О ПЛАНЕТАРНЫХ ВОЛНАХ В СИСТЕМЕ ОКЕАН - ЛЕДЯНАЯ ОБОЛОЧКА СПУТНИКА ЮПИТЕРА ЕВРОПА

Б.И. Рабинович (ИКИ),
Л.В. Докучаев (ЦНИИМАШ)

Электронная версия В.И. Прохоренко

Планетарные волны

- Данные наблюдений миссии Галилео говорят о возможности существования планетарных волн (ротационных и упругих мод в океане спутника Юпитера Европа. Для анализа динамики соответствующих волновых процессов используются две модели.
- Первая из них – это вращающийся океан с геометрической стратификацией его ледяной поверхности на отдельные ячейки с характерным размером порядка 100 км. Возможность появления таких ячеек, имеющих гидротермальную природу, содержащих «жидкие линзы», была постулирована и теоретически исследована в 2001 г. Р. Томсоном и Дж. Делане.

Ледяной покров океана

Ледяной покров океана моделируется пологой упругой оболочкой. В этой модели с помощью метода Бубнова – Галеркина найден спектр собственных колебаний жидкости в ячейках Томсона – Делане, соответствующих упруго-гироскопическим планетарным волнам. В целях исследования возможности резонансного возбуждения приливных колебаний жидкости в ячейках доминантные элементы этого спектра сравниваются с теоретическими значениями частот приливообразующих сил, связанных с эксцентриситетом орбиты Европы и возмущениями от других галилевых спутников Юпитера. Это позволяет обнаружить большое количество резонансов на доминантных модах с периодом от 3.5 до 7 суток в областях океана Европы, соответствующих широтам от 30° до 70°.

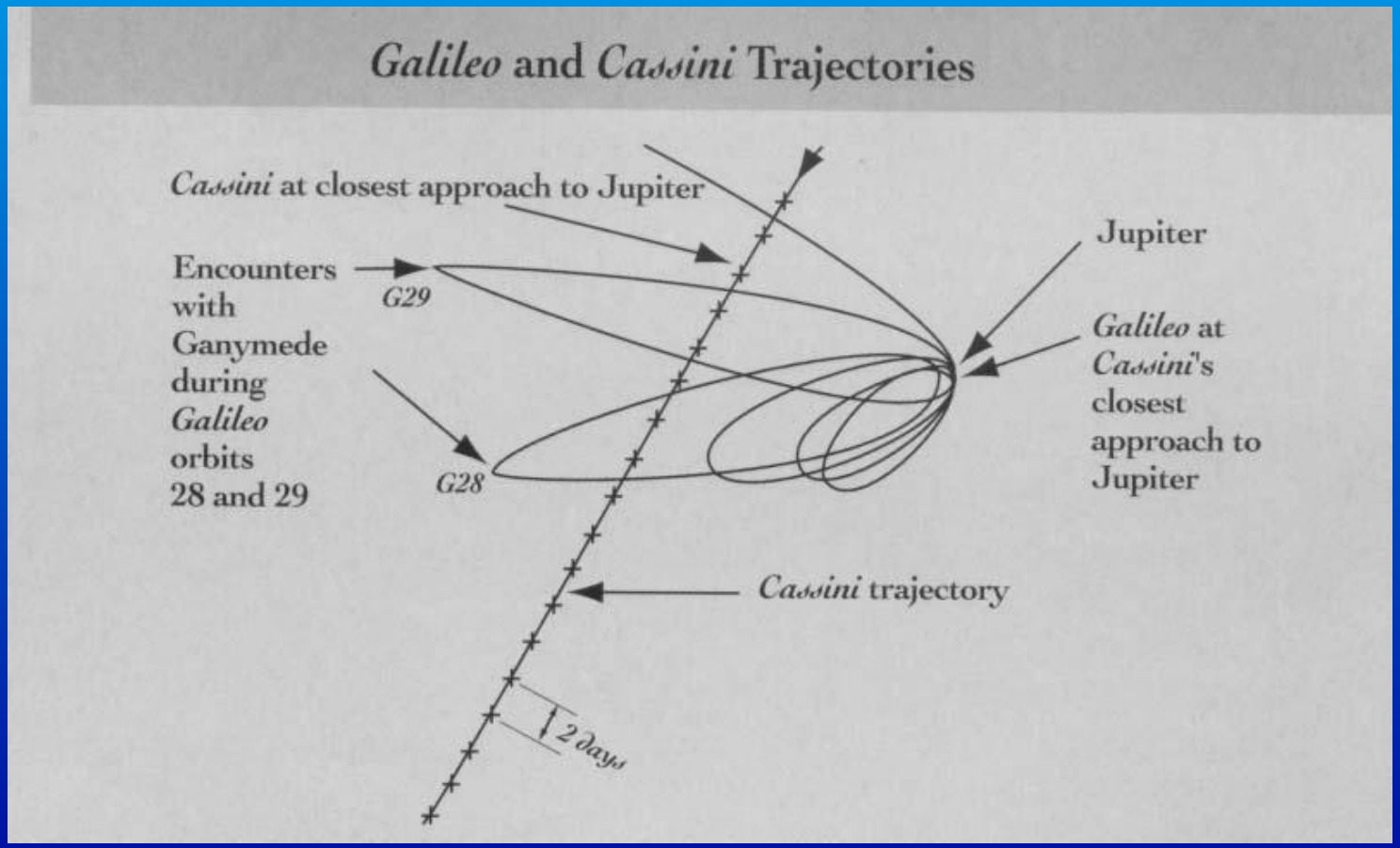
Океан в целом с ледяной оболочкой

Вторая модель – это невращающийся океан с ледяным покровом, моделируемым моментной упругой сферической оболочкой с массой, отличной от нуля. Дается постановка краевой задачи для гидроупругих планетарных волн, описываемых этой моделью, и приводится точное аналитическое решение краевой задачи в полиномах Лежандра. В полученном спектре собственных колебаний системы оболочка – жидкость обнаруживаются элементы с периодами, близкими к 10 ч. Это создает потенциальную возможность возбуждения соответствующих гидроупругих волн за счет магнитогидродинамических эффектов, связанных с нестационарным магнитным полем Европы, изменяющимся с периодом собственного вращения Юпитера, равным 10 ч.

