Рекурсивные функции

Простейшие функции
Операция суперпозиции

Алгоритмический процесс можно рассматривать как процесс вычисления значений некоторой функции f

Такие функции называются **вычислимыми**

Интуитивное понятие **вычислимой функции** заменим на точное понятие **частично рекурсивной функции**

Простейшие функции

Рассмотрим некоторый набор простейших функций, вычислимость которых очевидна

Простейшими функциями называются следующие арифметические функции:

1) Нулевая функция

$$O^n(x_1, x_2, \ldots , x_n) = 0$$

$$O(x) = 0$$

Вспомните понятие арифметической функции

2) Функция следования

$$\lambda(x) = x + 1, x \in N$$

3) Функция проецирования (выбора)

$$I_m{}^n(x_1, x_2, \ldots , x_n) = x_m$$

Замечание

Вычислимость функции проецирования обеспечивается нашей способностью найти в строке

$$(x_1, x_2, \dots , x_n)$$

место с номером $\boldsymbol{m}$ и указать число на этом месте

Операция подстановки (суперпозиции)

Пусть заданы арифметические функции:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\phi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

Говорят, что функция $\boldsymbol{\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ получена из функций ϕ и $\boldsymbol{f_1, f_2, \ldots, f_m}$ **операцией подстановки (суперпозиции)**, если:

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Обозначение:

$$\psi = Sub(\varphi; f_1, \ldots, f_m)$$

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

- **Пример 1**

$$\varphi(x, y) = x - y$$
$$f_1(b) = b^2$$
$$f_2(a, c) = 4ac$$

$$\psi(a, b, c) =$$

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1,\dots,x_n) = \varphi(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$$

Пример 1

$$\varphi(x,y) = x - y$$
$$f_1(b) = b^2$$
$$f_2(a,c) = 4ac$$

$$\begin{aligned}\psi(a,b,c) = Sub(\varphi; f_1, f_2) &= \\ &= \varphi\big(f_1(b), f_2(a,c)\big) = \\ &= \varphi(b^2, 4ac) = \\ &= b^2 - 4ac\end{aligned}$$

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Правильное применение суперпозиции: необходимо соблюдать требования к набору аргументов каждой функции

$$\left.\begin{array}{l} \psi(x_1, \dots, x_n) \\ f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{array}\right\}$$

один и тот же набор аргументов
$(x_1, \dots, x_n)$

$\varphi(y_1, \dots, y_m)$

другой набор **из *m*** аргументов

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$
$$\varphi(y_1, \dots, y_m)$$

Пример 1

$$\varphi(x, y) = x - y$$
$$f_1(b) = b^2$$
$$f_2(a, c) = 4ac$$

Преобразуем функции f_1 и f_2 так, чтобы они удовлетворяли требованиям к аргументам для применения суперпозиции

$$F_1(a, b, c) = Sub\left(f_1; I_2^3(a, b, c)\right) = f_1(I_2^3(a, b, c))$$

$$F_2(a, b, c) = Sub\left(f_2; I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c)\right) = \\ = f_2(I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c))$$

$$\boxed{\psi(a, b, c) = \varphi\left(F_1(a, b, c), F_2(a, b, c)\right)}$$

Корректно

Замечание

Такое применение функции проецирования предложил К.Гёдель (1934)

Все функции f_i, $i = 1,\ldots m$ зависят от n переменных, а функция **ф** имеет m переменных (по количеству функций f_i)

Результат подстановки, функция **ψ** зависит от n переменных

Добиться выполнение условия на количество аргументов у функций можно введением фиктивных переменных и применения функции проецирования

$$I_m^n$$

Пример 2

Записать корректно подстановку

$$\psi(x, y, z) = \varphi(f_1(x), f_2(x, y, z), y, z)$$

Решение

$$F_1(x, y, z) = f_1(I_1^3(x, y, z))$$

$$F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z)$$

$$F_3(x, y, z) = I_2^3(x, y, z)$$

$$F_4(x, y, z) = I_3^3(x, y, z)$$

Пример 3

Вычислить функцию-константу:

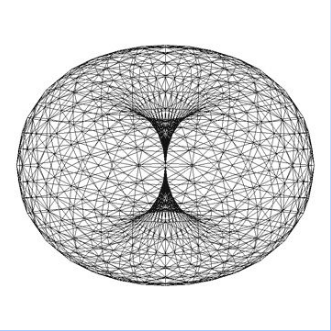
$$C_q^n(x_1, \dots, x_n) = q, \qquad q \in \boldsymbol{N}, n \in \boldsymbol{N}$$

Решение

$$C_q^n(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\lambda(\lambda(\lambda(\dots\lambda}_{q \text{ раз}}(O^n(x_1, \dots, x_n) \dots)$$

Литература

1. Ильиных А.П. Теория алгоритмов. Учебное пособие. – Екатеринбург, 2006. - 149 с.
2. Теория алгоритмов / Электронный учебник http://ric.uni-altai.ru/Fundamental/teor-alg/
3. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. - СПб.: Лань, 2009. - 288 с.



Нельзя научить, можно научиться