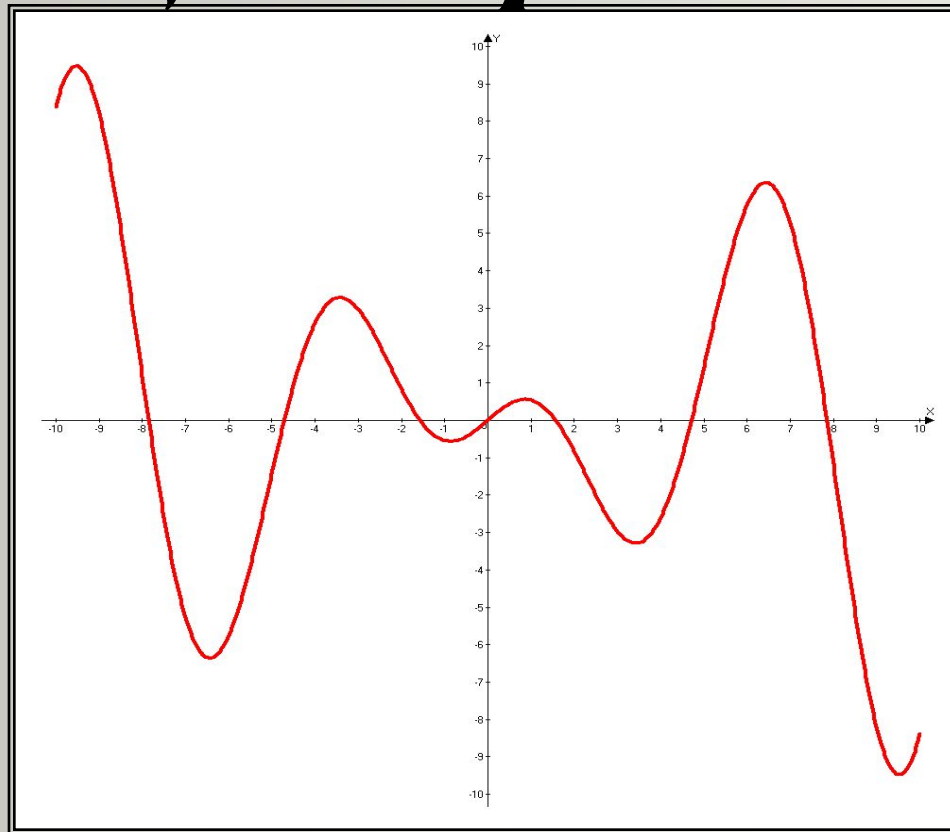


# *Исследование функций и построение графиков с помощью производной*



*«...нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира...»*

*Н.И. Лобачевский*

*Скажи мне, и я забуду.*

*Покажи мне, и я запомню.*

*Дай мне действовать самому,*

*И я научусь.*

*Конфуций*

# Цели урока:

## □ *Образовательные.*

### **Формировать:**

- - навыки прикладного использования аппарата производной;
- - выявить уровень овладения учащимися комплексом знаний и умений по исследованию функции и ликвидировать пробелы в знаниях в соответствии с требованиями к математической подготовке учащихся.

## □ *Развивающие.*

### **Развивать:**

- - способности к самостоятельному планированию и организации работы
- - навыки коррекции собственной деятельности через применение информационных технологий;
- - умение обобщать, абстрагировать и конкретизировать знания при исследовании функции.

## □ *Воспитательные.*

### **Воспитывать:**

- - познавательный интерес к математике;
- - информационную культуру и культуру общения;
- - самостоятельность, способность к коллективной работе.

# *1 этап. Актуализация ЗУН, необходимых для творческого применения знаний*

- *Необходимое условие возрастания и убывания функции*
- *Достаточное условие возрастания и убывания функции*
- *Необходимое условие экстремума. (теорема Ферма)*
- *Признак максимума функции.*
- *Признак минимума функции.*
- *Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции*

# Необходимое условие возрастания и убывания функции

Т е о р е м а.

Если дифференцируемая функция  $f(x)$ ,  $x \in (a;b)$ , возрастает (убывает) на  $(a;b)$ , то  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) для любого  $x$  из интервала  $(a;b)$ .



# Достаточные условия возрастания и убывания функции

Теорема Лагранжа.

Если функция  $f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ ,  
непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  
дифференцируема на интервале  
 $(a; b)$ , то найдётся точка  $c \in (a; b)$   
такая, что имеет место формула

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$$



# Достаточное условие возрастания функции

Теорема.

Если функция  $f$  имеет неотрицательную производную в каждой точке интервала  $(a;b)$ , то функция  $f$  возрастает на интервале  $(a;b)$ .



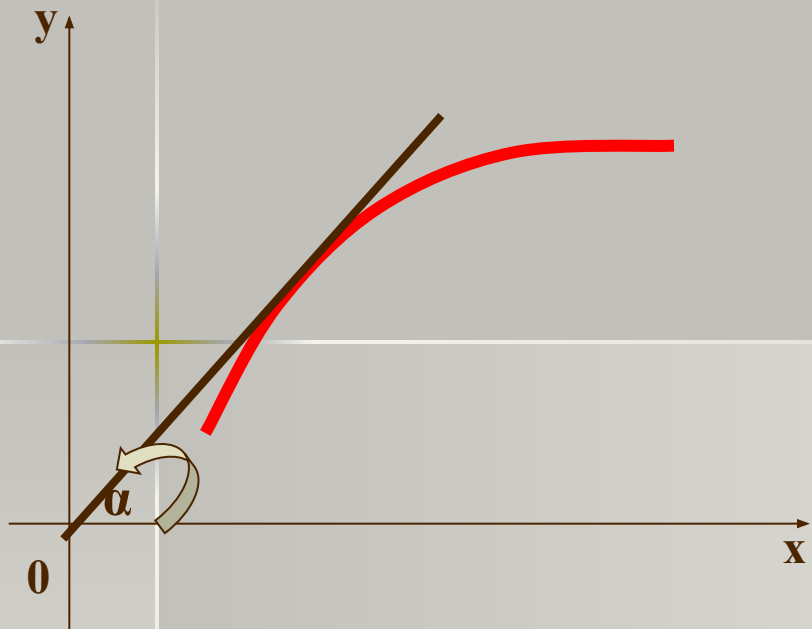
# Достаточное условие убывания функции

Теорема.

**Если функция имеет  
неположительную  
производную в каждой точке  
интервала  $(a;b)$ , то функция  $f$   
убывает на интервале  $(a;b)$ .**





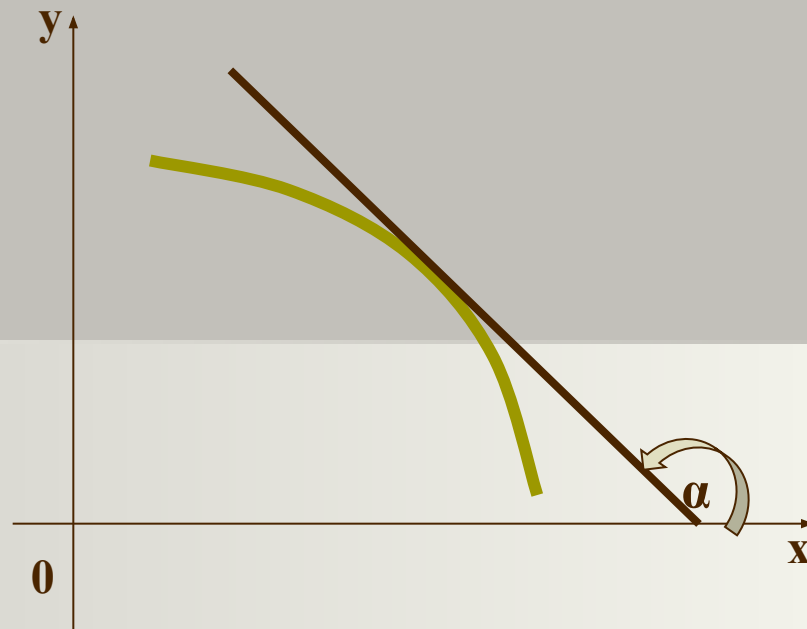


**Функция возрастает**

$$\alpha < 90^0$$

$$\text{tg } \alpha > 0$$

$$f'(x) > 0$$



**Функция убывает**

$$\alpha > 90^0$$

$$\text{tg } \alpha < 0$$

$$f'(x) < 0$$



# *Правило нахождения интервалов монотонности*

1) Вычисляем производную  $f'(x)$  данной функции  $f(x)$ , а затем находим точки, в которых  $f'(x)$  равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции  $f(x)$



