

**О ПЛАНЕТАРНЫХ ВОЛНАХ В  
СИСТЕМЕ ОКЕАН - ЛЕДЯНАЯ  
ОБОЛОЧКА СПУТНИКА ЮПИТЕРА  
ЕВРОПА**

**Б.И. Рабинович (ИКИ),  
Л.В. Докучаев (ЦНИИМАШ)**

*Электронная версия В.И. Прохоренко*

# Планетарные волны

- Данные наблюдений миссии Галилео говорят о возможности существования планетарных волн (ротационных и упругих мод в океане спутника Юпитера Европа. Для анализа динамики соответствующих волновых процессов используются две модели.
- Первая из них – это вращающийся океан с геометрической стратификацией его ледяной поверхности на отдельные ячейки с характерным размером порядка 100 км. Возможность появления таких ячеек, имеющих гидротермальную природу, содержащих «жидкие линзы», была постулирована и теоретически исследована в 2001 г. Р. Томсоном и Дж. Делане.

# Ледяной покров океана

Ледяной покров океана моделируется пологой упругой оболочкой. В этой модели с помощью метода Бубнова – Галеркина найден спектр собственных колебаний жидкости в ячейках Томсона – Делане, соответствующих упруго-гироскопическим планетарным волнам. В целях исследования возможности резонансного возбуждения приливных колебаний жидкости в ячейках доминантные элементы этого спектра сравниваются с теоретическими значениями частот приливообразующих сил, связанных с эксцентриситетом орбиты Европы и возмущениями от других галилевых спутников Юпитера. Это позволяет обнаружить большое количество резонансов на доминантных модах с периодом от 3.5 до 7 суток в областях океана Европы, соответствующих широтам от  $30^\circ$  до  $70^\circ$ .

# Океан в целом с ледяной оболочкой

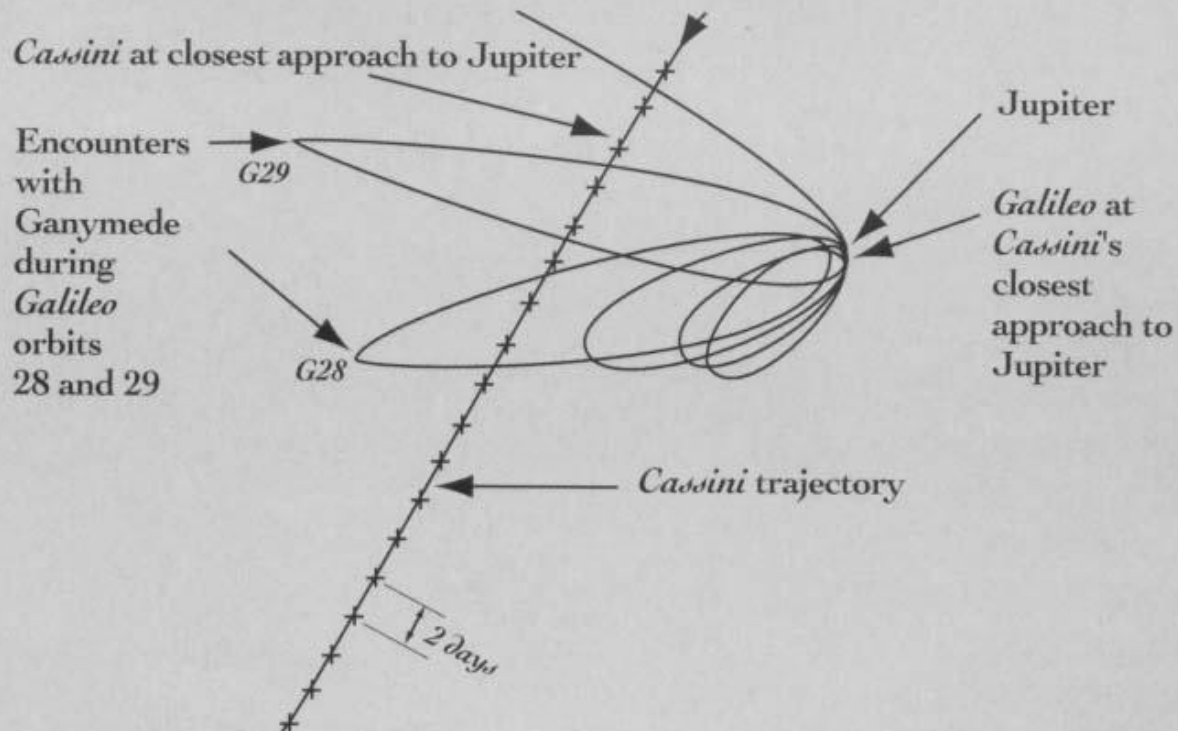
Вторая модель – это невращающийся океан с ледяным покровом, моделируемым моментной упругой сферической оболочкой с массой, отличной от нуля. Дается постановка краевой задачи для гидроупругих планетарных волн, описываемых этой моделью, и приводится точное аналитическое решение краевой задачи в полиномах Лежандра. В полученном спектре собственных колебаний системы оболочка – жидкость обнаруживаются элементы с периодами, близкими к 10 ч. Это создает потенциальную возможность возбуждения соответствующих гидроупругих волн за счет магнитогидродинамических эффектов, связанных с нестационарным магнитным полем Европы, изменяющимся с периодом собственного вращения Юпитера, равным 10 ч.