ВВЕДЕНИЕ

Миссии NASA
Галилео и Кассини
и галилеевы спутники Юпитера

Орбиты КА
Галилео и Кассини



Сближения КА ***Галилео*** с Юпитером и его галилеевыми спутниками

Galileo's Encounters After GEM*					
			Altitude		
Orbit	*Main Target*	*Date*	*Kilometers*	*Miles*	*Notes*
C20	Callisto	May 5, 1999	1,315	817	Approach Io torus
C21	Callisto	June 30	1,047	651	Approaching Io's warm torus
C22	Callisto	August 14	2,295	1,426	Reaching outer torus
C23	Callisto	September 16	1,057	657	All magnetospheric observations
I24	Io	October 11	611	380	
I25	Io	November 26	300	186	Europa encounter included
E26	Europa	January 3, 2000	374	232	Europa magnetic field
I27	Io	February 22	200	124	
G28	Ganymede	May 20	900	559	
G29	Ganymede	December 28	1,000	621	In eclipse by Jupiter
Joint operations are proposed with *Cassini* as it encounters Jupiter on December 30, 2000.					

*GEM = *Galileo* Europa Mission

Орбиты галилеевых спутников

- Ио
- Европа
- Ганимед
- Каллисто

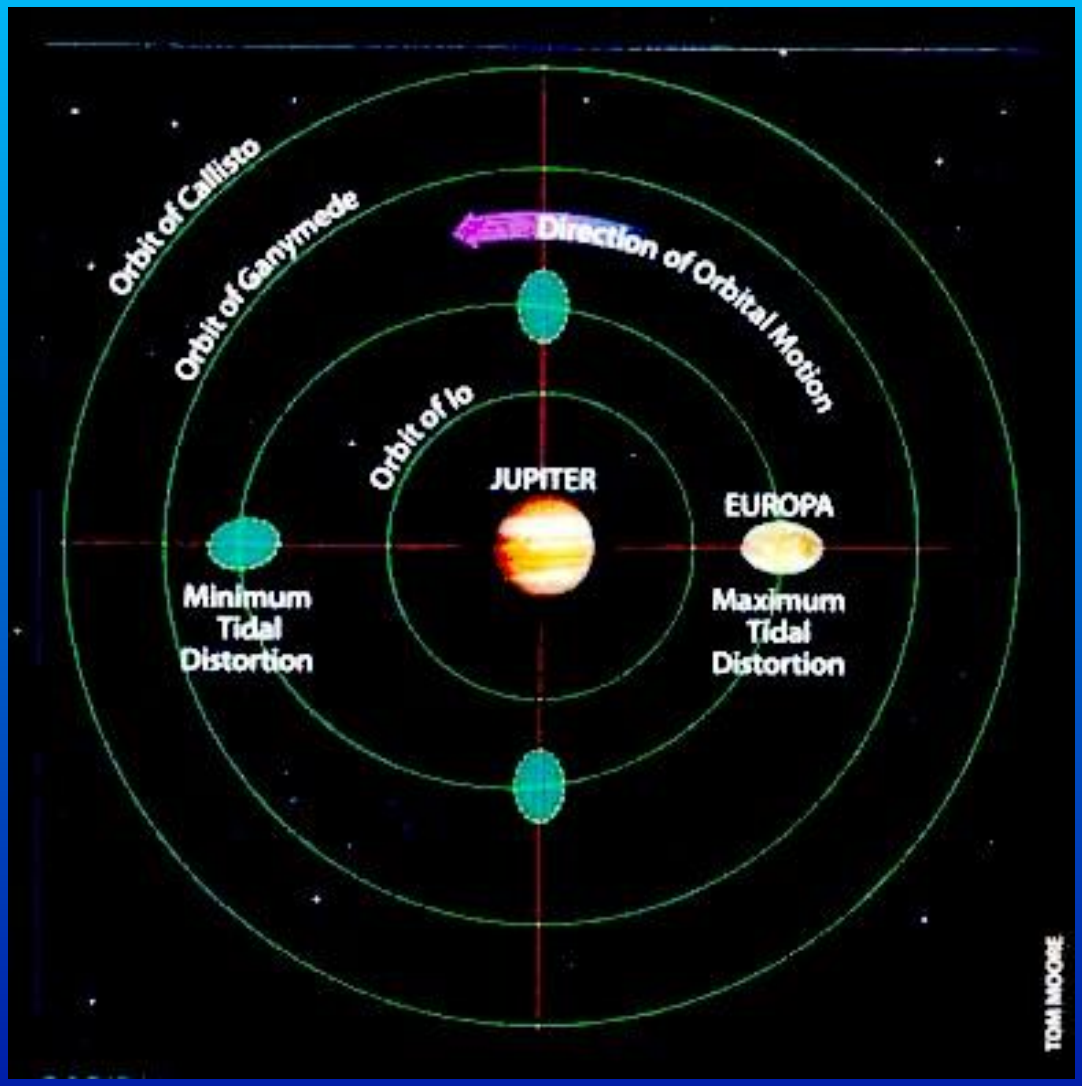


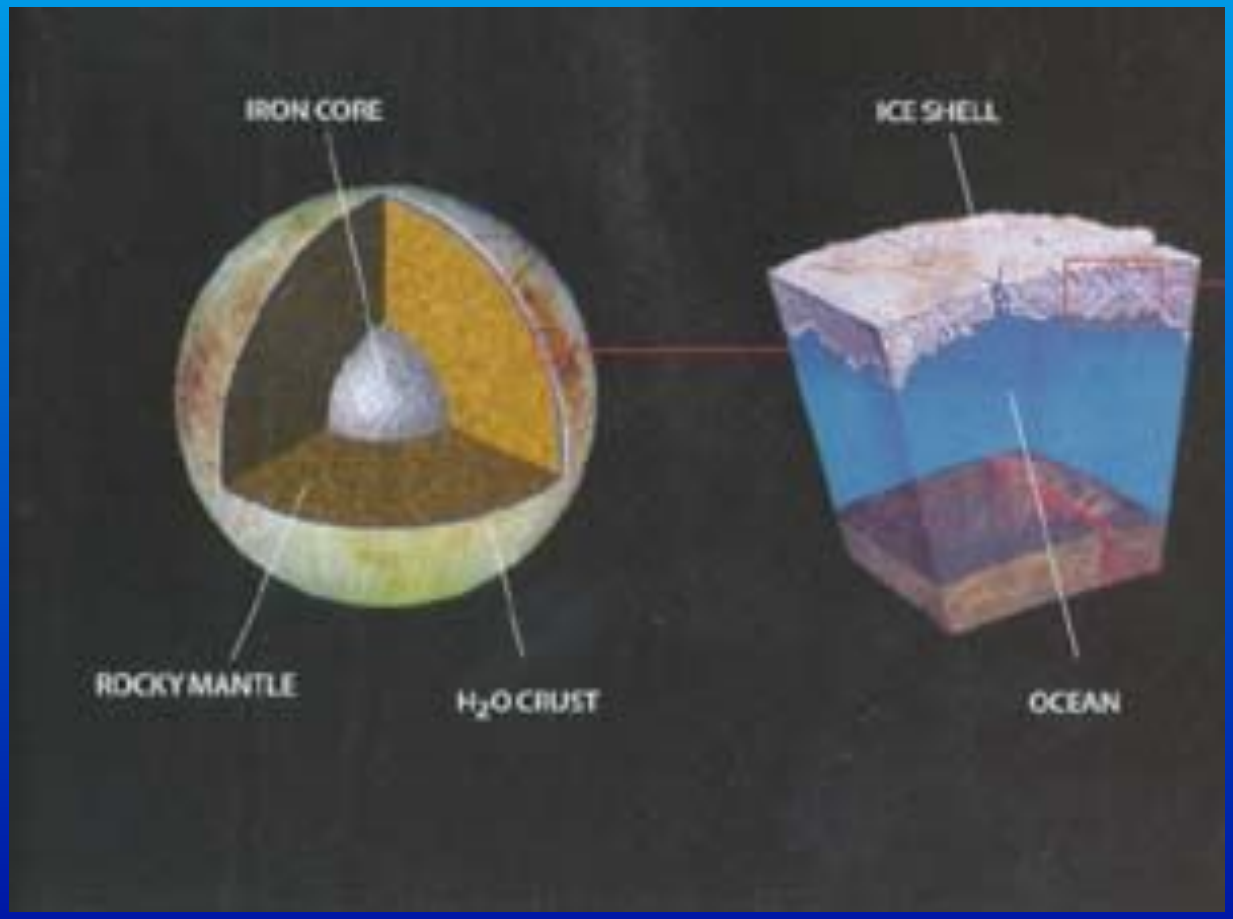
Таблица **1**

Периоды обращения галилеевых спутников в сутках

Европа	Ио	Ганимед	Каллисто
$T_{Eu} = T$	T_{io}	T_{ga}	T_{Ca}
3.55	1.80	7.15	16.70

Европа и ее ледяной покров

Океан Европы

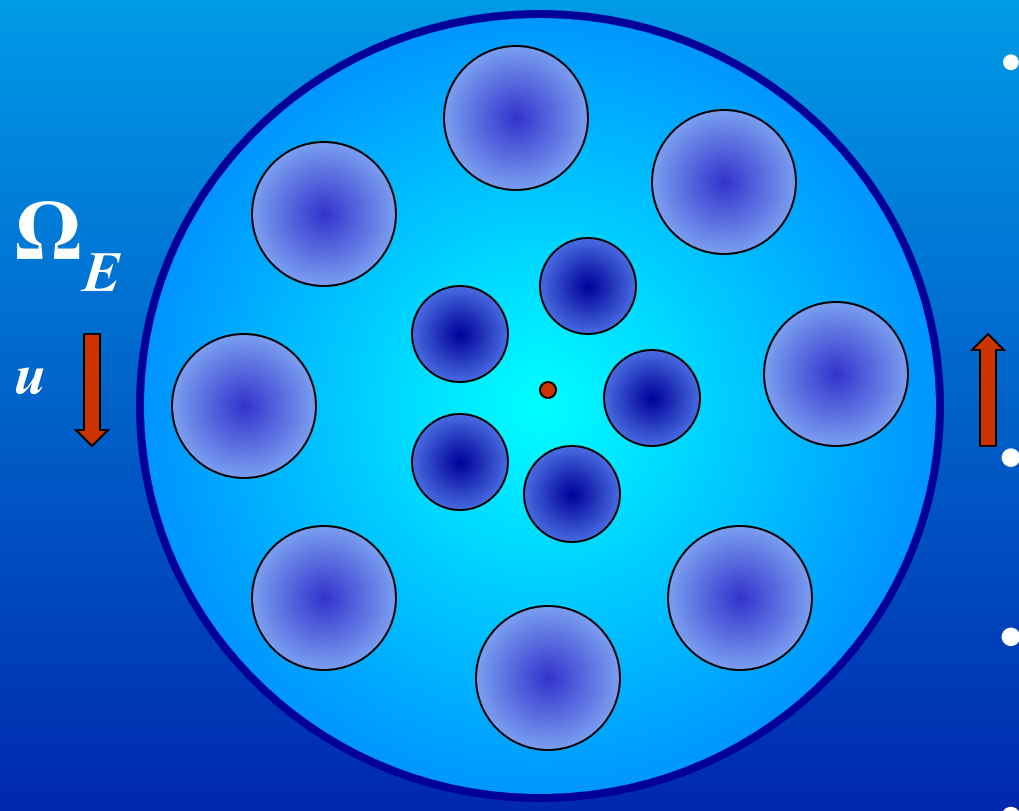


Часть I