# *Правило нахождения интервалов монотонности*

**2) Критическими точками область определения функции  $f(x)$  разбивается на интервалы, на каждом из которых производная  $f'(x)$  сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.**



# *Правило нахождения интервалов монотонности*

3) Определим знак  $f'(x)$  на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале  $f'(x) \geq 0$ , то на этом интервале  $f(x)$  возрастает, если же  $f'(x) \leq 0$ , то на таком интервале  $f(x)$  убывает.



# Исследование экстремумов функции

Необходимое условие экстремума.

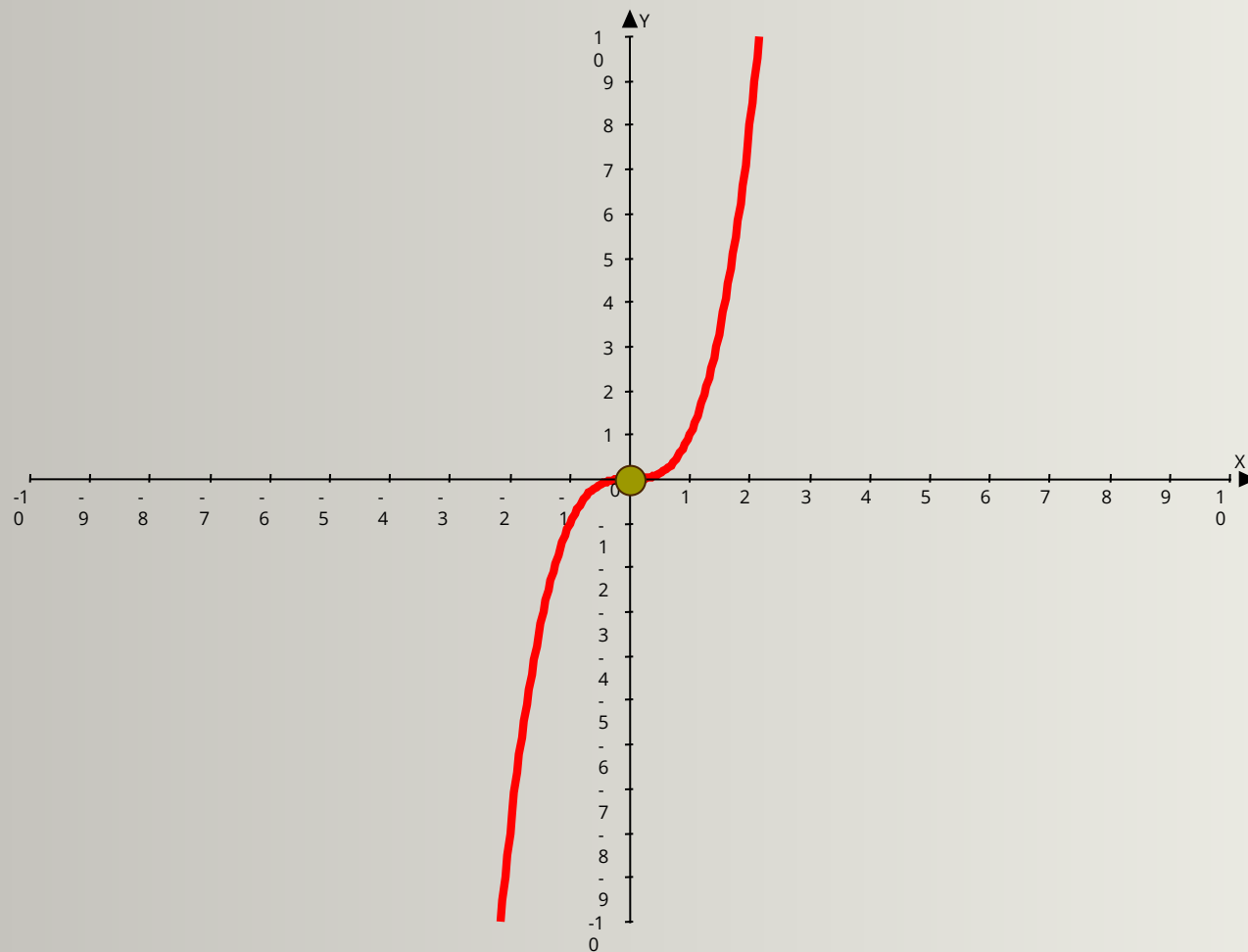
(теорема Ферма)

Если точка  $x_0$  является точкой экстремума функции  $f$  и в этой точке существует производная  $f'(x)$ , то она равна нулю:

$$f'(x) = 0.$$

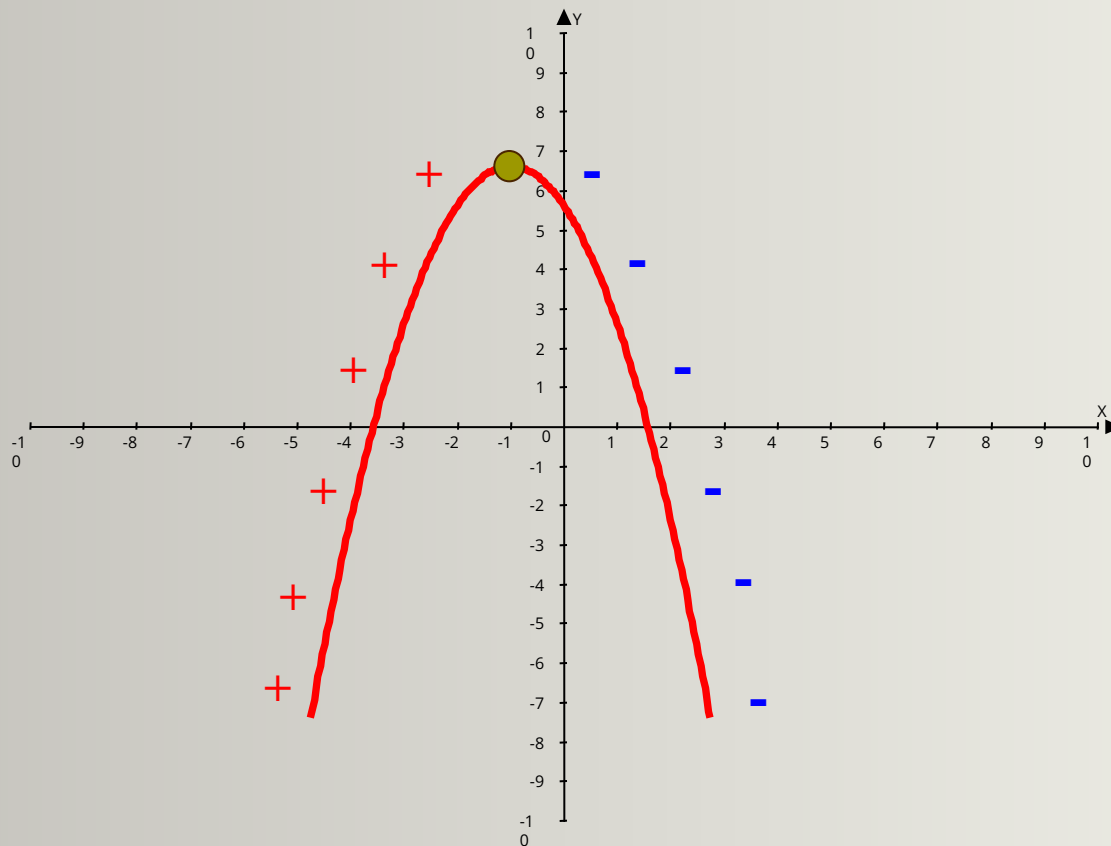


**Теорема Ферма лишь необходимое условие экстремума. Например, производная функции  $f(x) = x^3$  обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет.**



