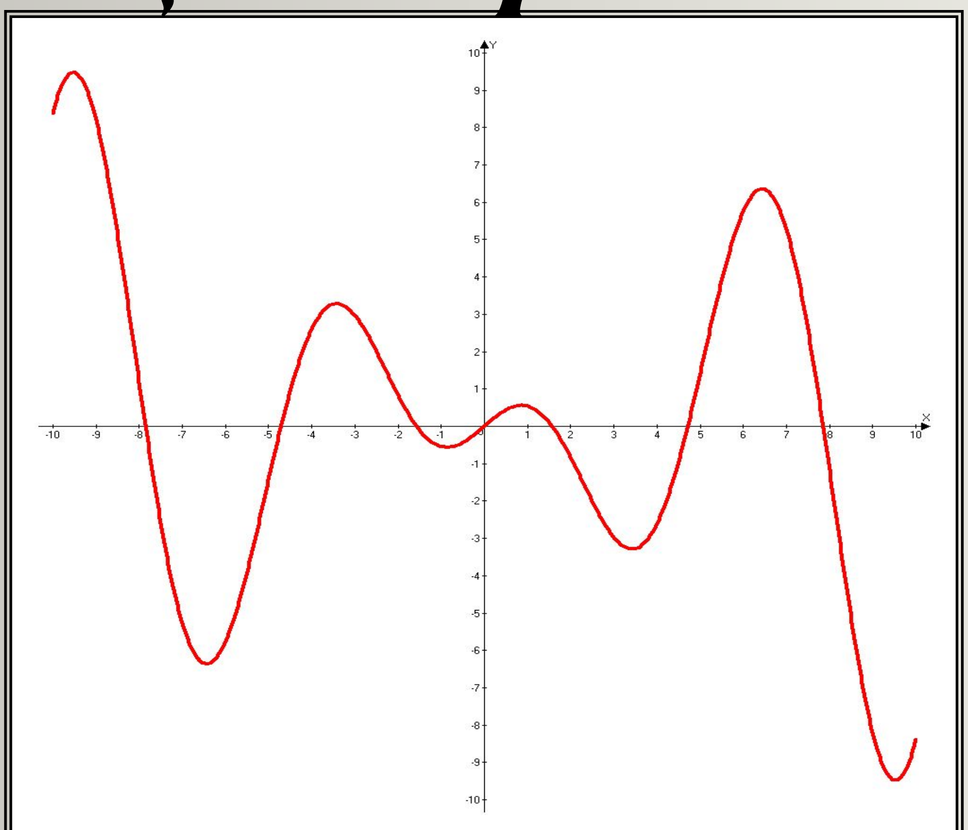
Исследование функций и построение графиков с помощью производной



«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»

Н.И. Лобачевский

Скажи мне, и я забуду.
Покажи мне, и я запомню.
Дай мне действовать самому,
И я научусь.

Конфуций

Цели урока:

- ***Образовательные.***

Формировать:

- - навыки прикладного использования аппарата производной;
- - выявить уровень овладения учащимися комплексом знаний и умений по исследованию функции и ликвидировать пробелы в знаниях в соответствии с требованиями к математической подготовке учащихся.

- ***Развивающие.***

Развивать:

- - способности к самостоятельному планированию и организации работы
- - навыки коррекции собственной деятельности через применение информационных технологий;
- - умение обобщать, абстрагировать и конкретизировать знания при исследовании функции.

- ***Воспитательные.***

Воспитывать:

- - познавательный интерес к математике;
- - информационную культуру и культуру общения;
- - самостоятельность, способность к коллективной работе.

I этап. Актуализация ЗУН, необходимых для творческого применения знаний

- ***Необходимое условие возрастания и убывания функции***
- Достаточное условие возрастания и убывания функции
- Необходимое условие экстремума. (теорема Ферма)
- Признак максимума функции.
- Признак минимума функции.
- Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

Необходимое условие возрастания и убывания функции

Т е о р е м а.

Если дифференцируемая функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, **возрастает (убывает) на** $(a;b)$, **то** $f`(x) \geq 0$ $\quad$ ($f`(x) \leq 0$) **для любого** x **из интервала** $(a;b)$.

Достаточные условия возрастания и убывания функции

Теорема Лагранжа.

