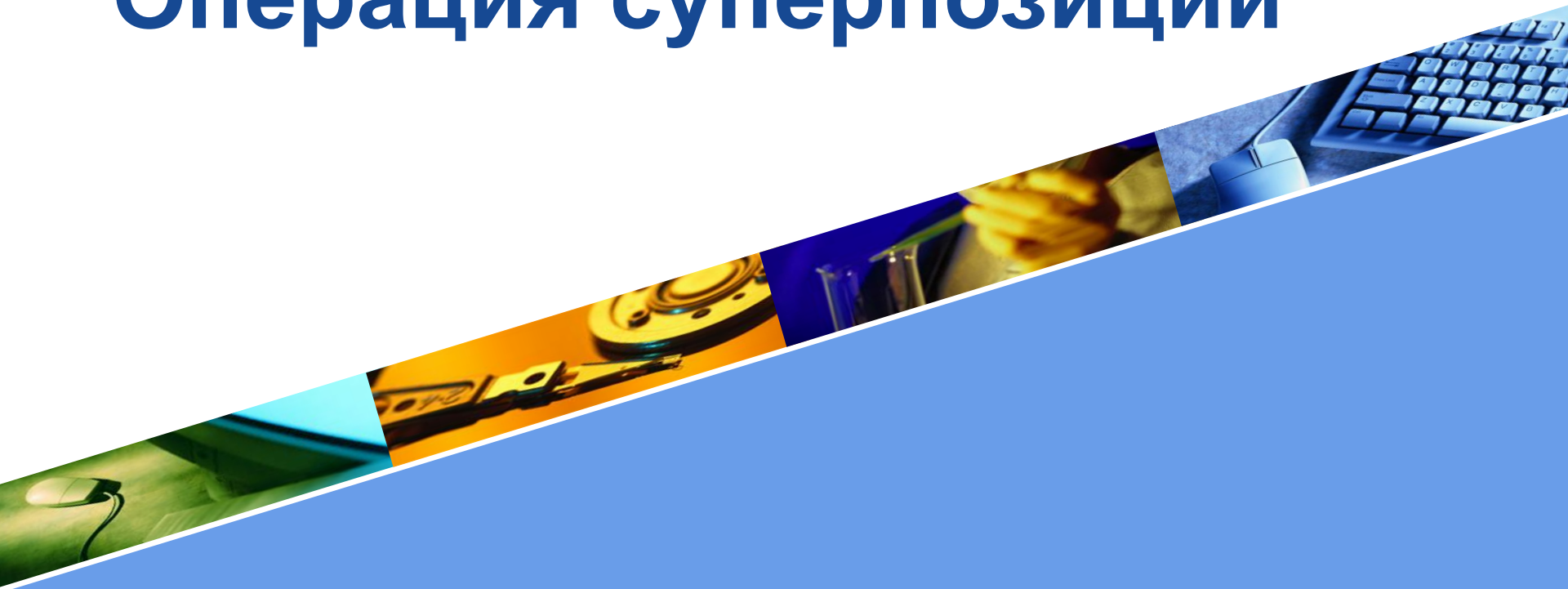


# Рекурсивные функции

Простейшие функции

Операция суперпозиции





Алгоритмический процесс можно рассматривать как процесс вычисления значений некоторой функции  $f$

Такие функции называются  
**ВЫЧИСЛИМЫМИ**



Интуитивное понятие **вычислимой функции** заменим на точное понятие **частично рекурсивной функции**

# Простейшие функции

Рассмотрим некоторый набор простейших функций, вычислимость которых очевидна



**Простейшими функциями** называются следующие арифметические функции:



## 1) Нулевая функция

$$O^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$O(x) = 0$$



**Вспомните понятие арифметической функции**

## 2) Функция следования

$$\lambda(x) = x + 1, x \in \mathbb{N}$$

## 3) Функция проецирования (выбора)

$$I_m^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_m$$



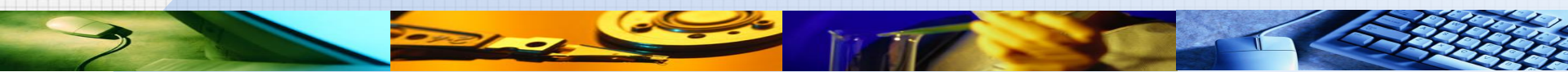
## Замечание

Вычислимость функции проецирования обеспечивается нашей способностью найти в строке