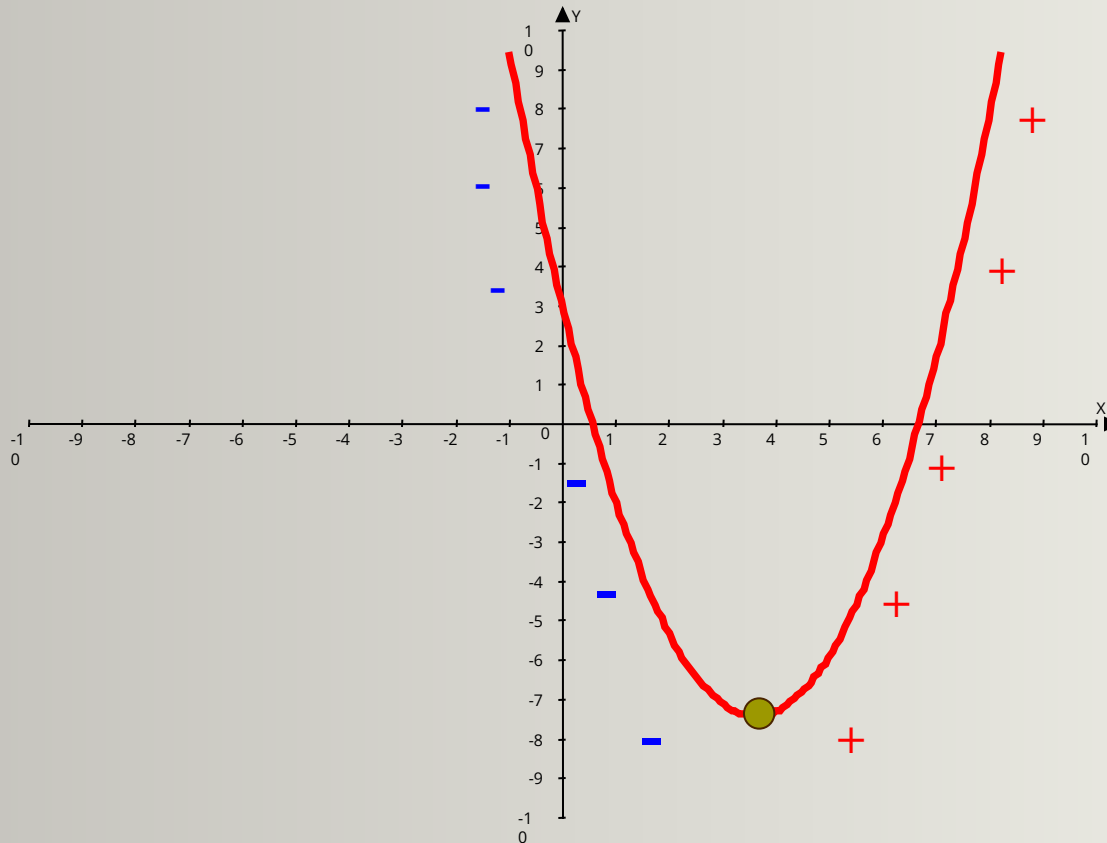
# Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак максимума функции. Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , а  $f'(x) > 0$  на интервале  $(a; x_0)$ , и  $f'(x) < 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой максимума функции  $f$ .



# Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак минимума функции. Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $f'(x) < 0$  на интервале  $(a; x_0)$  и  $f'(x) > 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой минимума функции  $f$

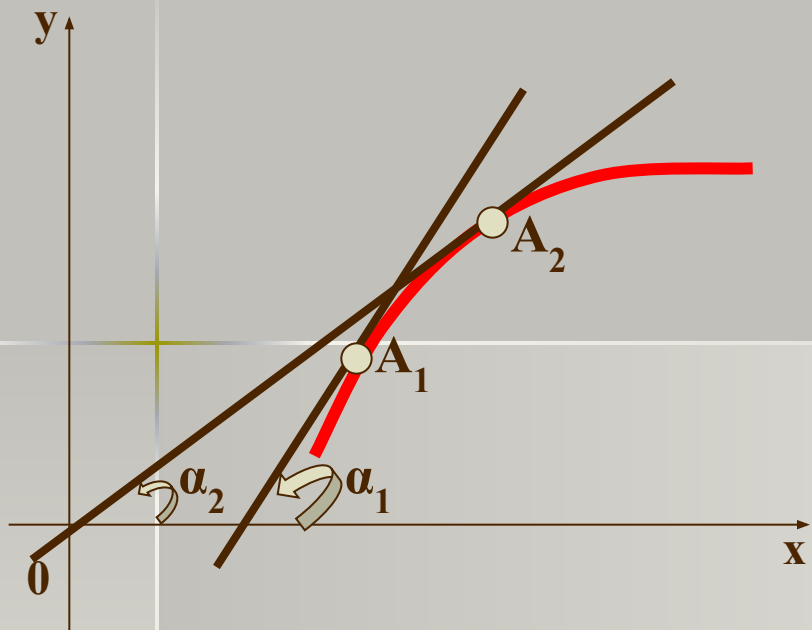




# Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

**Т е о р е м а.** Пусть функция  $f(x)$ ,  $x \in (a;b)$ , имеет первую и вторую производные. Тогда, если  $f''(x) < 0$  для всех  $x \in (a;b)$ , то на интервале  $(a;b)$  график функции  $f(x)$  выпуклый вверх, если же  $f''(x) > 0$  для всех  $x \in (a;b)$ , то график функции  $f(x)$  выпуклый вниз на  $(a;b)$ .





