так как обе части неравенства положительны, можно логарифмировать их по основанию 3, не меняя знака неравенства.

$$\log_3(x^{\log_3 x}) > \log_3(\sqrt[4]{3})$$

$$\log_3 x \times \log_3 x > \frac{1}{4}$$

$$(\log_3 x)^2 > \frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x > \dfrac{1}{2} \\ \log_3 x < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Итак, решение первого неравенства состоит из двух промежутков:

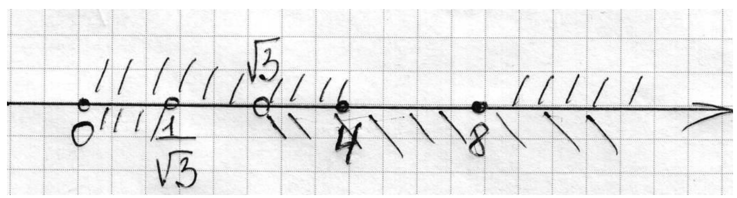
$$x \in (0; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$$

Решим второе неравенство: $\log_2^2 x + 6 \rangle 5 \log_2 x$

Оно уже встречалось нам в предыдущем примере. Используем результат и получим:

$$x \in (0;4] \cup [8; \infty)$$

Теперь найдем общую часть решения:



Ответ: $(0; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\sqrt{3};4] \cup [8; \infty)$

С 3. Решите систему: $\begin{cases} 3^{4x-1}+3^{4x+1}\geq 80 & \textbf{(1)} \\ \log_{\frac{x}{2}}(4x^2-3x+1)\geq 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$

Решение: 1) ОДЗ системы неравенств определяется системой условий:

$$\begin{cases} x\rangle 0 \\ x\neq 2 \\ 4x^2-3x+1\rangle 0(*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\rangle 0 \\ x\neq 2 \Leftrightarrow x\in(0;2)\cup(2;\infty) \\ R \end{cases}$$

$$(*)4x^2-3x+1=0$$

$$D=9-16\langle 0$$

2) Решим первое неравенство системы

$$3^{4x-1}+3^{4x+1}\geq 80$$

$$3^{4x-1}(1+3^2)\geq 80$$

$$3^{4x-1}\times 10\geq 80$$

$$3^{4x-1}\geq 8$$

$$3^{4x-1}\geq 3^{\log_3 8}$$

$$4x-1\geq \log_3 8$$

$$x\geq \frac{\log_3 8+1}{4}$$

3) Решим второе неравенство:

$$\log_{\frac{x}{2}}(4x^2-3x+1)\geq 0$$

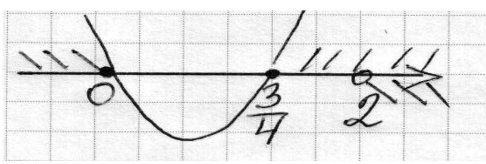
$$\log_{\frac{x}{2}}(4x^2-3x+1)\geq \log_{\frac{x}{2}} 1$$

$$\frac{x}{2}\rangle 1$$

$$4x^2-3x+1-1\geq 0$$

$$4x^2-3x\geq 0$$

$$x(4x-3)\geq 0$$

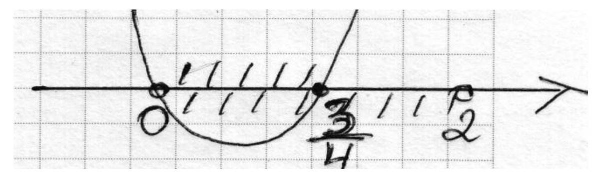


$$x\in(2;\infty)$$

$$0\langle\frac{x}{2}\langle 1$$

$$4x^2-3x+1-1\leq 0$$

$$4x^2-3x\leq 0$$

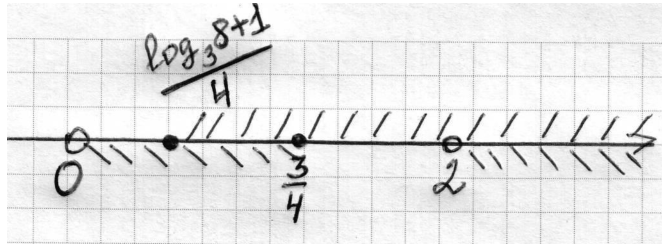


$x\in(0;\frac{3}{4}]$ (точка $x=0$ выколота с учетом ОДЗ)

Значит решение второго неравенства- это объединение двух промежутков

$$(0;\frac{3}{4}]\cup(2;\infty)$$

4) Осталось найти общую часть решений:



Выясним расположение точки : $\dfrac{\log_3 8+1}{4}$

$$1\langle\log_3 8\langle 2$$

$$2\langle\log_3 8+1\langle 3$$

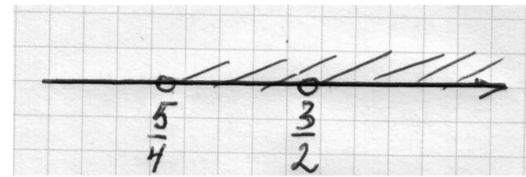
$$\frac{2}{4}\langle\frac{\log_3 8+1}{4}\langle\frac{3}{4}$$