# ВВЕДЕНИЕ

## **Миссии NASA *Галилео и Кассини* и галилеевы спутники Юпитера**

# Орбиты КА Галилео и Кассини

*Galileo and Cassini Trajectories*

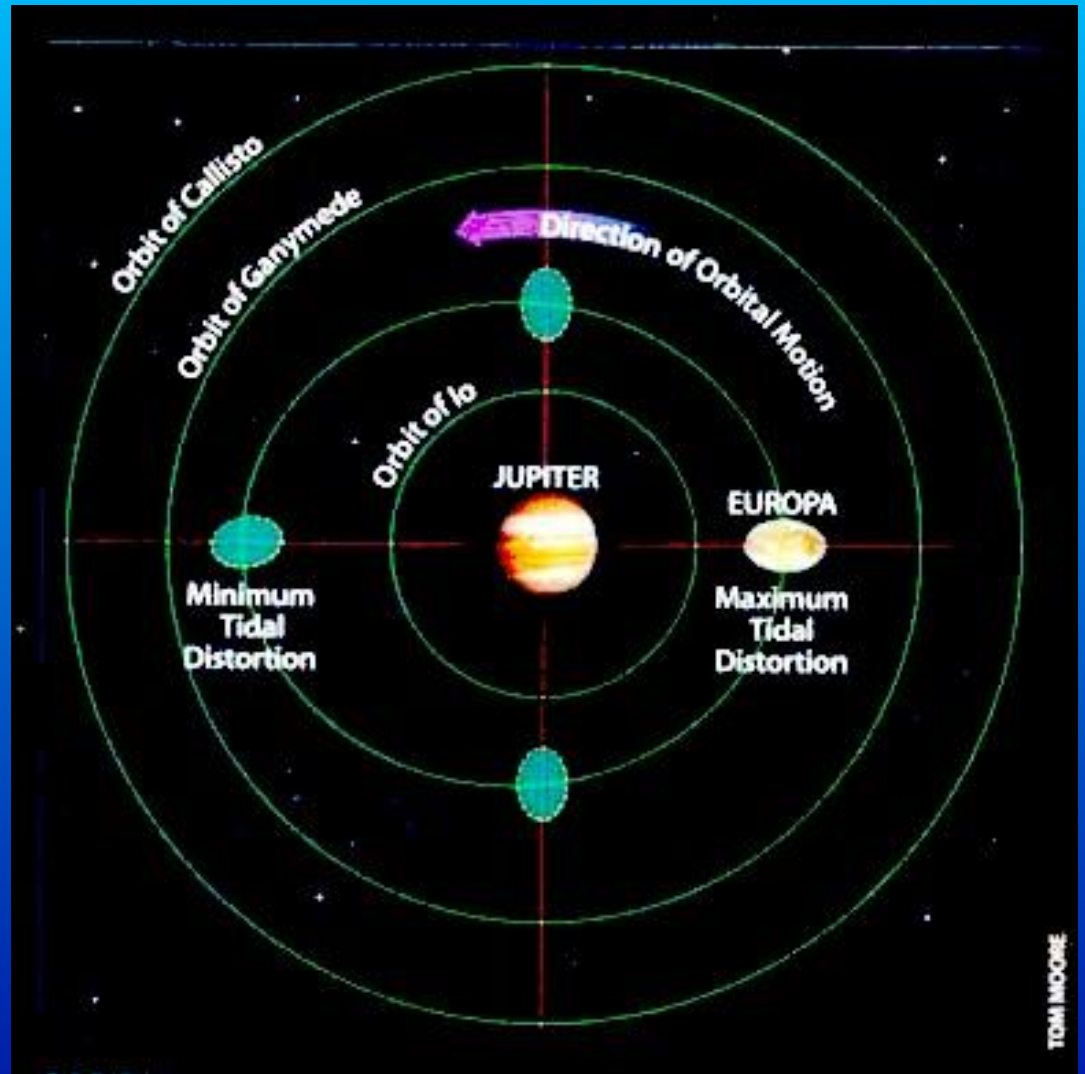


# Сближения КА *Галилео* с Юпитером и его галилеевыми спутниками

| <i>Galileo's Encounters After GEM*</i>   |                    |                 |                   |              |                                 |
|--|--------------------|-----------------|-------------------|--------------|---------------------------------|
| <i>Orbit</i>   | <i>Main Target</i> | <i>Date</i>     | <i>Altitude</i>   |              | <i>Notes</i>                    |
|  |                    |                 | <i>Kilometers</i> | <i>Miles</i> |                                 |
| C20  | Callisto           | May 5, 1999     | 1,315             | 817          | Approach Io torus               |
| C21  | Callisto           | June 30         | 1,047             | 651          | Approaching Io's warm torus     |
| C22  | Callisto           | August 14       | 2,295             | 1,426        | Reaching outer torus            |
| C23  | Callisto           | September 16    | 1,057             | 657          | All magnetospheric observations |
| I24  | Io                 | October 11      | 611               | 380          |                                 |
| I25  | Io                 | November 26     | 300               | 186          | Europa encounter included       |
| E26  | Europa             | January 3, 2000 | 374               | 232          | Europa magnetic field           |
| I27  | Io                 | February 22     | 200               | 124          |                                 |
| G28  | Ganymede           | May 20          | 900               | 559          |                                 |
| G29  | Ganymede           | December 28     | 1,000             | 621          | In eclipse by Jupiter           |
| Joint operations are proposed with <i>Cassini</i> as it encounters Jupiter on December 30, 2000. |                    |                 |                   |              |                                 |
| *GEM = <i>Galileo Europa Mission</i>   |                    |                 |                   |              |                                 |

# Орбиты галилеевых спутников

- Ио
- Европа
- Ганимед
- Каллисто





# Таблица 1

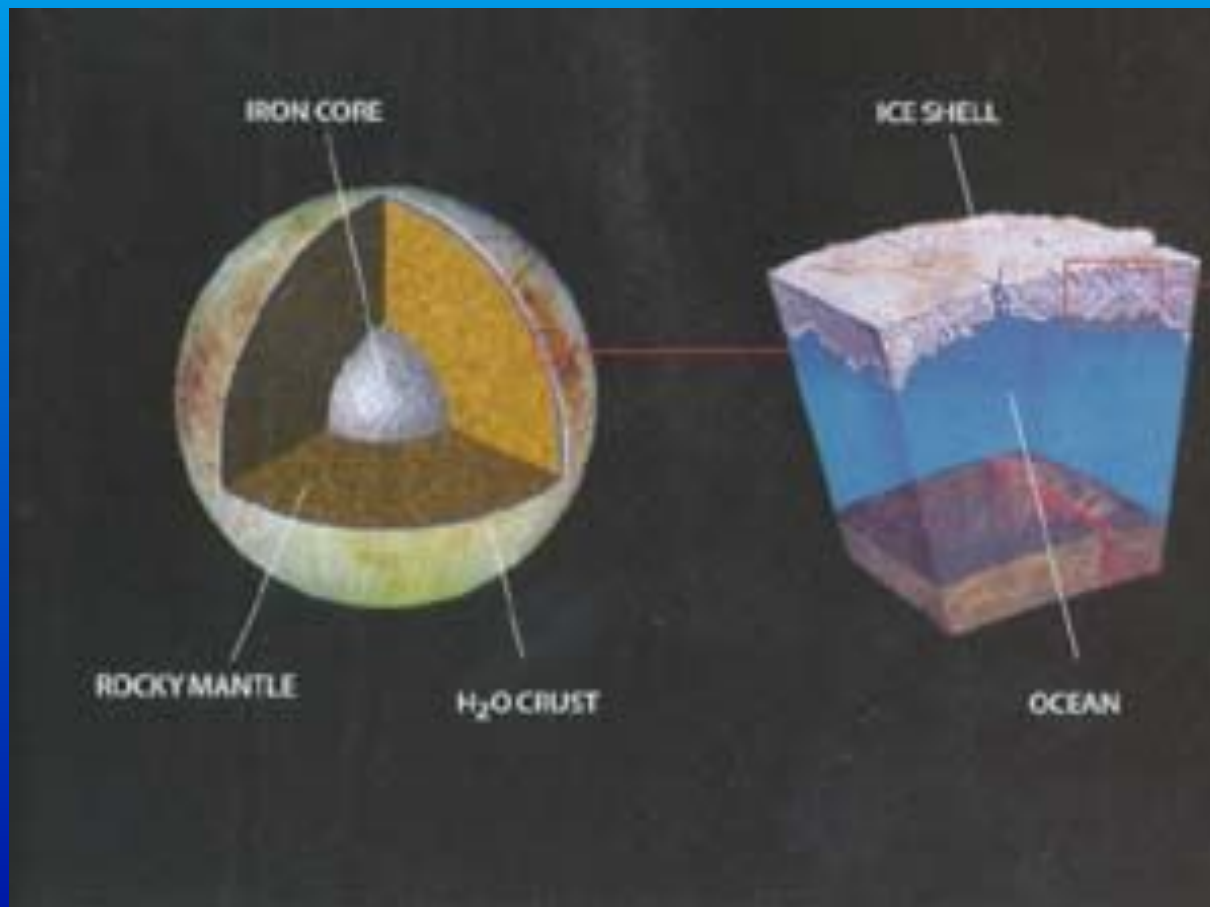
## Периоды обращения галилеевых спутников в сутках