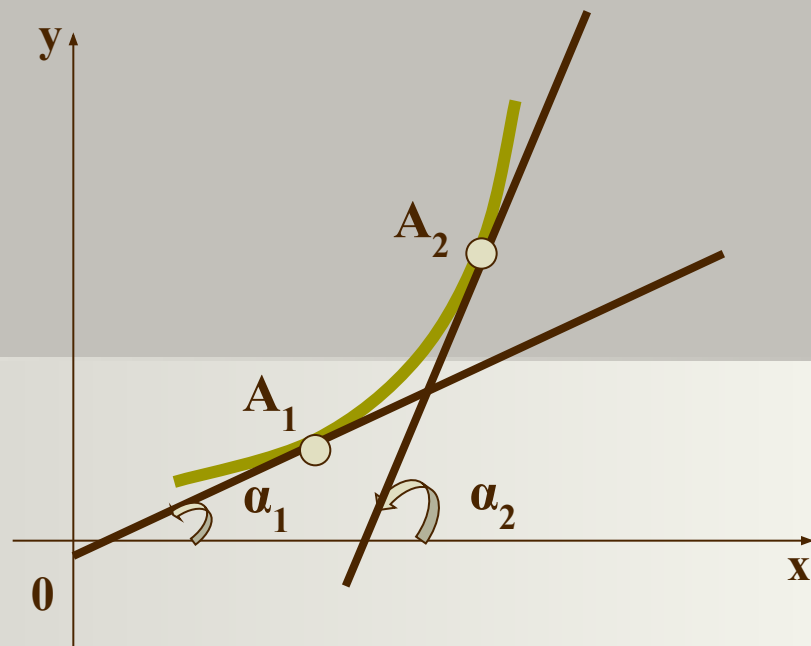
## График выпуклый

$\alpha$  - убывает

$\text{tg } \alpha$  - убывает

$f'(x)$  – убывает

$$f''(x) < 0$$



## График вогнутый

$\alpha$  - возрастает

$\text{tg } \alpha$  - возрастает

$f'(x)$  – возрастает

$$f''(x) > 0$$



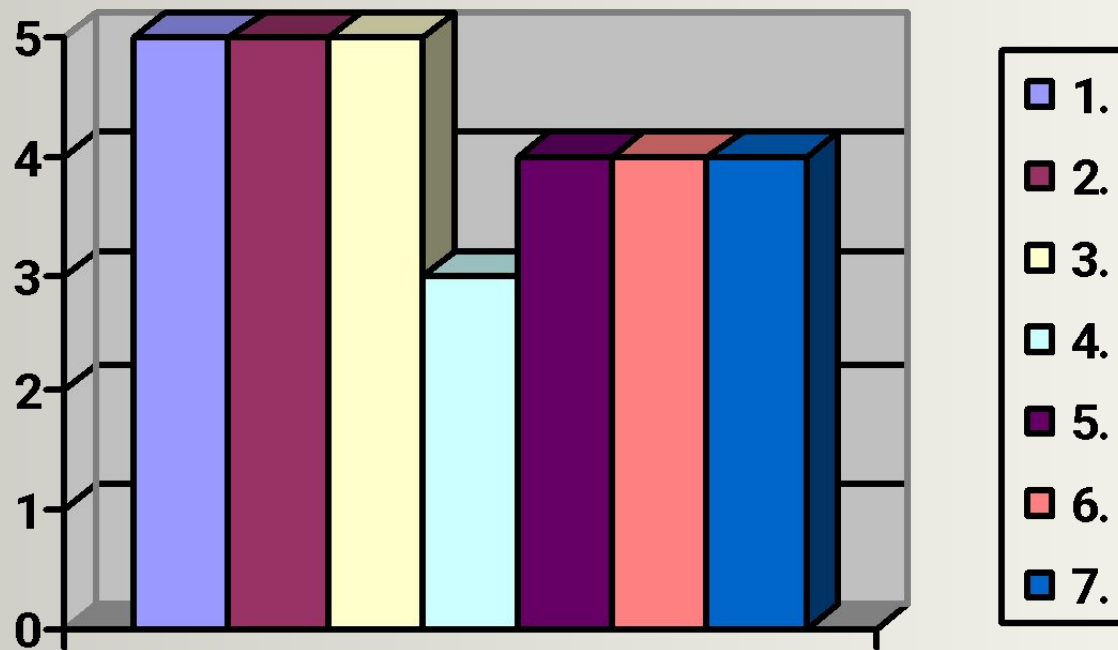
## Точки перегиба

- 1) Найти критические точки функции по второй производной.
- 2) Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности критической точки.

Если  $f''(x)$  меняет свой знак при переходе аргумента через критическую точку  $x_0$ , то  $(x_0; f(x_0))$  - точка перегиба графика данной функции

## Анализ компетентности учащихся в теоретических вопросах темы (например)


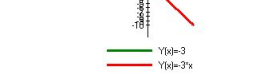
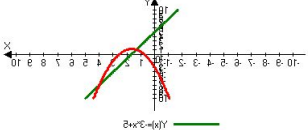
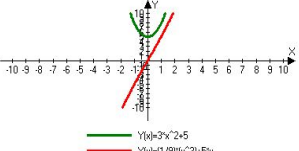
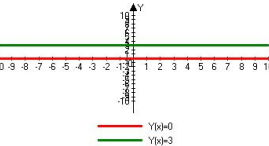
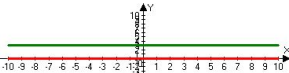
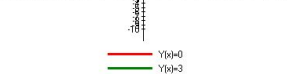
1.	5
2.	5
3.	5
4.	3
5.	4
6.	4
7.	4



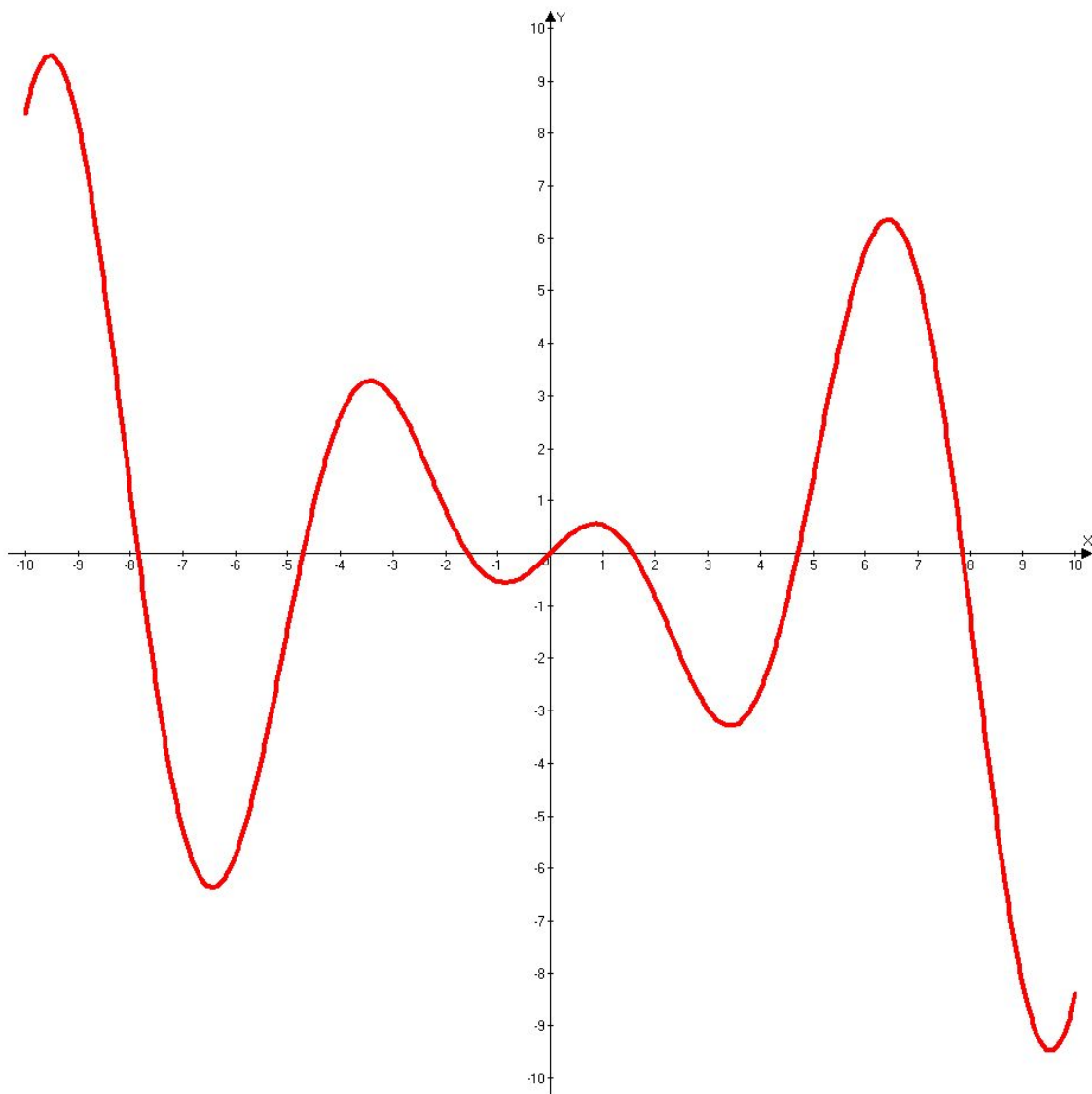
*II этап. Обобщение и систематизация  
знаний и способов деятельности*