Если функция $f(x)$, $x \in [a;b]$, непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдётся точка $c \in (a;b)$ такая, что имеет место формула

$$f(a) - f(b) = f\,`(c)(b - a)$$

Достаточное условие возрастания функции

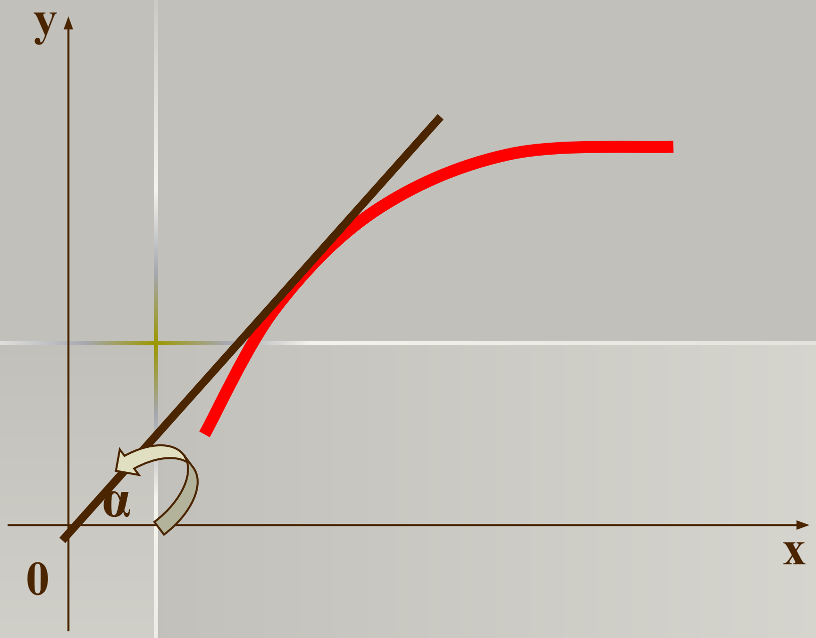
Теорема.

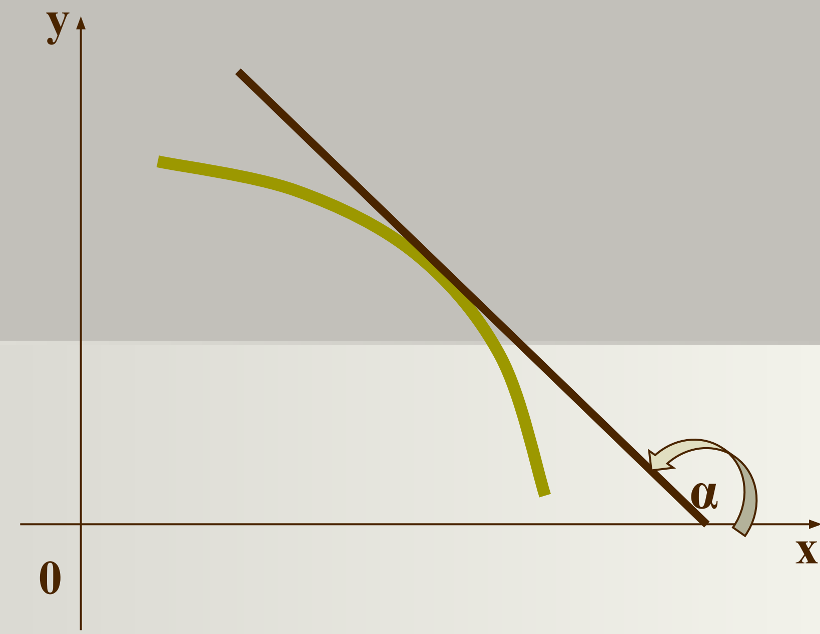
Если функция *f* имеет неотрицательную производную в каждой точке интервала *(a;b)*, то функция *f* возрастает на интервале *(a;b)*.

Достаточное условие убывания функции

Теорема.

Если функция имеет неположительную производную в каждой точке интервала *(a;b)*, то функция *f* убывает на интервале *(a;b)*.





Функция возрастает

$\alpha < 90^0$

$tg\ \alpha > 0$

$f\,`(x) > 0$

Функция убывает

$\alpha > 90^0$

$tg\ \alpha < 0$

$f\,`(x) < 0$

Правило нахождения интервалов монотонности

1) Вычисляем производную *f `(x)* данной функции *f(x)*, а затем находим точки, в которых *f `(x)* равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции *f(x)*

Правило нахождения интервалов монотонности

2) Критическими точками область определения функции *f(x)* разбивается на интервалы, на каждом из которых производная *f `(x)* сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.