Планетарные гироскопические волны в ячейках Томсона - Делане

Б.И. Рабинович (ИКИ)

Ячейки Томсона - Делане



- **Диаметр ячеек**
  в экваториальной области
  $2\ r_0 = 100$ км
  в полярных областях
  $2\ r_0 = 5$ км
- **Глубина жидкости**
  $H = H_0 r_0 / r$
- **Максимальная глубина**
  $H_{max} = 100$ км
- **$\Omega_{Eu} = 2\pi / T_{Eu}$; $T_{Eu} = 3.55$ час**

Краевая задача

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + j\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p^*}{\partial r} - fv_\theta = 0;$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{j}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{g}{\gamma r}\frac{\partial p^*}{\partial \theta} + fv_r = 0;$$

$$\frac{\partial (Hrv_r)}{\partial r} + \frac{\partial (Hv_\theta)}{\partial \theta} = 0; \quad p^* = \mathrm{L}(w,t);$$

$$(Hv_r)\Big|_{r=r_0} = 0; \quad \mathrm{L}_0(w)\Big|_{r=r_0} = 0.$$

Условные обозначения **(1)**

- **v – скорость жидкости;**
- ***H* – толщина слоя жидкости;**
- **γ/*g* – массовая плотность жидкости;**
- ***P** – вариация давления на жидкость со стороны упругой ледяной оболочки;**
- ***w* – перемещение элемента жидкости в направлении нормали к картинной плоскости;**
- **C – контур области S, занятой жидкостью;**
- **v_ν – компонент скорости в проекции на нормаль контуру C (орт внешней нормали ν);**