| Европа       | Ио       | Ганимед  | Каллисто |
|--------------|----------|----------|----------|
| $T_{Eu} = T$ | $T_{io}$ | $T_{ga}$ | $T_{Ca}$ |
| 3.55         | 1.80     | 7.15     | 16.70    |

# Европа и ее ледяной покров



# Океан Европы

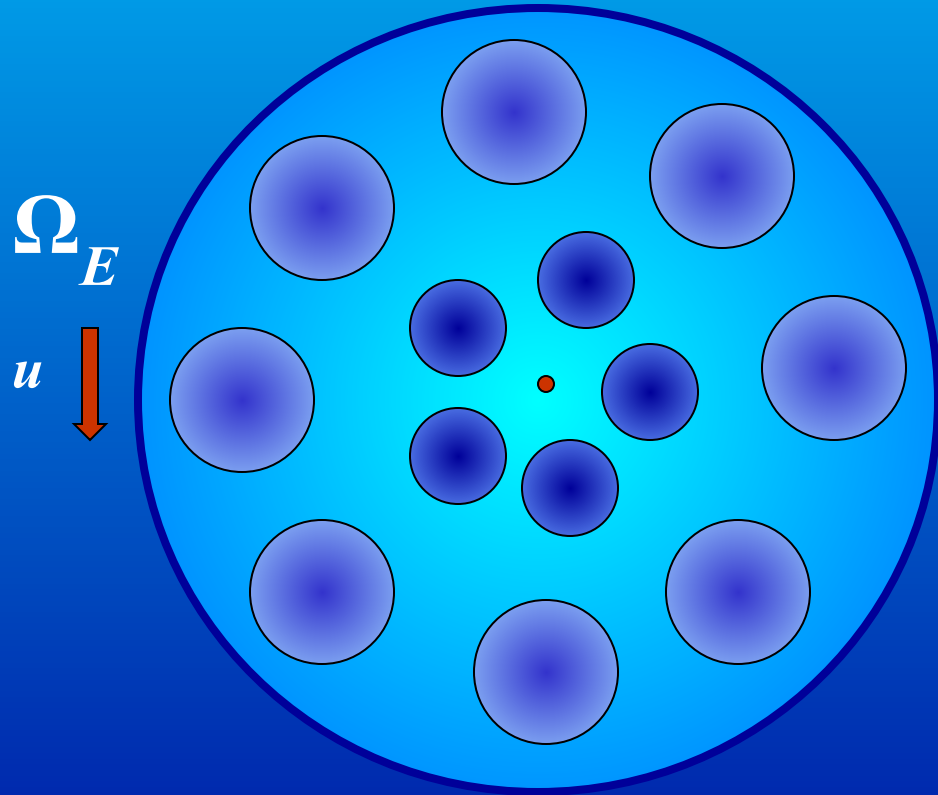


# Часть I

## Планетарные гироскопические волны в ячейках Томсона - Делане

**Б.И. Рабинович (ИКИ)**

# Ячейки Томсона - Делане



- Диаметр ячеек  
в экваториальной области  
 $2 r_0 = 100$  км  
в полярных областях  
 $2 r_0 = 5$  км
- Глубина жидкости  
 $H = H_0 r_0 / r$
- Максимальная глубина  
 $H_{\max} = 100$  км
- $\Omega_{Eu} = 2\pi / T_{Eu}$ ;  $T_{Eu} = 3.55$  час

## Краевая задача

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + j \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p^*}{\partial r} - f v_\theta = 0;$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{j}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{g}{\gamma r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + f v_r = 0;$$

$$\frac{\partial(Hr v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(Hv_\theta)}{\partial \theta} = 0; \quad p^* = L(w, t);$$

$$(Hv_r) \Big|_{r=r_0} = 0; \quad L_0(w) \Big|_{r=r_0} = 0.$$

# Условные обозначения (1)

- $v$  – скорость жидкости;
- $H$  – толщина слоя жидкости;
- $\gamma/g$  – массовая плотность жидкости;
- $P^*$  – вариация давления на жидкость со стороны упругой ледяной оболочки;
- $w$  – перемещение элемента жидкости в направлении нормали к картинной плоскости;
- $C$  – контур области  $S$ , занятой жидкостью;
- $v_v$  – компонент скорости в проекции на нормаль контуру  $C$  (орт внешней нормали  $v$ );

## Условные обозначения (2)

- $\nabla$ ,  $\Delta$  – двумерные операторы Гамильтона и Лапласа;
- $L$  и  $L_0$  – дифференциальные операторы теории оболочек;
- $j$  – ускорение гравитационной силы на поверхности *Европы*;
- $f$  – параметр Кориолиса,  $f = 2 \Omega \sin\phi$ ;
- $\Omega$  - угловая скорость собственного вращения *Европы*:  $\Omega = 2\pi/T$ ;
- $T$  – период ее собственного вращения, равный периоду обращения вокруг Юпитера;
- $\phi$  - широта точки области  $S$ .