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$


место с номером  $m$  и указать число на этом месте

# Операция подстановки (суперпозиции)



 Пусть заданы арифметические функции:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \phi(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

 Говорят, что функция  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  получена из функций  $\phi$  и  $f_1, f_2, \dots, f_m$  **операцией подстановки (суперпозиции)**, если:

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \phi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

**Обозначение:**

$$\psi = \text{Sub}(\phi; f_1, \dots, f_m)$$

# Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

## Пример 1

$$\varphi(x, y) = x - y$$

$$f_1(b) = b^2$$

$$f_2(a, c) = 4ac$$

$$\psi(a, b, c) =$$

# Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

## Пример 1

$$\varphi(x, y) = x - y$$

$$f_1(b) = b^2$$

$$f_2(a, c) = 4ac$$

$$\begin{aligned}\psi(a, b, c) &= \text{Sub}(\varphi; f_1, f_2) = \\ &= \varphi(f_1(b), f_2(a, c)) = \\ &= \varphi(b^2, 4ac) = \\ &= b^2 - 4ac\end{aligned}$$



# Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

**Правильное применение суперпозиции:**  
необходимо соблюдать требования к набору аргументов каждой функции

$\psi(x_1, \dots, x_n)$   
 $f_1(x_1, \dots, x_n)$   
...  
 $f_m(x_1, \dots, x_n)$

**один и тот же  
набор аргументов  
 $(x_1, \dots, x_n)$**

$\varphi(y_1, \dots, y_m)$

другой набор из  $m$  аргументов

# Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \\ \varphi(y_1, \dots, y_m)$$

Р

## Пример 1

$$\varphi(x, y) = x - y \\ f_1(b) = b^2 \\ f_2(a, c) = 4ac$$

Преобразуем функции  $f_1$  и  $f_2$  так, чтобы они удовлетворяли требованиям к аргументам для применения суперпозиции

$$F_1(a, b, c) = \text{Sub}(f_1; I_2^3(a, b, c)) = f_1(I_2^3(a, b, c))$$

$$F_2(a, b, c) = \text{Sub}(f_2; I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c)) = \\ = f_2(I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c))$$

$$\psi(a, b, c) = \varphi(F_1(a, b, c), F_2(a, b, c))$$

Корректно



## Замечание

Такое применение функции проецирования предложил К.Гёдель (1934)

Все функции  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  зависят от  $n$  переменных, а функция  $\Phi$  имеет  $m$  переменных (по количеству функций  $f_i$ )

Результат подстановки, функция  $\Psi$  зависит от  $n$  переменных



Добиться выполнения условия на количество аргументов у функций можно введением фиктивных переменных и применения функции проецирования

$$I_m^n$$



## Пример 2

Записать корректно подстановку

$$\psi(x, y, z) = \varphi(f_1(x), f_2(x, y, z), y, z)$$

### Решение

$$F_1(x, y, z) = f_1(I_1^3(x, y, z))$$

$$F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z)$$

$$F_3(x, y, z) = I_2^3(x, y, z)$$

$$F_4(x, y, z) = I_3^3(x, y, z)$$



**Р** **Пример 3**  
Вычислить функцию-константу:

$$C_q^n(x_1, \dots, x_n) = q, \quad q \in N, n \in N$$

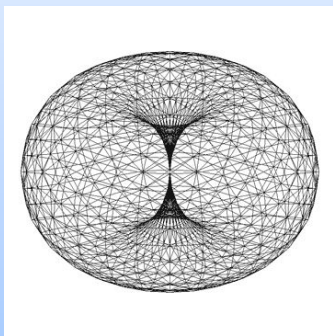
**Решение**

$$C_q^n(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\lambda(\lambda(\lambda(\dots \lambda(O^n(x_1, \dots, x_n)) \dots))}_{q \text{ раз}}$$



# Литература

1. Ильиных А.П. Теория алгоритмов. Учебное пособие. – Екатеринбург, 2006. - 149 с.
2. Теория алгоритмов / Электронный учебник <http://ric.uni-altai.ru/Fundamental/teor-alg/>
3. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.  
Математическая логика. Курс лекций.  
Задачник-практикум и решения. - СПб.: Лань,  
2009. - 288 с.



**Нельзя научить, можно  
научиться**