Условные обозначения **(2)**

- **∇, Δ – двумерные операторы Гамильтона и Лапласа;**
- **L и L_0 – дифференциальные операторы теории пологих оболочек;**
- ***j* – ускорение гравитационной силы на поверхности *Европы*;**
- ***f* – параметр Кориолиса, $f = 2\,\Omega \sin\phi$;**
- **Ω - угловая скорость собственного вращения *Европы*: $\Omega = 2\pi/T$;**
- **T – период ее собственного вращения, равный периоду обращения вокруг Юпитера;**
- **ϕ - широта точки области S.**

Функция тока

$$v_r = \frac{1}{Hr}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{1}{H}\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{Hr}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{H}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f}{H}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{f}{H}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right|_{r=r_0} = 0.$$

$$\rho = \frac{r}{r_0}; \quad \tilde{H} = \frac{H_0}{\rho}; \quad \tilde{H}_0 = \frac{H_0}{r_0}; \quad \tau = f\,t; \quad \Psi(\rho,\theta) = \psi\, e^{-\lambda\tau}.$$

Метод Бубнова - Галеркина

$$\Psi(\rho,\theta)=\sum_{m=1}^{l} a_m\ \chi_m(\rho,\theta),$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{a}\,\lambda+\mathbf{B}\,\mathbf{a}=0,$$

$$\alpha_{mn}=\alpha_{nm}=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \left(\frac{\partial\chi_m}{\partial\rho}\frac{\partial\chi_n}{\partial\rho}\rho^2+\frac{\partial\chi_m}{\partial\theta}\frac{\partial\chi_n}{\partial\theta}\right)d\rho;$$

$$\beta_{mn}=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \left(\frac{\partial\chi_m}{\partial\rho}\frac{\partial\chi_n}{\partial\theta}-\frac{\partial\chi_m}{\partial\theta}\frac{\partial\chi_n}{\partial\rho}\right)\rho\, d\rho;$$

$$\beta_{nm}=-\beta_{mn};\quad \beta_{mm}=0;\quad m,n=1,2,3,\ldots,l.$$

Частоты собственных колебаний жидкости

$$\left|\mathbf{A}\lambda + \mathbf{B}\right| = 0.$$

$$\lambda_n = \pm i\sigma_n;$$

$$\omega_n = f\sigma_n = 2\Omega\sigma_n \sin\varphi_0;$$

$$n = 1, 2, \ldots, l/2.$$

$$\chi_\nu^{(\mu)} = \cos\frac{\pi\nu\rho}{2}\begin{cases}\sin\mu\theta \\ \cos\mu\theta\end{cases};$$

$$\nu = 1, 3, \ldots; \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

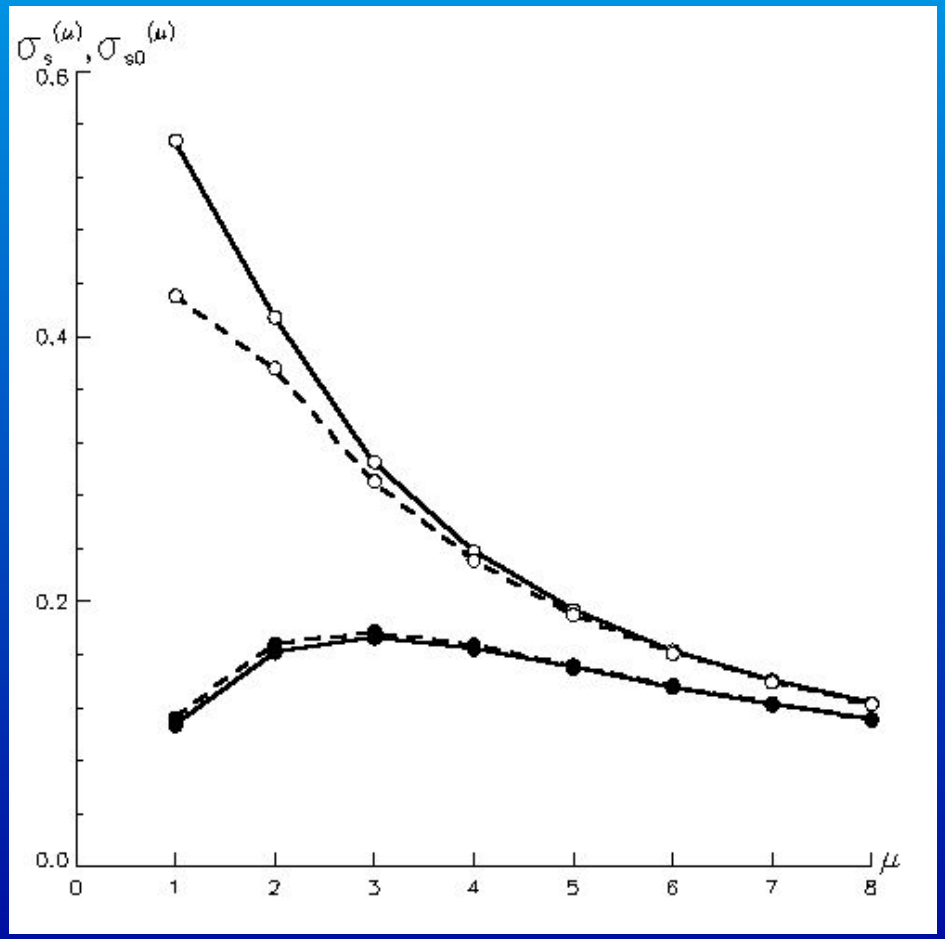
$$\lambda_{10} = \frac{i\beta_{12}}{\alpha_{11}} = i\sigma_{10}; \quad \lambda_{20} = \frac{i\beta_{12}}{\alpha_{22}} = i\sigma_{20}.$$

Таблица 2

Безразмерные частоты $\sigma_s^{(\mu)}$ и $\sigma_{s0}^{(\mu)}$ первых восьми мод собственных колебаний жидкости

μ	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_1^{(\mu)}$	0.55	0.44	0.30	0.24	0.19	0.16	0.14	0.12
$\sigma_{10}^{(\mu)}$	0.43	0.38	0.29	0.23	0.19	0.16	0.14	0.12
$\sigma_2^{(\mu)}$	0.11	0.16	0.17	0.16	0.15	0.13	0.12	0.11
$\sigma_{20}^{(\mu)}$	0.11	0.17	0.18	0.17	0.15	0.14	0.12	0.11