# Функция тока

$$v_r = \frac{1}{Hr} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{Hr} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{H} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{f}{H} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} = 0.$$

$$\rho = \frac{r}{r_0}; \quad \tilde{H} = \frac{H_0}{\rho}; \quad \tilde{H}_0 = \frac{H_0}{r_0}; \quad \tau = f t; \quad \Psi(\rho, \theta) = \psi e^{-\lambda \tau}.$$

## Метод Бубнова - Галеркина

$$\Psi(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^l a_m \chi_m(\rho, \theta),$$

$$\mathbf{A} \mathbf{a} \lambda + \mathbf{B} \mathbf{a} = 0,$$

$$\alpha_{mn} = \alpha_{nm} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left( \frac{\partial \chi_m}{\partial \rho} \frac{\partial \chi_n}{\partial \rho} \rho^2 + \frac{\partial \chi_m}{\partial \theta} \frac{\partial \chi_n}{\partial \theta} \right) d\rho;$$

$$\beta_{mn} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left( \frac{\partial \chi_m}{\partial \rho} \frac{\partial \chi_n}{\partial \theta} - \frac{\partial \chi_m}{\partial \theta} \frac{\partial \chi_n}{\partial \rho} \right) \rho d\rho;$$

$$\beta_{nm} = -\beta_{mn}; \quad \beta_{mm} = 0; \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, l.$$

# Частоты собственных колебаний жидкости

$$|\mathbf{A}\lambda + \mathbf{B}| = 0.$$

$$\lambda_n = \pm i\sigma_n;$$

$$\omega_n = f\sigma_n = 2\Omega\sigma_n \sin \varphi_0;$$

$$n = 1, 2, \dots, l/2.$$

$$\chi_v^{(\mu)} = \cos \frac{\pi v \rho}{2} \begin{cases} \sin \mu\theta \\ \cos \mu\theta \end{cases};$$

$$v = 1, 3, \dots; \mu = 1, 2, 3, \dots$$

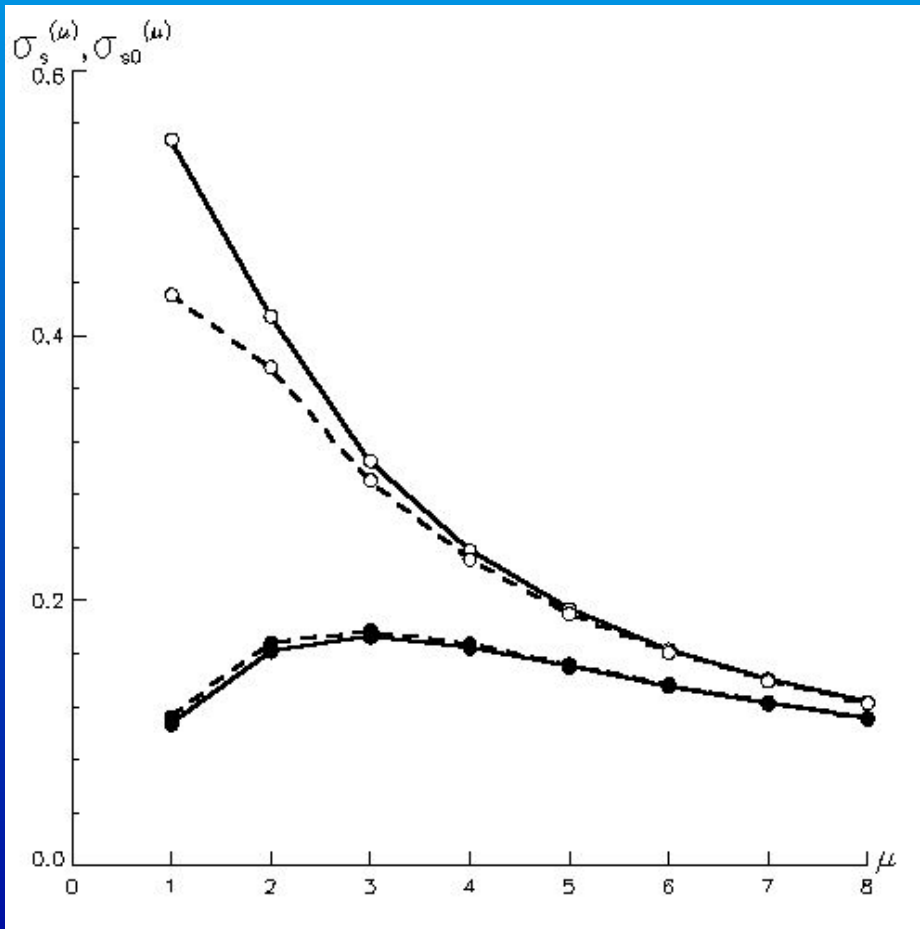
$$\lambda_{10} = \frac{i\beta_{12}}{\alpha_{11}} = i\sigma_{10}; \quad \lambda_{20} = \frac{i\beta_{12}}{\alpha_{22}} = i\sigma_{20}.$$

# Таблица 2

Безразмерные частоты  $\sigma_s^{(\mu)}$  и  $\sigma_{s0}^{(\mu)}$  первых восьми мод  
собственных колебаний жидкости

| $\mu$                 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\sigma_{10}^{(\mu)}$ | 0.55 | 0.44 | 0.30 | 0.24 | 0.19 | 0.16 | 0.14 | 0.12 |
| $\sigma_{10}^{(\mu)}$ | 0.43 | 0.38 | 0.29 | 0.23 | 0.19 | 0.16 | 0.14 | 0.12 |
| $\sigma_2^{(\mu)}$    | 0.11 | 0.16 | 0.17 | 0.16 | 0.15 | 0.13 | 0.12 | 0.11 |
| $\sigma_{20}^{(\mu)}$ | 0.11 | 0.17 | 0.18 | 0.17 | 0.15 | 0.14 | 0.12 | 0.11 |

# Безразмерные частоты собственных колебаний жидкости в ячейках



$\sigma_s^{(\mu)}$ ;

$\sigma_{s0}^{(\mu)}$ ;

○ -  $s = 1$ ;

● -  $s = 2$

# Резонансное возбуждение приливных колебаний жидкости

$$\sigma_s^{(\mu)} = F(|\varphi_0|) = \frac{|\omega_s^{(\mu)}|}{2\Omega \sin|\varphi_0|} \quad \left| \omega_s^{(\mu)} \right| = \left| \Omega_n^* \right|; \quad \Omega_n^* = \frac{\Omega_n}{2}.$$