*Задание для всех учащихся.*

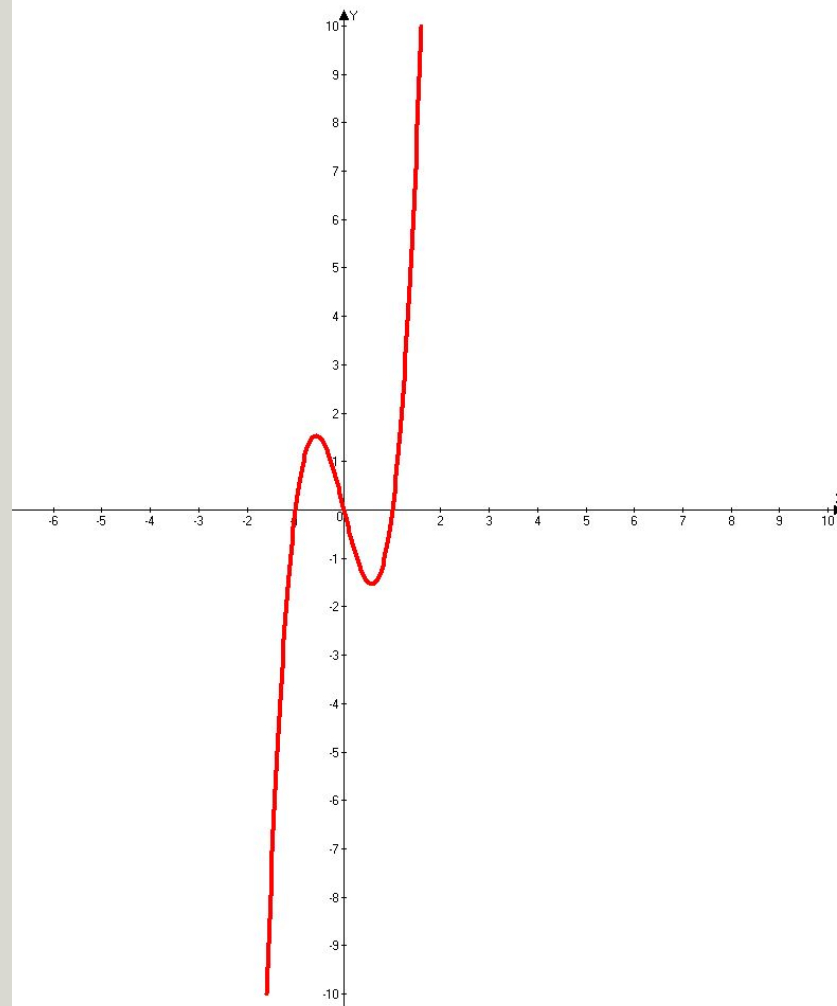
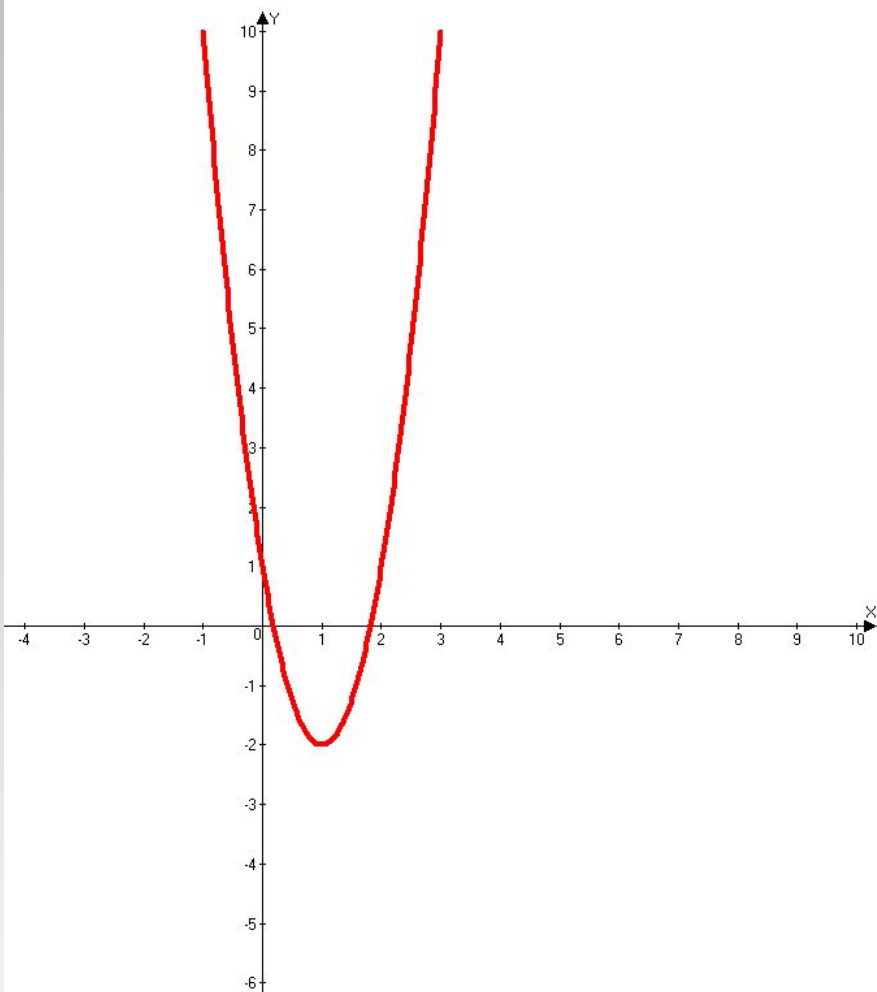
**Заполните таблицу**

то $y$ если	Моноotonно убывает	Имеет максимум во внутренней точке	Имеет минимум во внутренней точке	Постоянна	Моноotonно возрастает
$y' = -3$	 				
$y' = -3x + 5$					
$y' = 3x + 5$					
$y' = 3x^2 + 5$					
$y' = 0$				 	