Безразмерные частоты собственных колебаний жидкости в ячейках



$\sigma_s^{(\mu)}$;

$\sigma_{s0}^{(\mu)}$;

∘ - s = 1;

· - s = 2

Резонансное возбуждение приливных колебаний жидкости

$$\sigma_s^{(\mu)} = F(|\varphi_0|) = \frac{|\omega_s^{(\mu)}|}{2\Omega \sin|\varphi_0|} \quad |\omega_s^{(\mu)}| = |\Omega_n^*|; \quad \Omega_n^* = \frac{\Omega_n}{2}.$$

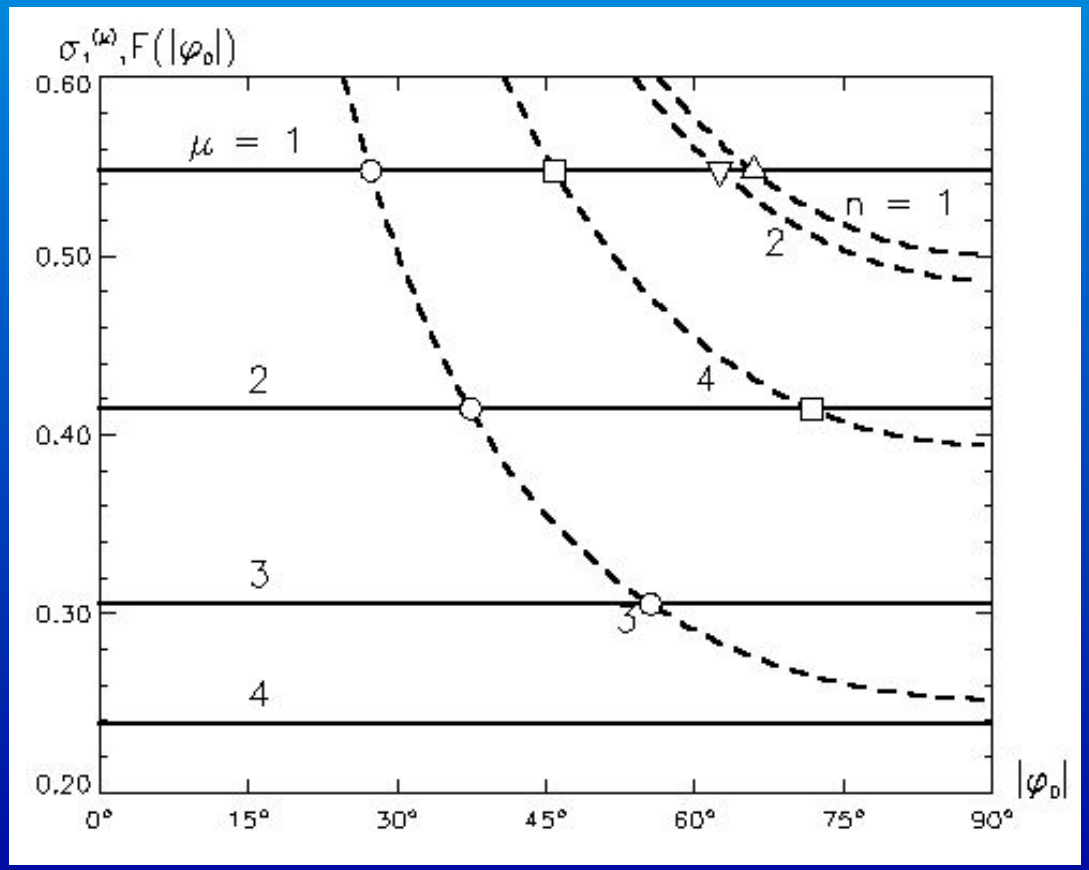
$$|\omega_s^{(\mu)}| = |\Omega_n|.$$

$$\Omega_1 = \Omega_{Eu} = \Omega; \quad \Omega_2 = \Omega_{Io} - \Omega;$$

$$\Omega_3 = \Omega_{Ga} - \Omega; \quad \Omega_4 = \Omega_{Ca} - \Omega;$$

$$\Omega_{Io} = \frac{2\pi}{T_{Io}}; \quad \Omega_{Ga} = \frac{2\pi}{T_{Ga}}; \quad \Omega_{Ca} = \frac{2\pi}{T_{Ca}}.$$

Частоты, соответствующие возбуждению приливных колебаний жидкости в ячейках (основной резонанс, s = 1)



— $\sigma_s^{(\mu)}$;

— $F(|\Phi_0|)$;

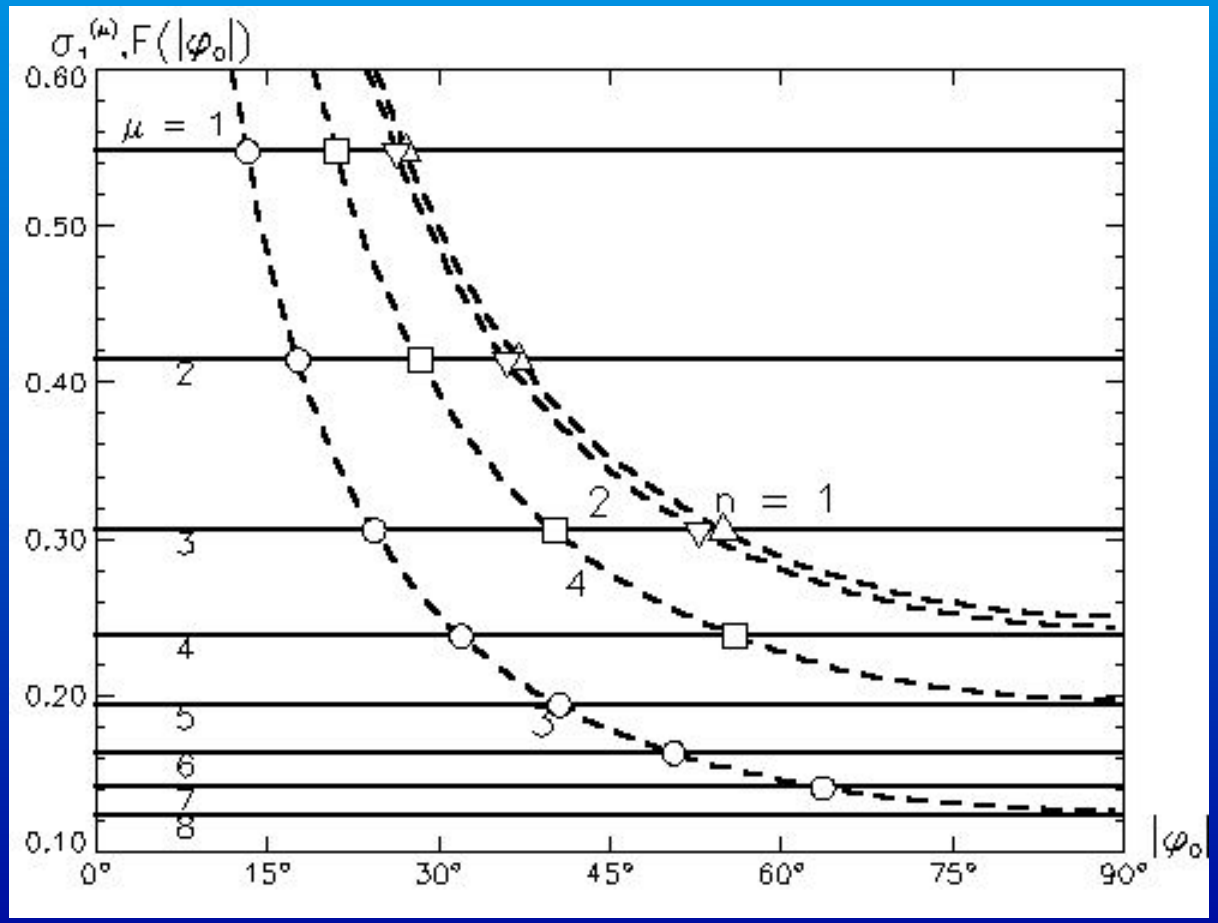
Δ - *Европа*;