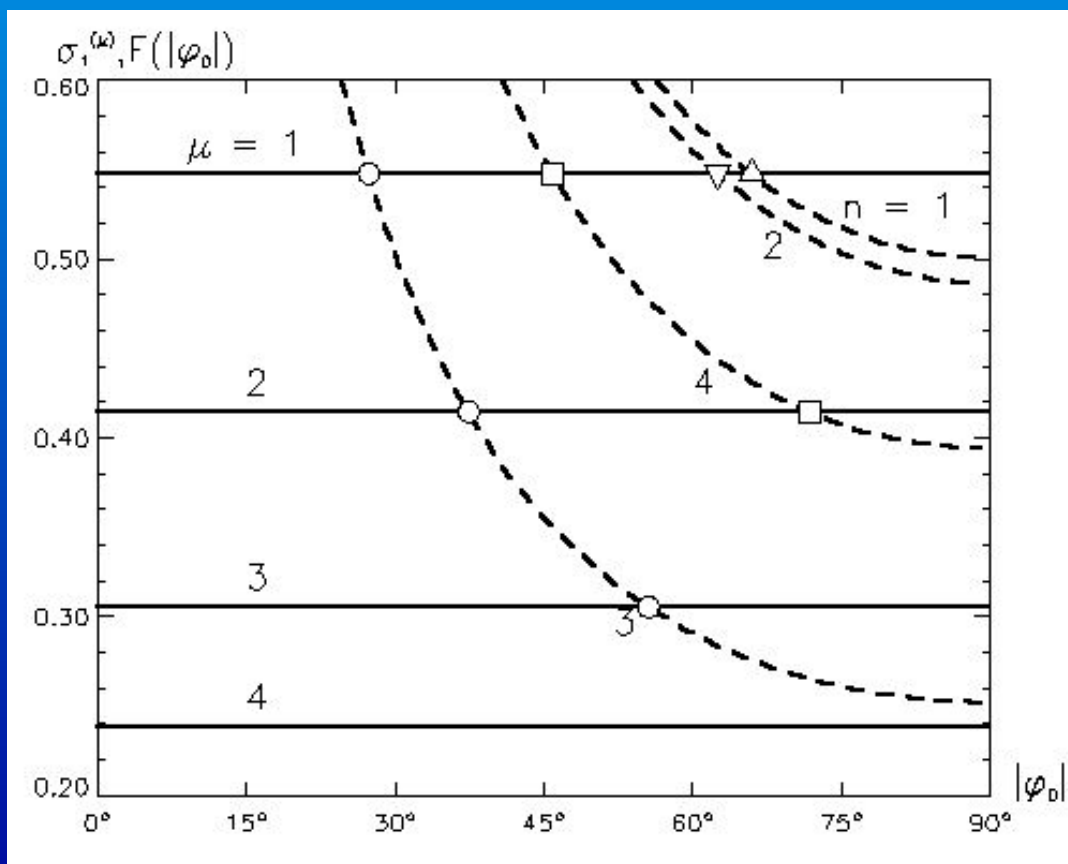
$$\left| \omega_s^{(\mu)} \right| = \left| \Omega_n \right|.$$

$$\Omega_1 = \Omega_{Eu} = \Omega; \quad \Omega_2 = \Omega_{Io} - \Omega;$$

$$\Omega_3 = \Omega_{Ga} - \Omega; \quad \Omega_4 = \Omega_{Ca} - \Omega;$$

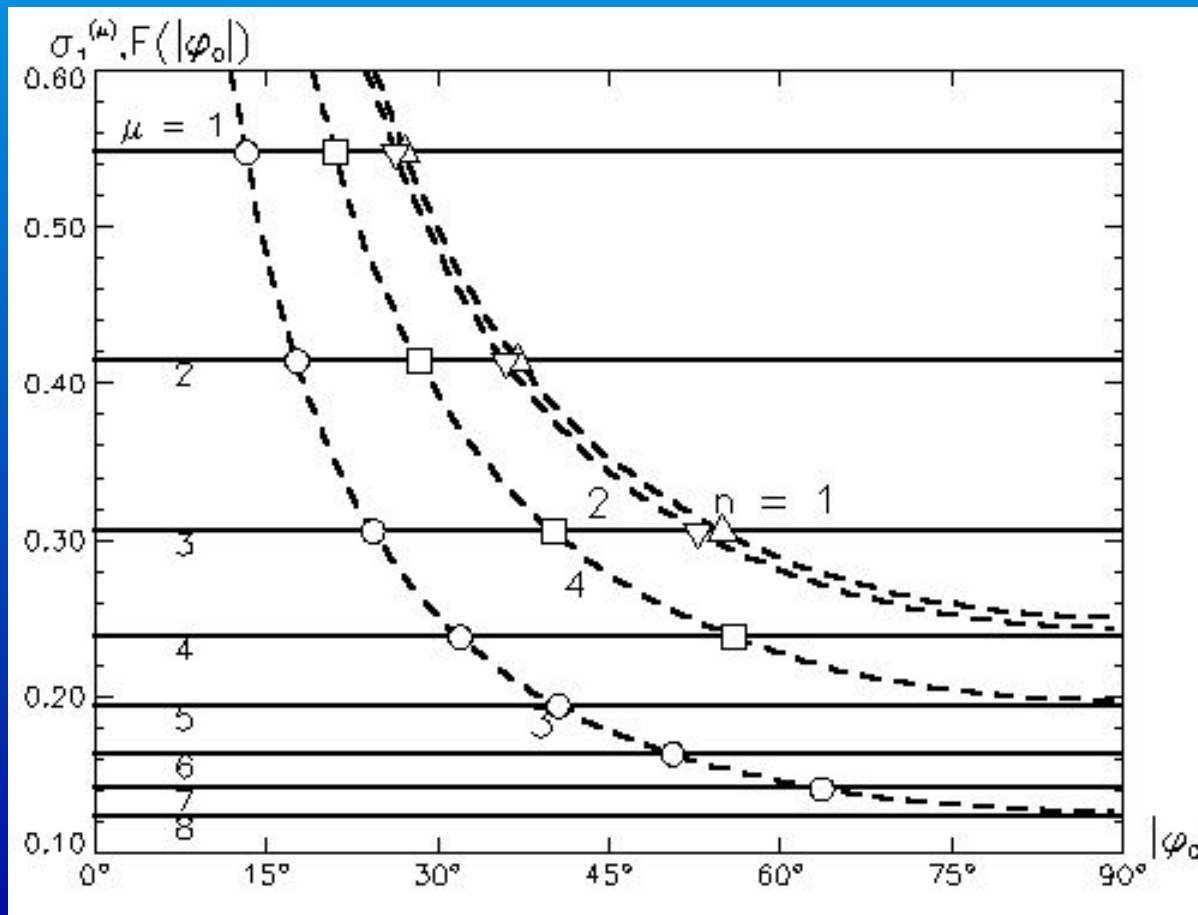
$$\Omega_{Io} = \frac{2\pi}{T_{Io}}; \quad \Omega_{Ga} = \frac{2\pi}{T_{Ga}}; \quad \Omega_{Ca} = \frac{2\pi}{T_{Ca}}.$$