**№2 По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум, имеет перегиб.,**

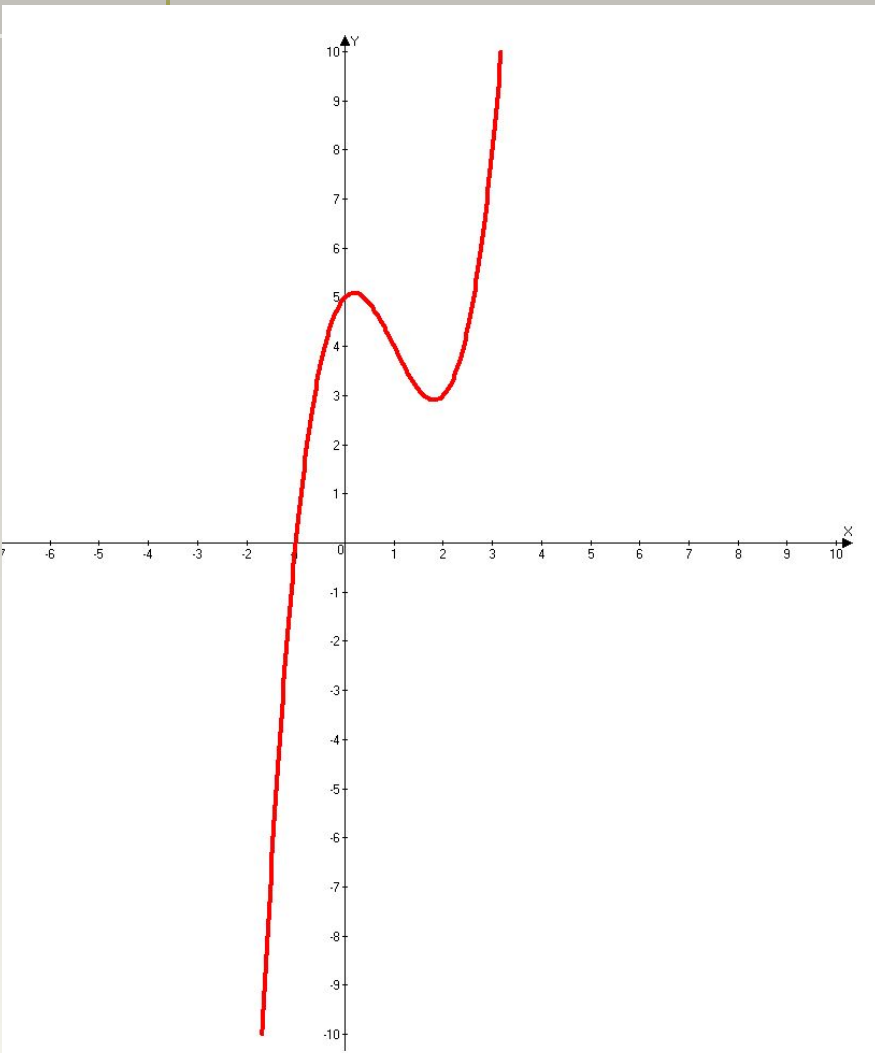


3. На рисунке изображён график производной функции  $y=f(x)$ . Сколько точек максимума имеет эта функция?

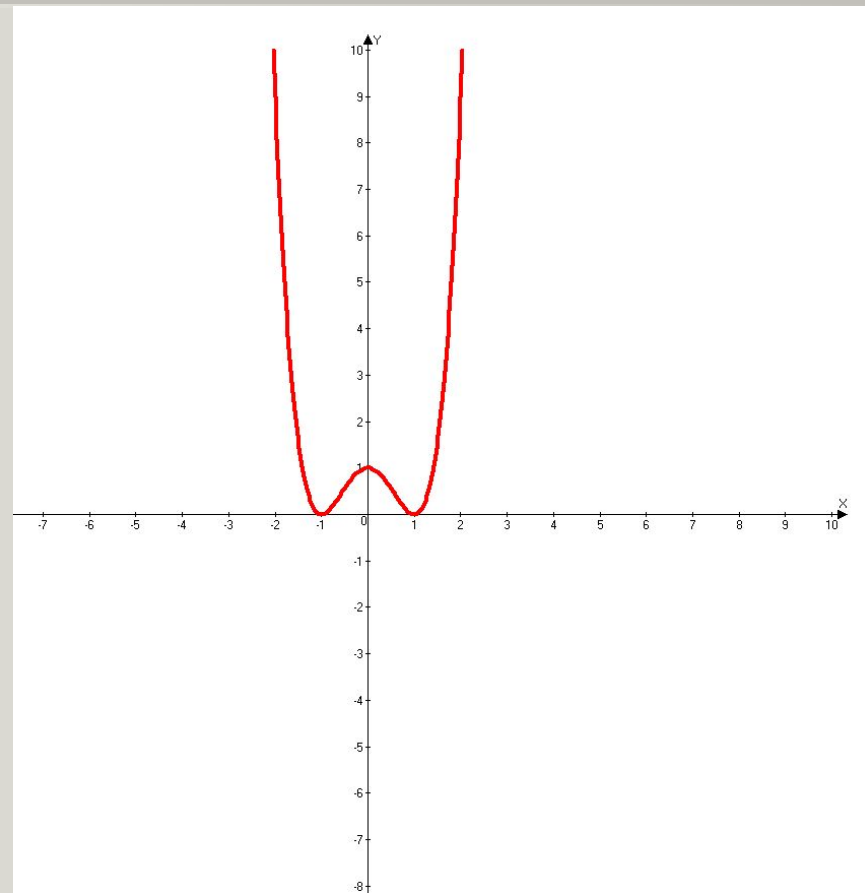




$$y = x^3 - 3x^2 + x + 5$$

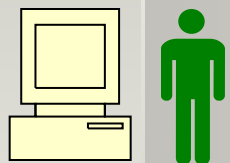
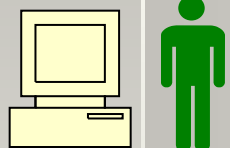
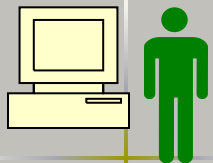
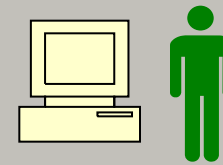
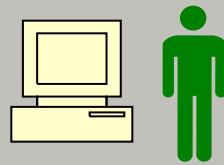
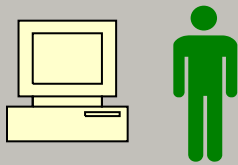


$$y = (x^2 - 1)^2$$

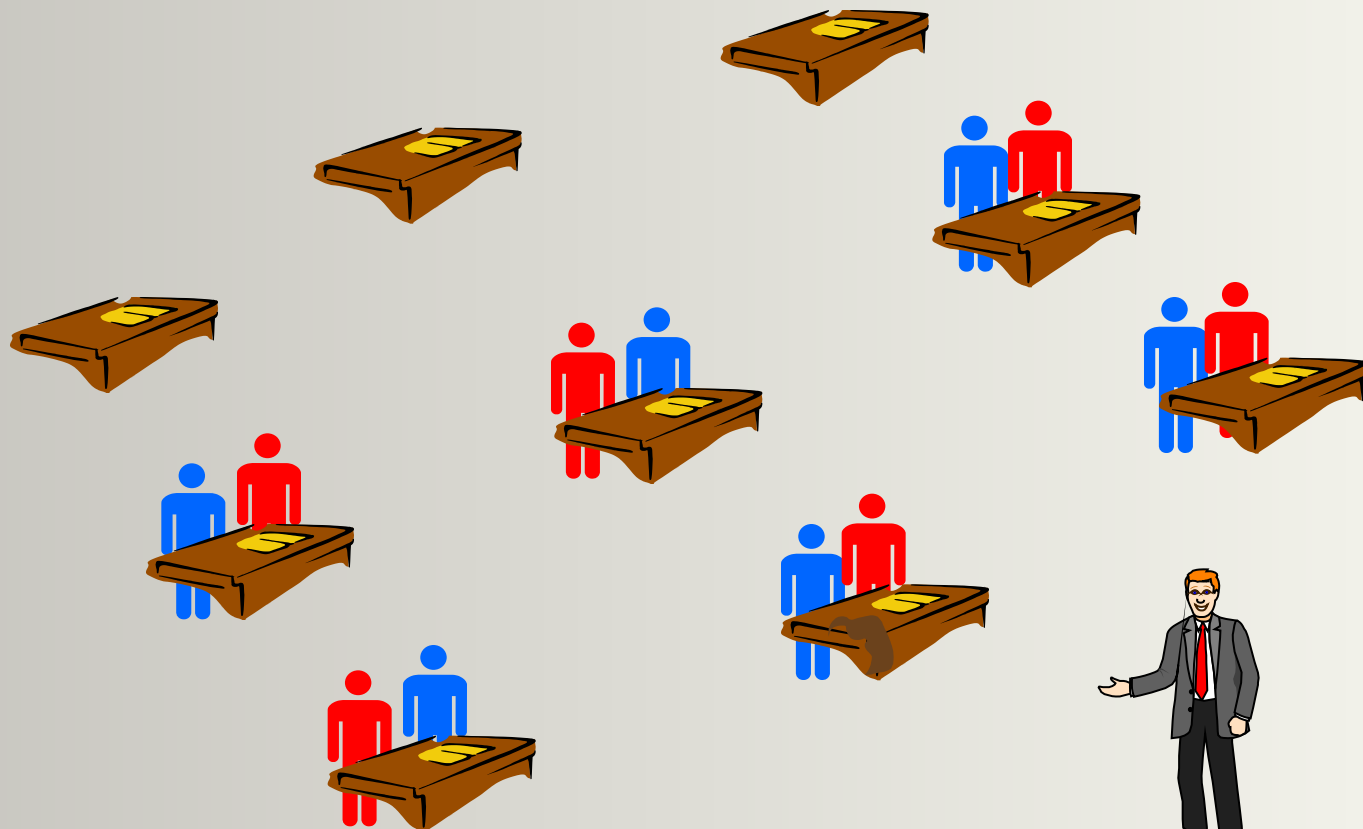


### *III этап. Усвоение образца комплексного применения ЗУН.*

**Практическая работа с применением электронного учебного пособия «Математика – практикум 5-11» и по индивидуальным заданиям на местах. За компьютер сначала рассаживаются 7 учащихся, остальные за парты. По мере выполнения заданий ребята меняются местами.**



Работа на  
компьютере



Работа на местах





## Работа с ЭУП «Математика – практикум 5-11»



1. Какова область определения функции?