∇ - *Ио*;

∘ - *Ганимед*;

□ - *Каллисто*

Частоты, соответствующие возбуждению приливных колебаний жидкости в ячейках (параметрический резонанс)



s = 1;

— $\sigma_s^{(\mu)}$;

— $F(|\phi_0|)$;

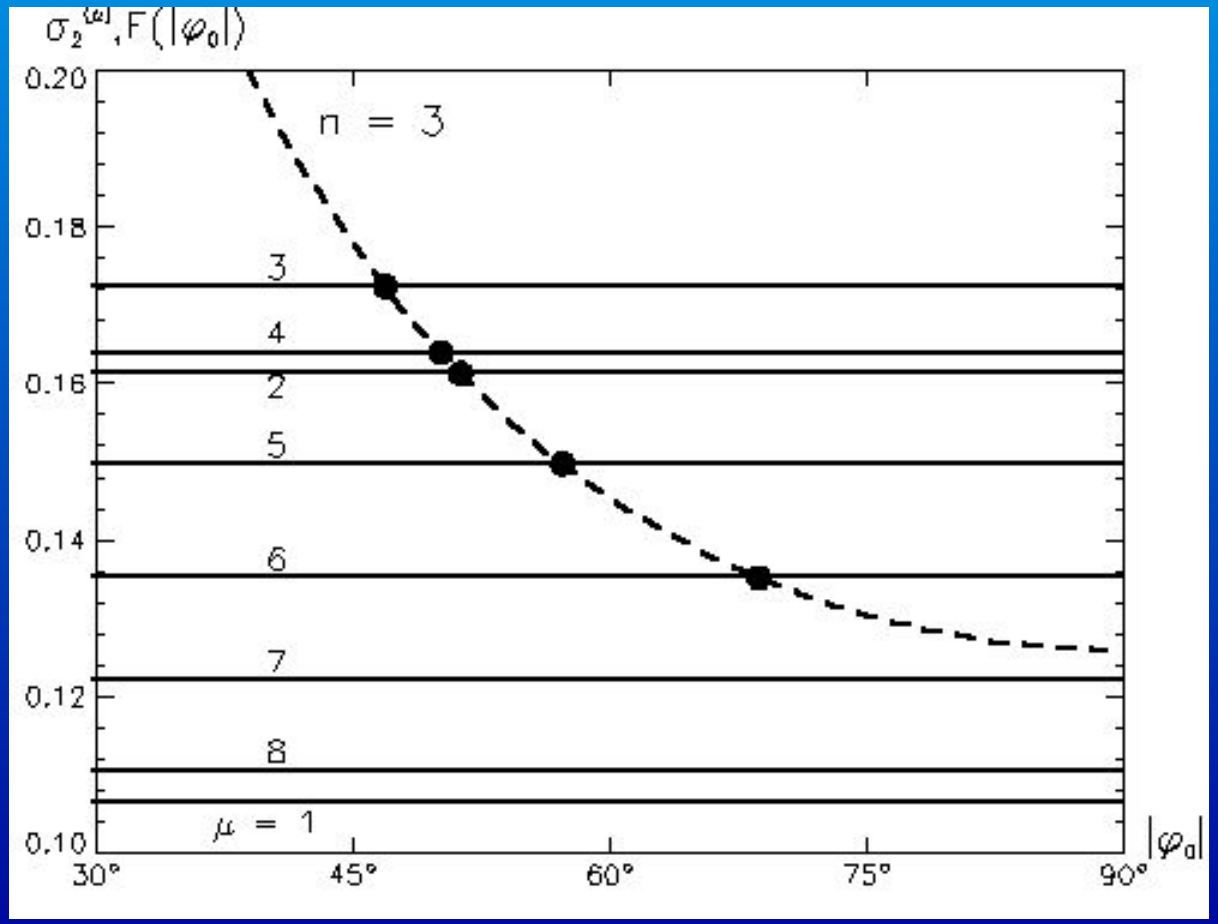
Δ - *Европа*;

∇ - *Ио*;

∘ - *Ганимед*;

□ - *Каллисто*

Частоты, соответствующие возбуждению приливных колебаний жидкости в ячейках (параметрический резонанс)