# Частоты, соответствующие возбуждению приливных колебаний жидкости в ячейках (основной резонанс, $s = 1$ )



- $\sigma_s(\mu)$ ;
- $F(|\phi_0|)$ ;
- △ - Европа;
- ▽ - Ио;
- - Ганимед;
- - Каллисто

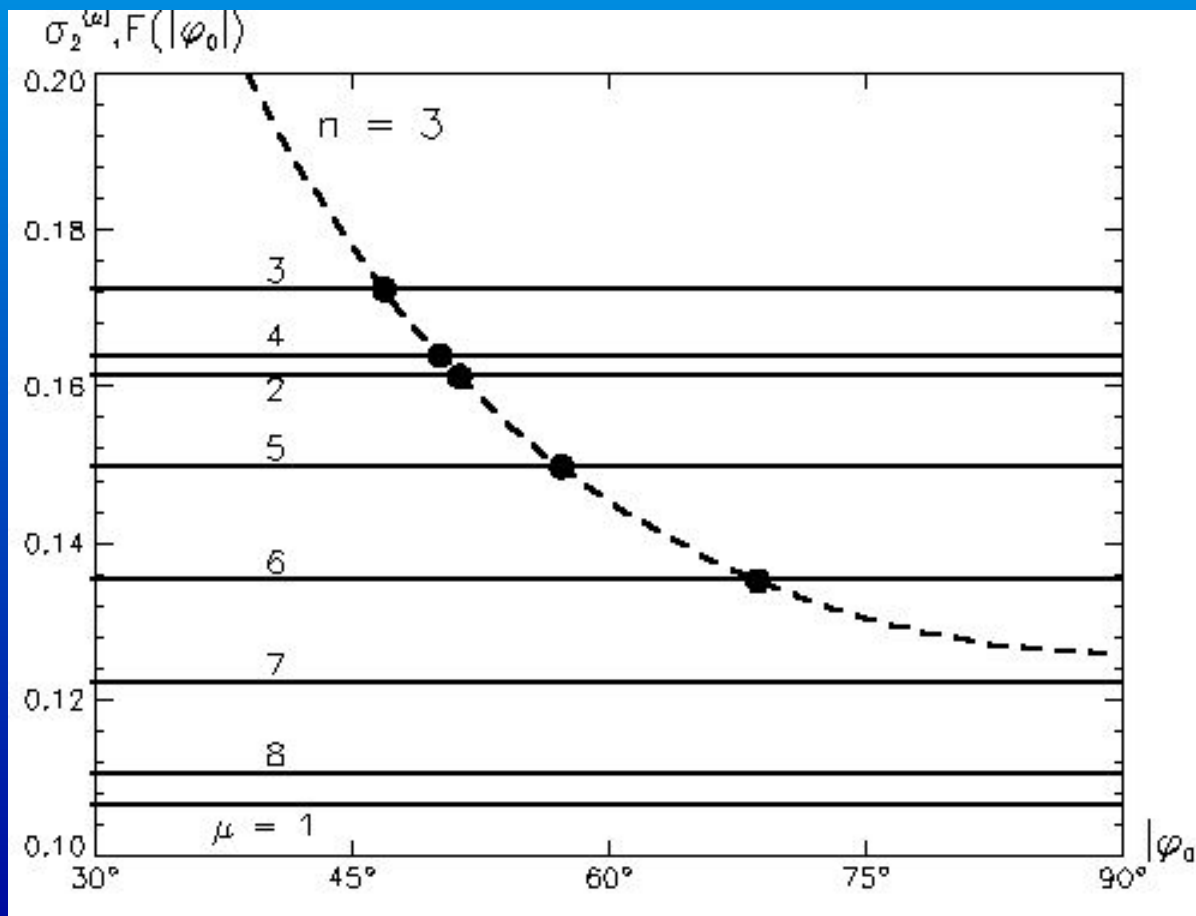
# Частоты, соответствующие возбуждению приливных колебаний жидкости в ячейках (параметрический резонанс)



- $s = 1;$
- $\sigma_s^{(\mu)}$ ;
- $F(|\Phi_0|)$ ;
- $\Delta$  - Европа;
- $\nabla$  - Ио;
- $\circ$  - Ганимед;
- $\square$  - Каллисто