Ответ: $x\in[\dfrac{\log_3 8+1}{4};\dfrac{3}{4}]\cup\ (2;\infty)$

С 3. Решите систему: $\begin{cases} \log_{2x+1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x+1)\le 2 \\ 9^x-2\times 6^x-3\times 4^x\le 0 \end{cases}$

Решение: Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+1>0 \\ 2x+1\ne 1 \\ 4x-5>0 \\ 4x-5\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x\ne 0 \\ x>\dfrac{5}{4} \\ x\ne\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x\in(\frac{5}{4};\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2};\infty)$$



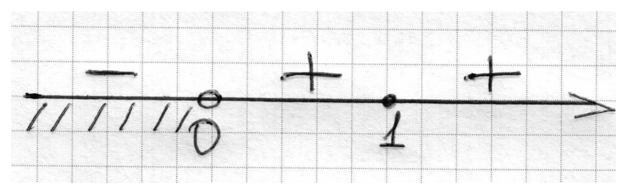
1)Решим первое неравенство. Используем равенство: $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a};b>0,b\ne 1;a>0,a\ne 1$

Можно сделать замену: $\log_{2x+1}(4x-5)=t$

$$t+\frac{1}{t}\le 2$$

$$\frac{t^2-2t+1}{t}\le 0$$

$$\frac{(t-1)^2}{t}\le 0$$



Значит $t\in(-\infty;0)\cup\{1\}$

Выполняем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{ll}\log_{2x+1}(4x-5)\langle 0 & (*)\\ \log_{2x+1}(4x-5)=1 & (**)\end{array}\right.$$

$(*)$

$$\log_{2x+1}(4x-5)\langle 0$$

$$\log_{2x+1}(4x-5)\langle \log_{2x+1}1$$

условие:

$$2x+1\rangle 1$$

$$4x-5\langle 1$$

$$4x\langle 6$$

$$x\langle \frac{3}{2}$$

Учитывая условие $2x+1\rangle 1$ и ОДЗ

Получаем: $x\in(\frac{5}{4};\frac{3}{2})$

условие:

$$0\langle 2x+1\langle 1$$

$$4x-5\rangle 1$$

$$x\rangle \frac{3}{2}$$

Учитывая условие и ОДЗ- решения нет.

$$(**)\quad \log_{2x+1}(4x-5)=1$$

$$4x-5=2x+1$$

$$2x=6$$

$x=3$ - удовлетворяет ОДЗ

Значит решением первого неравенства является множество $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)\cup\{3\}$

2) Решим второе неравенство: $9^x-2\times 6^x-3\times 4^x\le 0$

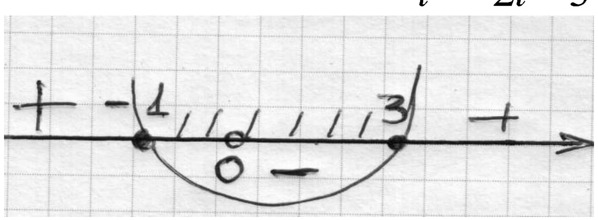
$$(3^x)^2-2(3^x)(2^x)-3(2^x)^2\le 0 \,\Big|:(2^x)^2\ne 0$$

однородное неравенство второй степени

$$\left(\frac{3^x}{2}\right)^2-2\left(\frac{3}{2}\right)^x-3\le 0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=t$$

$$t^2-2t-3\le 0$$



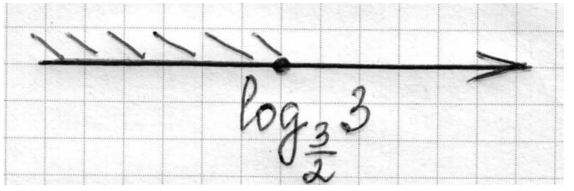
$$\Rightarrow t\in(0;3]$$

Обратная замена:

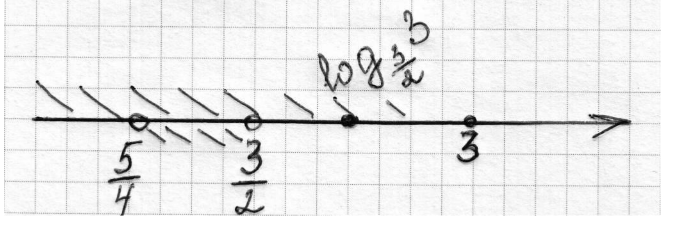
$$0\langle\left(\frac{3}{2}\right)^x\le 3$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x\le\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}3}$$

$$x\le\log_{\frac{3}{2}}3$$



3) Найдем общую часть решений:



$$2\langle\log_{\frac{3}{2}}3\langle 3$$

Ответ: $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$