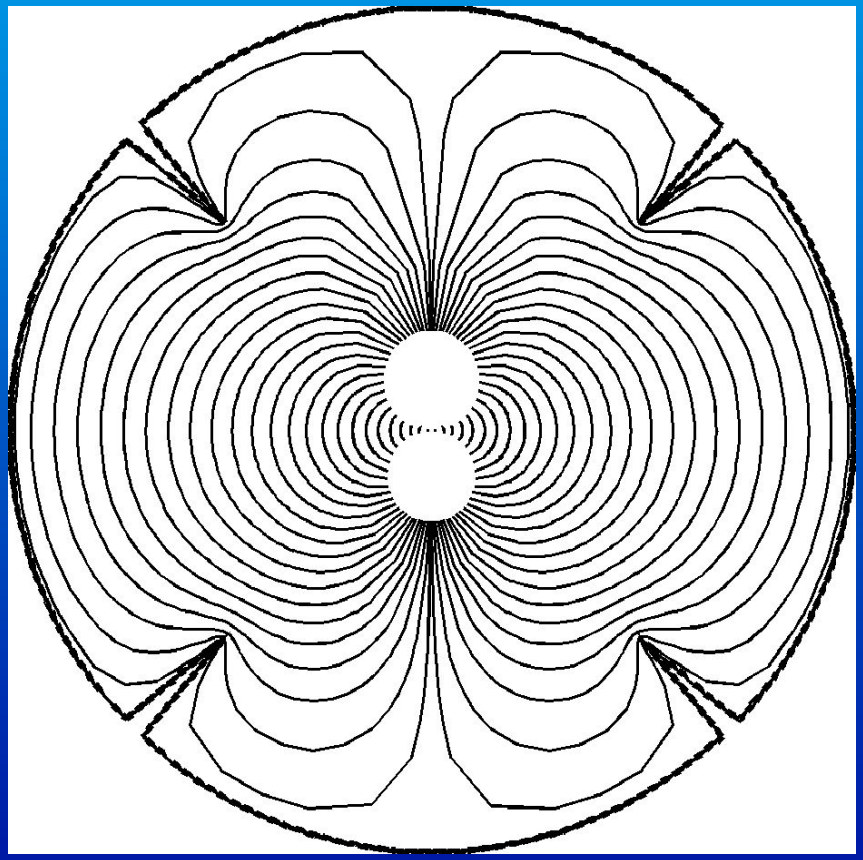
s = 2;

— $\sigma_s^{(\mu)}$;

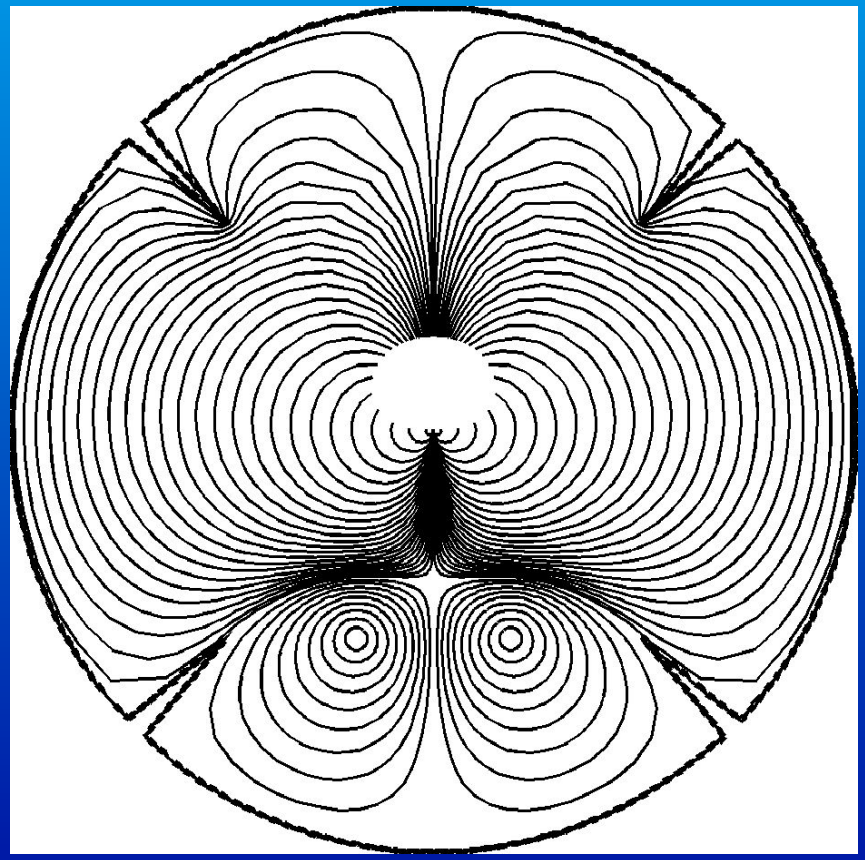
— $F(|\phi_0|)$;

· - ***Ганимед***

Линии тока, соответствующие колебаниям жидкости в круглом водоеме с радиальными ребрами



Безвихревое движение



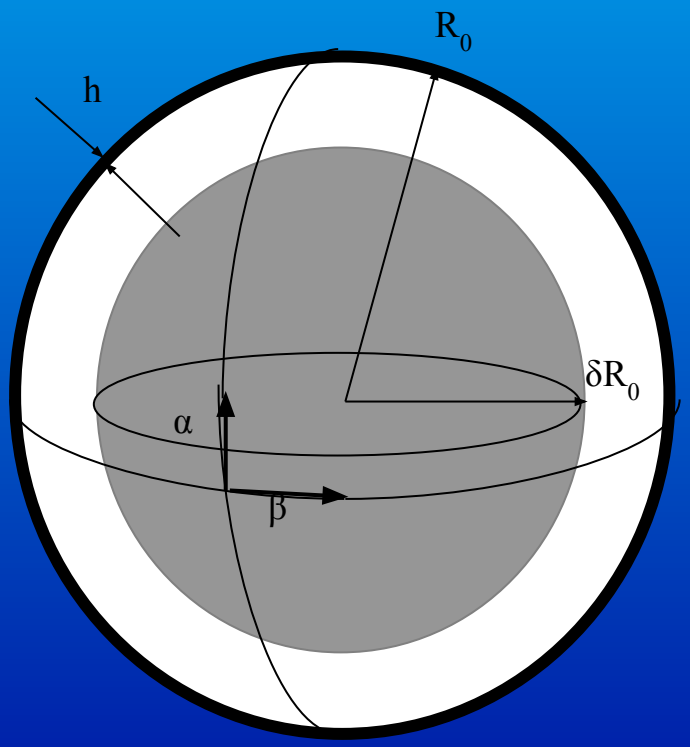
Движение с локальными вихревыми зонами

Часть II

Планетарные гидроупругие волны в ледяной оболочке Европы

Л.В. Докучаев (ЦНИИМАШ)

Океан в целом и его ледяная оболочка



- $2R_0 \sim 3500$ km
- $h \sim 7\text{-}10$ km
- $H = R_0 - \delta R_0 \sim 100$ km,