2. Найдите область определения функции.

3. Найдите множество значений функции.

$$y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$$

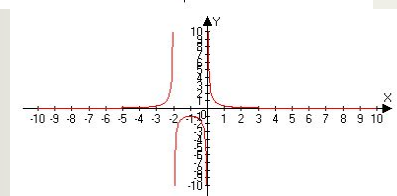
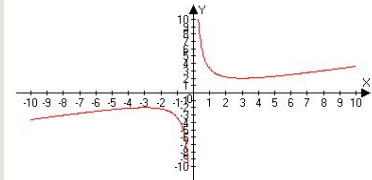
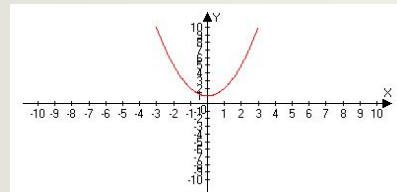
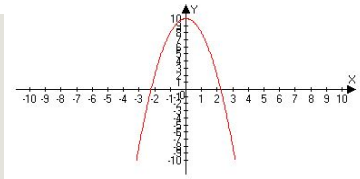
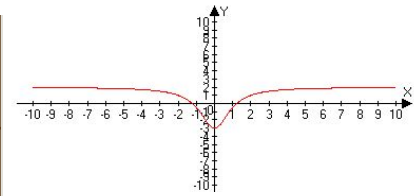
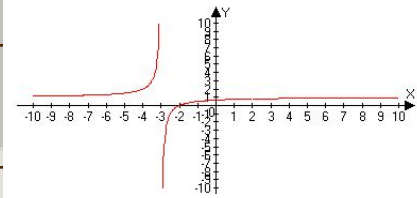
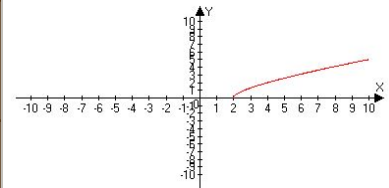
4. Найдите область значений функции.

$$y = \frac{10 - 2x^2}{x^2 + 1}$$

5. В каких точках график функции  $y = x^2 + 1$  пересекает ось абсцисс?

6. Является ли функция чётной или нечётной?

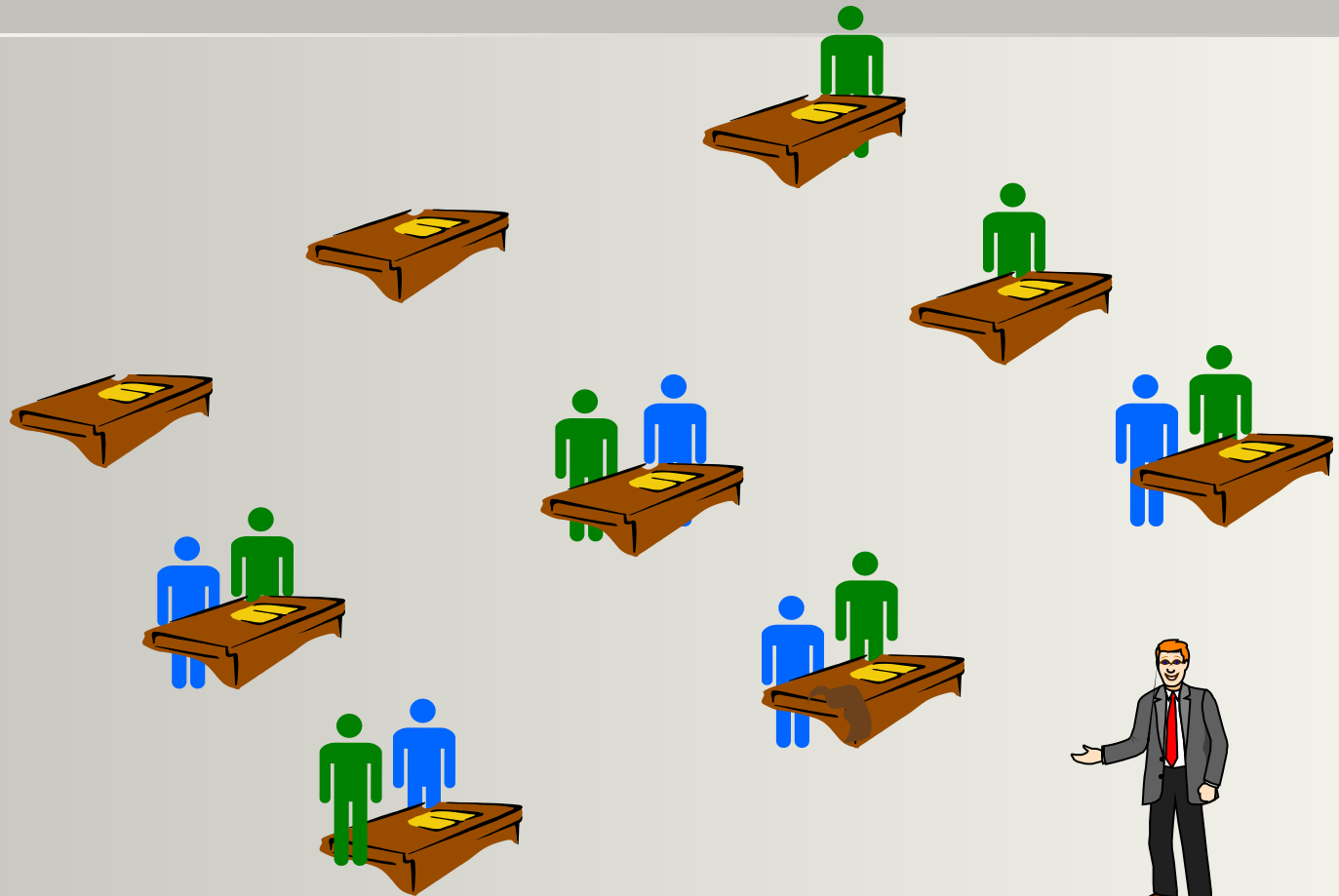
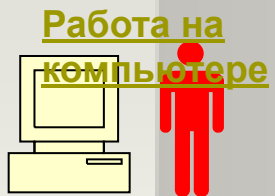
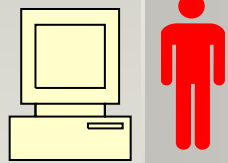
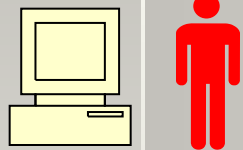
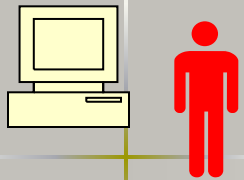
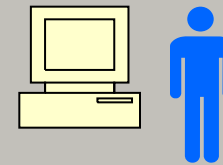
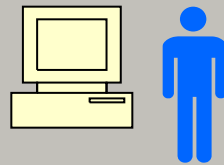
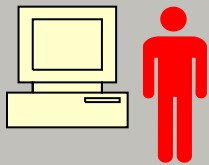
7. Может ли функция обращаться в нуль?