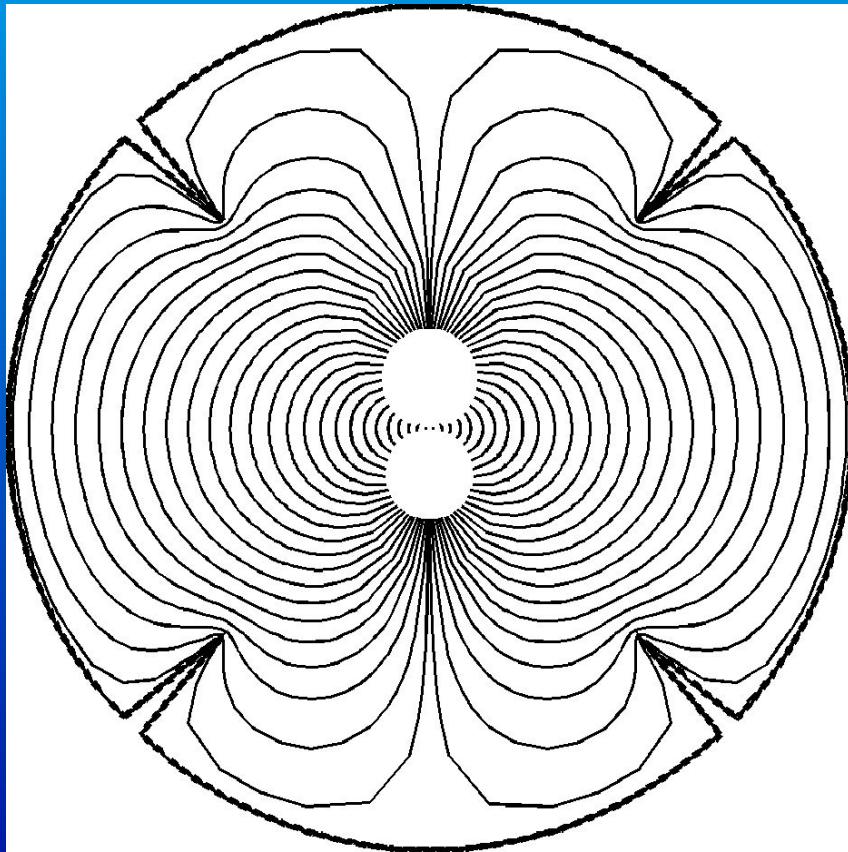


# Частоты, соответствующие возбуждению приливных колебаний жидкости в ячейках (параметрический резонанс)

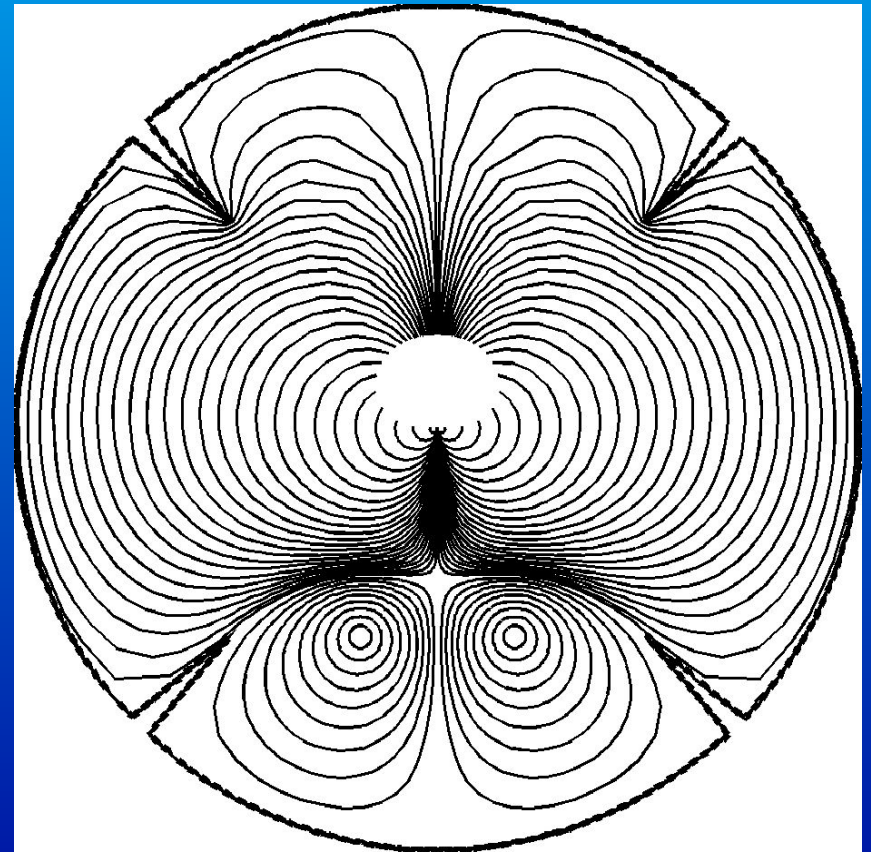


$s = 2;$   
 $— \sigma_s^{(\mu)};$   
 $— F(|\phi_0|);$   
 $\cdot - \text{Ганимед}$

# Линии тока, соответствующие колебаниям жидкости в круглом водоеме с радиальными ребрами



Безвихревое движение



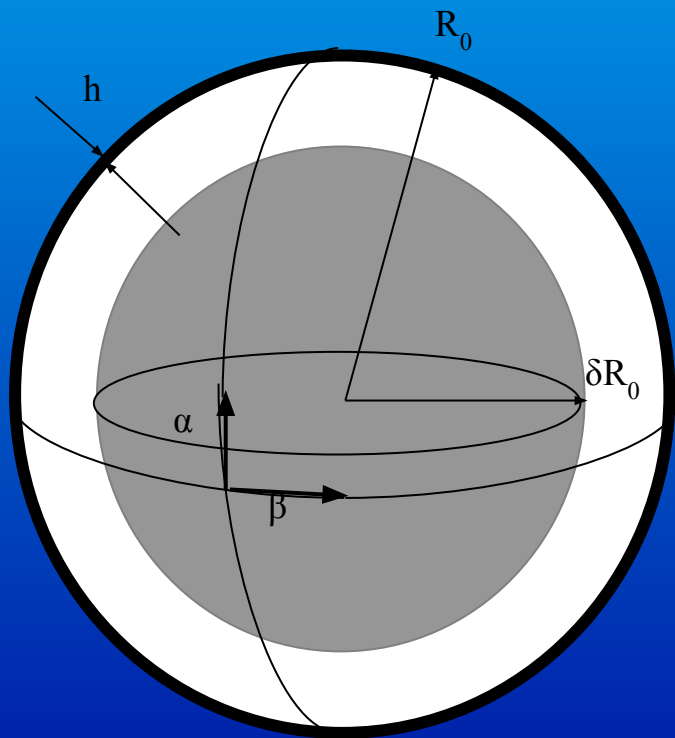
Движение с локальными  
вихревыми зонами

## Часть II

# Планетарные гидроупругие волны в ледяной оболочке Европы

**Л.В. Докучаев (ЦНИИМАШ)**

# Океан в целом и его ледяная оболочка



- $2R_0 \sim 3500 \text{ km}$
- $h \sim 7\text{-}10 \text{ km}$
- $H = R_0 - \delta R_0 \sim 100 \text{ km},$

# Общие уравнения гидродинамики

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} + \\ & + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \\ & = \mathbf{j} + \frac{1}{\rho_0} (-\nabla P + \mathbf{F}_{\text{прил}} + \mathbf{F}_{\text{вязк}}); \\ & \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \end{aligned}$$

# Уравнения колебаний сферической оболочки

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + (1 - \mu) \left( -\frac{\partial \chi}{L \partial \beta} + u - \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{(1 - \mu^2)}{E} \rho R_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{L \partial \beta} + (1 - \mu) \left( \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + v - \frac{\partial w}{L \partial \beta} \right) - \frac{(1 - \mu^2)}{E} \rho R_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$(1 + \mu) \theta + c^2 (\nabla^2 + 2)(\nabla^2 + 1 + \mu) w + \frac{(1 - \mu^2)}{E} \rho R_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1 - \mu^2}{E h} R_0^2 F.$$