Общие уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right) - \mathbf{V} \times \mathrm{rot}\mathbf{V} +$$

$$+ 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) =$$

$$= \mathbf{j} + \frac{1}{\rho_0}(-\nabla P + \mathbf{F}_{\text{прил}} + \mathbf{F}_{\text{вязк}});$$

$$div\mathbf{V} = 0$$

Уравнения колебаний сферической оболочки

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+(1-\mu)\left(-\frac{\partial\chi}{L\partial\beta}+u-\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)-\frac{(1-\mu^2)}{E}\rho R_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial\theta}{L\partial\beta}+(1-\mu)\left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}+v-\frac{\partial w}{L\partial\beta}\right)-\frac{(1-\mu^2)}{E}\rho R_0^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,$$

$$(1+\mu)\theta+c^2(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)w+\frac{(1-\mu^2)}{E}\rho R_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{1-\mu^2}{Eh}R_0^2F.$$

Вспомогательные переменные

$$\theta = \frac{\partial(Lu)}{L\partial\alpha} + \frac{\partial v}{L\partial\beta} + 2w, \quad 2\chi = \frac{\partial(Lv)}{L\partial\alpha} - \frac{\partial u}{L\partial\beta}, \quad c^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R_0}\right)^2,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{L\partial\alpha}\left(L\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial^2}{(L\partial\beta)^2}, \quad L = \sin\alpha.$$

$$F = -\rho_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - jw\right)\Big|_{R=R_0}; \quad \mathbf{V} = grad\,\Phi.$$

u(α,β,t),v(α,β,t) – тангенциальные перемещения,
w(α,β,t) – перемещения по нормали,
α, β - географические широта и долгота

Потенциал смещений Краевая задача и фундаментальные решения

$$\Delta\Phi = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right|_{R=R_0} = w(\alpha,\beta,t), \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right|_{R=\delta R_0} = 0, \quad \int_S w(\alpha,\beta,t)dS = 0$$

$$\Phi^0(R,\alpha,\beta,t) = X(R)Y(\alpha)Z(\beta)e^{i\omega t};$$

$$Z(\beta) = C_1 \sin m\beta + C_2 \cos m\beta;$$

$$Y(\alpha) = P_n^m(\cos\alpha);$$

$$X_n(R) = \frac{R_0}{1-\delta^{2n+1}}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{R}{R_0}\right)^n + \frac{\delta^{2n+1}}{n+1}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1}\right)$$

Разложение решений в ряды

$$u = u_m(\alpha)\sin m\beta\, e^{i\omega t}, \quad v = v_m(\alpha)\cos m\beta\, e^{i\omega t},$$

$$w = w_m(\alpha)\sin m\beta\, e^{i\omega t},$$

$$\Phi_m(R,\alpha)\sin m\beta\, e^{i\omega t}, \quad F = \rho_0\omega^2\Phi_m(R_0,\alpha)\sin m\beta\, e^{i\omega t}.$$

$$u_m = \sum_{n=m}(A_n(P_n^m)' + B_n\frac{m}{L}P_n^m), \quad v_m = \sum_{n=m}(A_n\frac{m}{L}P_n^m + B_n(P_n^m)'),$$

$$w_m = \sum_{n=m} Q_n P_n^m. \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha} \equiv ()';$$

$$\Phi_m = \sum_{n=m} a_{nm} X_n(R) P_n^m(\cos\alpha), \quad a_{nm} = \frac{1}{N_{nm}^2}\int_0^\pi w_m(\alpha)P_n^m(\cos\alpha)L d\alpha$$

Характеристическое уравнение 1

$$(2(1+\mu)+c^2(1+\mu-k_j)(2-k_j)-$$

$$-\lambda^2(1+aX_j(1)))Q_j-(1+\mu)k_jA_j=0;$$

$$(1+\mu)k_jQ_j-k_j(k_j-1+\mu-\lambda^2)A_j=0;$$

$$k_j(\tfrac{1}{2}(1-\mu)(k_j-2)-\lambda^2)B_j=0.$$

Характеристическое уравнение 2

$$(\lambda^2(1+aX_j(1))-2(1+\mu)-$$

$$-c^2(k_j-2)(k_j-1-\mu))(\lambda^2-k_j+1-\mu)-(1+\mu)^2k_j=0;$$

$$k_j=j(j+1),\quad a=\frac{\rho_0R_0}{\rho h},\quad X_j(1)=\frac{j(1+\delta^{2j+1})+1}{k_j(1-\delta^{2o+1})}.$$

Таблица **3**
Безразмерные частоты собственных изгибных колебаний оболочки $\lambda_{m,n}$

n \ m	1	2	3	4
0;1	0	0.0320	0.0483	0.0635
2	0.0320	0.0483	0.0635	0.0781
3	0.0483	0.0635	0.0781	0.0923
4	0.0635	0.0781	0.0923	0.1062
5	0.0781	0.0923	0.1062	0.1197

Размерные частоты и периоды

$$(\omega_j)_{\text{изг}} = (\lambda_j)_{\text{изг}} \sqrt{\frac{E}{\rho R_0^2 (1-\mu^2)}}, \qquad \text{с.}^{-1}$$

$$(T_j)_{\text{изг}} = \frac{2\pi}{(\omega_j)_{\text{изг}}} \frac{1}{3600}, \qquad [\text{час}]$$

R_0 = 1744000 м, h = 7500 м,
ρ = 900 кг/м^3, μ = 0.1, E = 10^{10} н/м^2.

Период изменения магнитного поля Европы = 10 час

Таблица 4
Частоты (c^{-1}) и периоды (час) собственных изгибных колебаний оболочки

j	1	2	3	4
$(\omega_j)_{изг}*10^5$	0	5.84	8.81	11.16
$(T_j)_{изг}$	∞	29.9	19.8	15.1
j	5	6	7	8
$(\omega_j)_{изг}*10^5$	14.24	16.82	19.35	21.81
$(T_j)_{изг}$	12.3	10.4	9.0	8.0

Заключение

В заключение следует подчеркнуть, что какой бы остроумный механизм резонансного возбуждения колебаний системы жидкость – оболочка ни был придуман, возможность возникновения этих колебаний еще не означает действительность. Полученные результаты показывают целесообразность более полного анализа сложных динамических процессов, имеющих место в океане Европы, в диапазоне соответствующих частот. Прежде всего это касается оценки амплитуд колебаний с учетом всего комплекса сопутствующих факторов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 00 – 01 – 00244).