$$y = \frac{x^2 + 9}{3x}$$



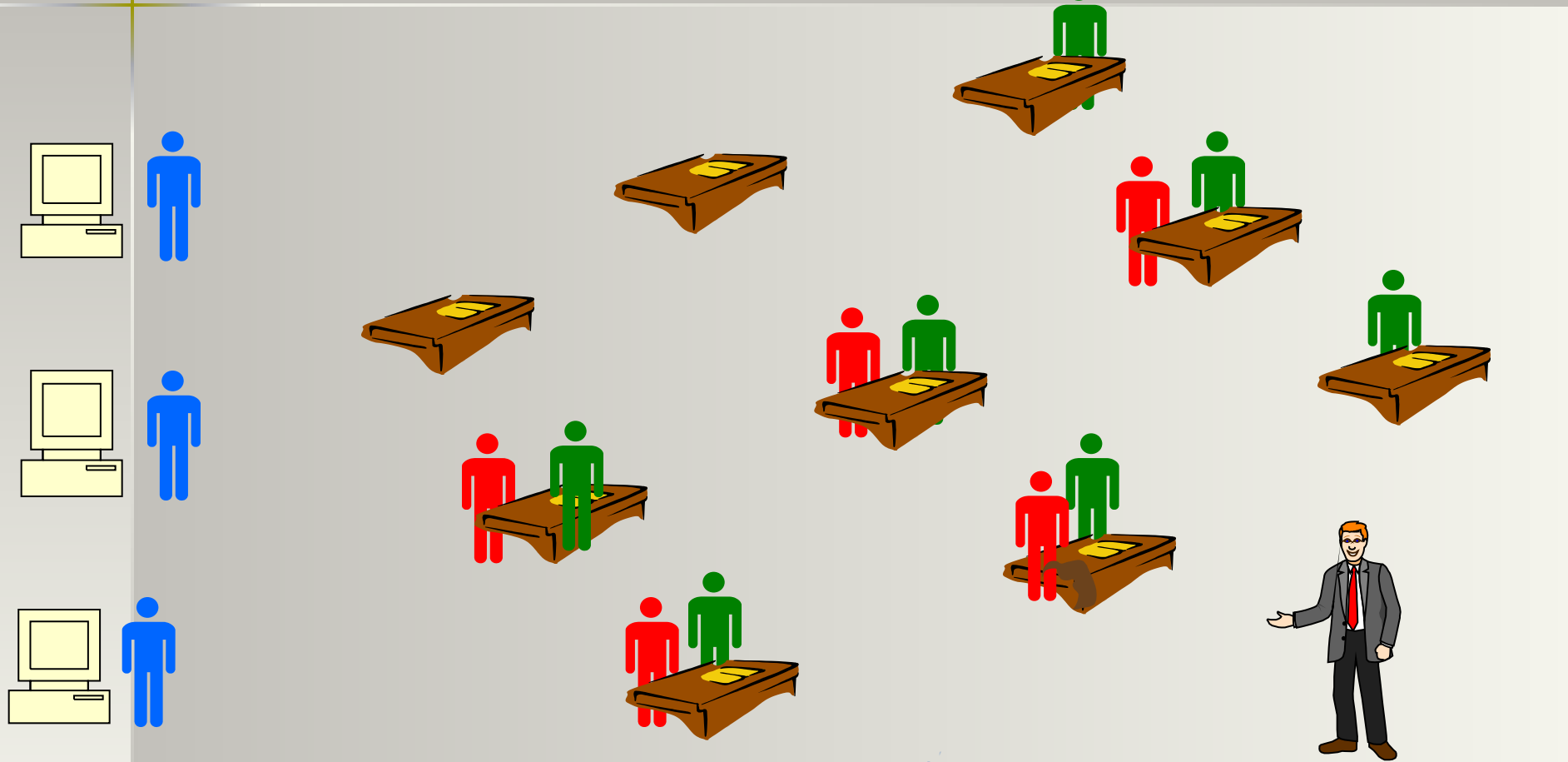
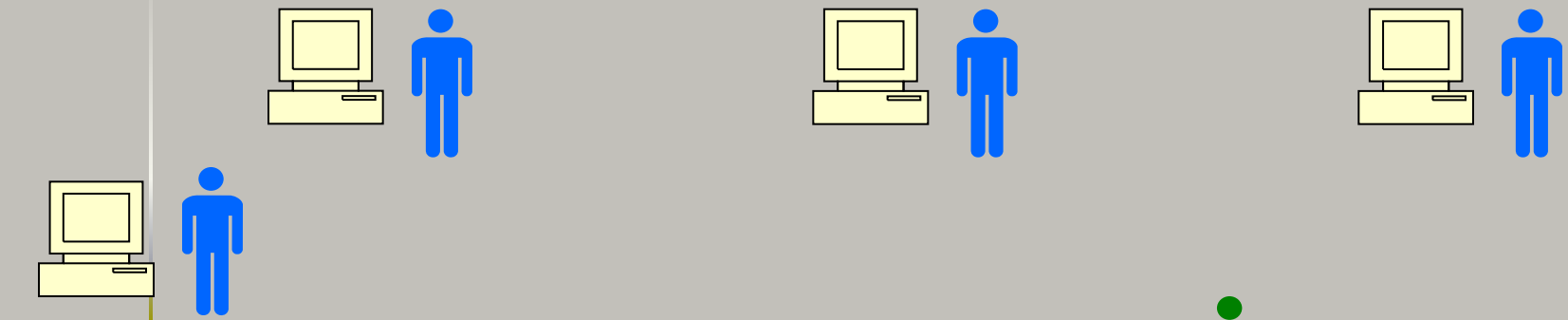
$$y = \frac{1}{x^2 + 2x}$$



Какая из данных функций убывает на всей оси?

а)  $y = -x^3 + x$    в)  $y = x^3 + x^2$    д)  $y = x^3 - x$

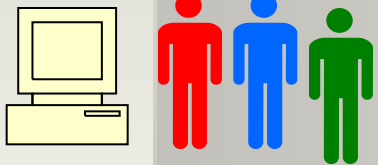
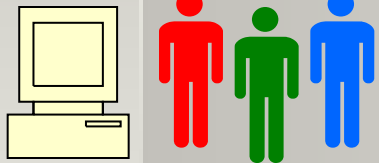
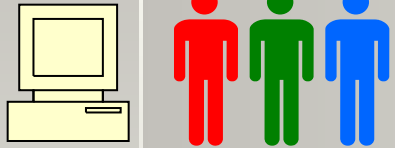
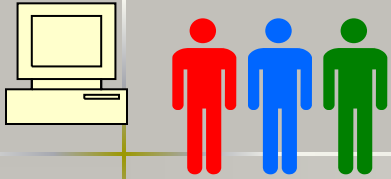
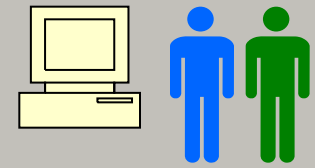
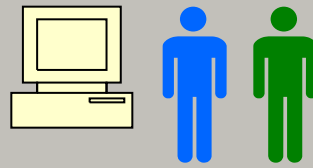
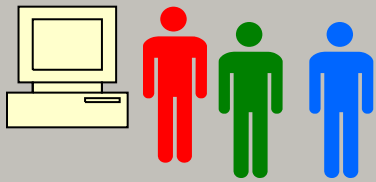
б)  $y = -x^3 - x$    г)  $y = -x^3 - x^2$    е)  $y = x^3 + x$





**Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость.**

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 1,7x$$



**Ещё расскажу, если вам интересно,  
Что точку разрыва и корень имею,  
И есть интервал, где расти не посмею.  
Во всём остальном положительна,  
право,  
И это, конечно, не ради забавы.  
Для чисел больших я стремлюсь к  
единице.  
Найдите меня среди прочих в таблице.**

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+4x^2}}$$

$$f(x) = \left( \frac{x-2}{x+2} \right)^2$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

$$f(x) = x(1-x)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$