# Вспомогательные переменные

$$\theta = \frac{\partial(Lu)}{L\partial\alpha} + \frac{\partial v}{L\partial\beta} + 2w, \quad 2\chi = \frac{\partial(Lv)}{L\partial\alpha} - \frac{\partial u}{L\partial\beta}, \quad c^2 = \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R_0} \right)^2,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{L\partial\alpha} \left( L \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) + \frac{\partial^2}{(L\partial\beta)^2}, \quad L = \sin \alpha.$$

$$F = -\rho_0 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - j\omega \right) \Big|_{R=R_0}; \quad \mathbf{V} = \text{grad } \Phi.$$

*$u(\alpha, \beta, t), v(\alpha, \beta, t)$  – тангенциальные перемещения,*

*$w(\alpha, \beta, t)$  – перемещения по нормали,*

*$\alpha, \beta$  - географические широта и долгота*

# Потенциал смещений Краевая задача и фундаментальные решения

$$\Delta\Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right|_{R=R_0} = w(\alpha, \beta, t), \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right|_{R=\delta R_0} = 0, \quad \int_S w(\alpha, \beta, t) dS = 0$$

$$\Phi^0(R, \alpha, \beta, t) = X(R)Y(\alpha)Z(\beta)e^{i\omega t};$$

$$Z(\beta) = C_1 \sin m\beta + C_2 \cos m\beta;$$

$$Y(\alpha) = P_n^m(\cos \alpha);$$

$$X_n(R) = \frac{R_0}{1 - \delta^{2n+1}} \left( \frac{1}{n} \left( \frac{R}{R_0} \right)^n + \frac{\delta^{2n+1}}{n+1} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{n+1} \right)$$



## Разложение решений в ряды

$$u = u_m(\alpha) \sin m\beta e^{i\omega t}, \quad v = v_m(\alpha) \cos m\beta e^{i\omega t},$$

$$w = w_m(\alpha) \sin m\beta e^{i\omega t},$$

$$\Phi_m(R, \alpha) \sin m\beta e^{i\omega t}, \quad F = \rho_0 \omega^2 \Phi_m(R_0, \alpha) \sin m\beta e^{i\omega t}.$$

$$u_m = \sum_{n=m} (A_n (P_n^m)' + B_n \frac{m}{L} P_n^m), \quad v_m = \sum_{n=m} (A_n \frac{m}{L} P_n^m + B_n (P_n^m)'),$$

$$w_m = \sum_{n=m} Q_n P_n^m. \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \equiv ();$$

$$\Phi_m = \sum_{n=m} a_{nm} X_n(R) P_n^m(\cos \alpha), \quad a_{nm} = \frac{1}{N_{nm}^2} \int_0^\pi w_m(\alpha) P_n^m(\cos \alpha) L d\alpha$$

# Характеристическое уравнение **1**

$$\begin{aligned} & (2(1 + \mu) + c^2(1 + \mu - k_j)(2 - k_j) - \\ & - \lambda^2(1 + aX_j(1)))Q_j - (1 + \mu)k_jA_j = 0; \\ & (1 + \mu)k_jQ_j - k_j(k_j - 1 + \mu - \lambda^2)A_j = 0; \\ & k_j(\frac{1}{2}(1 - \mu)(k_j - 2) - \lambda^2)B_j = 0. \end{aligned}$$

# Характеристическое уравнение

## 2

$$(\lambda^2(1 + aX_j(1)) - 2(1 + \mu) - c^2(k_j - 2)(k_j - 1 - \mu))(\lambda^2 - k_j + 1 - \mu) - (1 + \mu)^2 k_j = 0;$$

$$k_j = j(j + 1), \quad a = \frac{\rho_0 R_0}{\rho h}, \quad X_j(1) = \frac{j(1 + \delta^{2j+1}) + 1}{k_j(1 - \delta^{2o+1})}.$$

Таблица **3**  
 Безразмерные частоты  
 собственных изгибных колебаний  
 оболочки  $\lambda_{m,n}$

| m \ n | 1      | 2      | 3      | 4      |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| 0;1   | 0      | 0.0320 | 0.0483 | 0.0635 |
| 2     | 0.0320 | 0.0483 | 0.0635 | 0.0781 |
| 3     | 0.0483 | 0.0635 | 0.0781 | 0.0923 |
| 4     | 0.0635 | 0.0781 | 0.0923 | 0.1062 |
| 5     | 0.0781 | 0.0923 | 0.1062 | 0.1197 |

# Размерные частоты и периоды

$$(\omega_j)_{\text{изг}} = (\lambda_j)_{\text{изг}} \sqrt{\frac{E}{\rho R_0^2 (1 - \mu^2)}}, \quad \text{с.}^{-1}$$

$$(T_j)_{\text{изг}} = \frac{2\pi}{(\omega_j)_{\text{изг}}} \frac{1}{3600}, \quad [\text{час}]$$

$$R_0 = 1744000 \text{ м}, \quad h = 7500 \text{ м},$$

$$\rho = 900 \text{ кг/м}^3, \quad \mu = 0.1, \quad E = 10^{10} \text{ н/м}^2.$$

**Период изменения магнитного поля Европы = 10 час**

Таблица 4

Частоты ( $\text{с}^{-1}$ ) и периоды (час)  
собственных изгибных колебаний  
оболочки

|  |                            |              |              |              |
|--|----------------------------|--------------|--------------|--------------|
| <b>j</b>   | <b>1</b>                   | <b>2</b>     | <b>3</b>     | <b>4</b>     |
| <b><math>(\omega_j)_{\text{изг}} * 10^5</math></b> | <b>0</b>                   | <b>5.84</b>  | <b>8.81</b>  | <b>11.16</b> |
| <b><math>(T_j)_{\text{изг}}</math></b>             | <b><math>\infty</math></b> | <b>29.9</b>  | <b>19.8</b>  | <b>15.1</b>  |
| <b>j</b>   | <b>5</b>                   | <b>6</b>     | <b>7</b>     | <b>8</b>     |
| <b><math>(\omega_j)_{\text{изг}} * 10^5</math></b> | <b>14.24</b>               | <b>16.82</b> | <b>19.35</b> | <b>21.81</b> |
| <b><math>(T_j)_{\text{изг}}</math></b>             | <b>12.3</b>                | <b>10.4</b>  | <b>9.0</b>   | <b>8.0</b>   |

# Заключение

В заключение следует подчеркнуть, что какой бы остроумный механизм резонансного возбуждения колебаний системы жидкость – оболочка ни был придуман, возможность возникновения этих колебаний еще не означает действительность. Полученные результаты показывают целесообразность более полного анализа сложных динамических процессов, имеющих место в океане Европы, в диапазоне соответствующих частот. Прежде всего это касается оценки амплитуд колебаний с учетом всего комплекса сопутствующих факторов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 00 – 01 – 00244).