Правило нахождения интервалов монотонности

3) Определим знак $f\,`(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f\,`(x) \geq 0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает, если же $f\,`(x) \leq 0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.

Исследование экстремумов функции

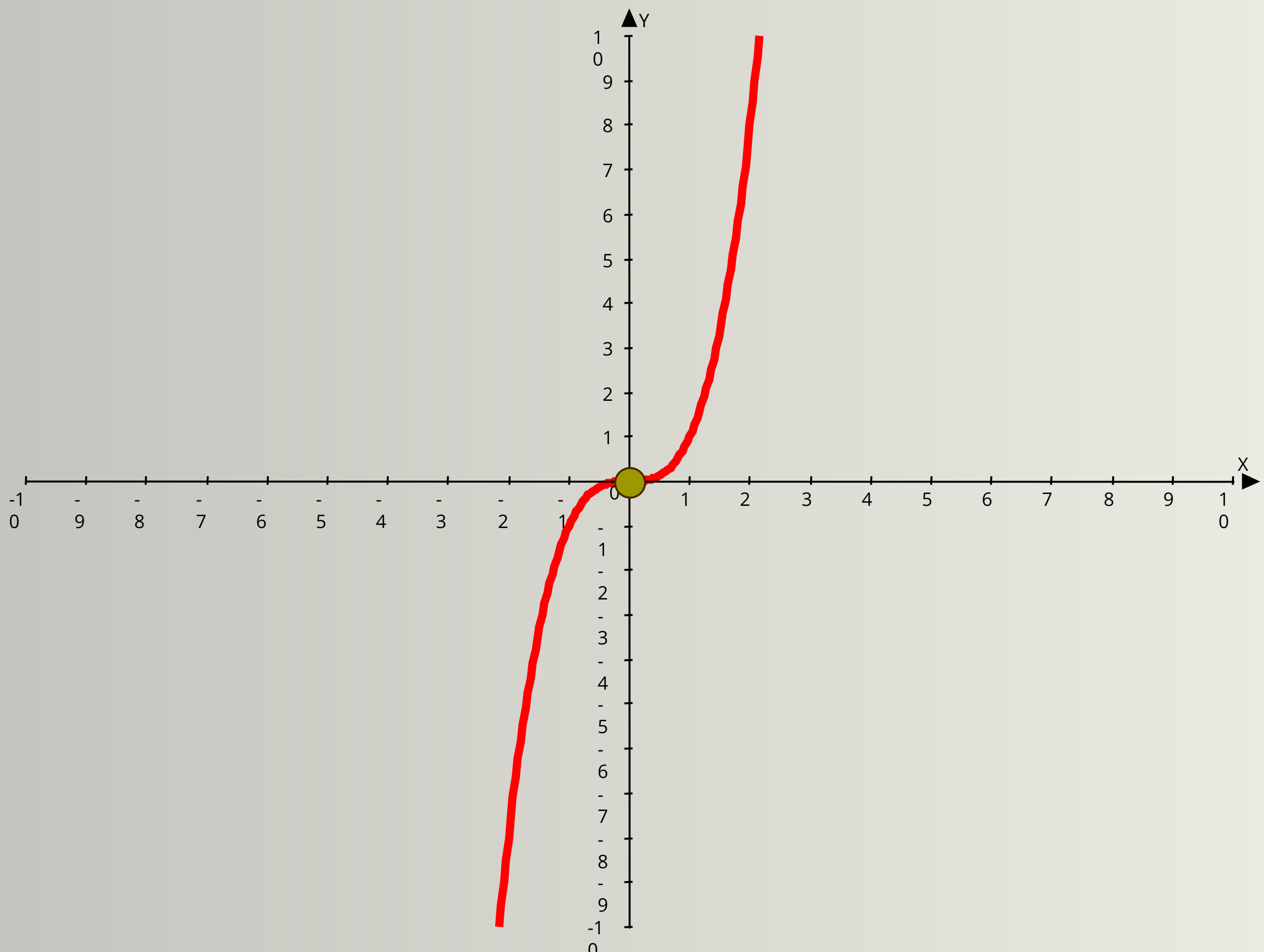
Необходимое условие экстремума.

(теорема Ферма)

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная $f`(x)$, то она равна нулю:

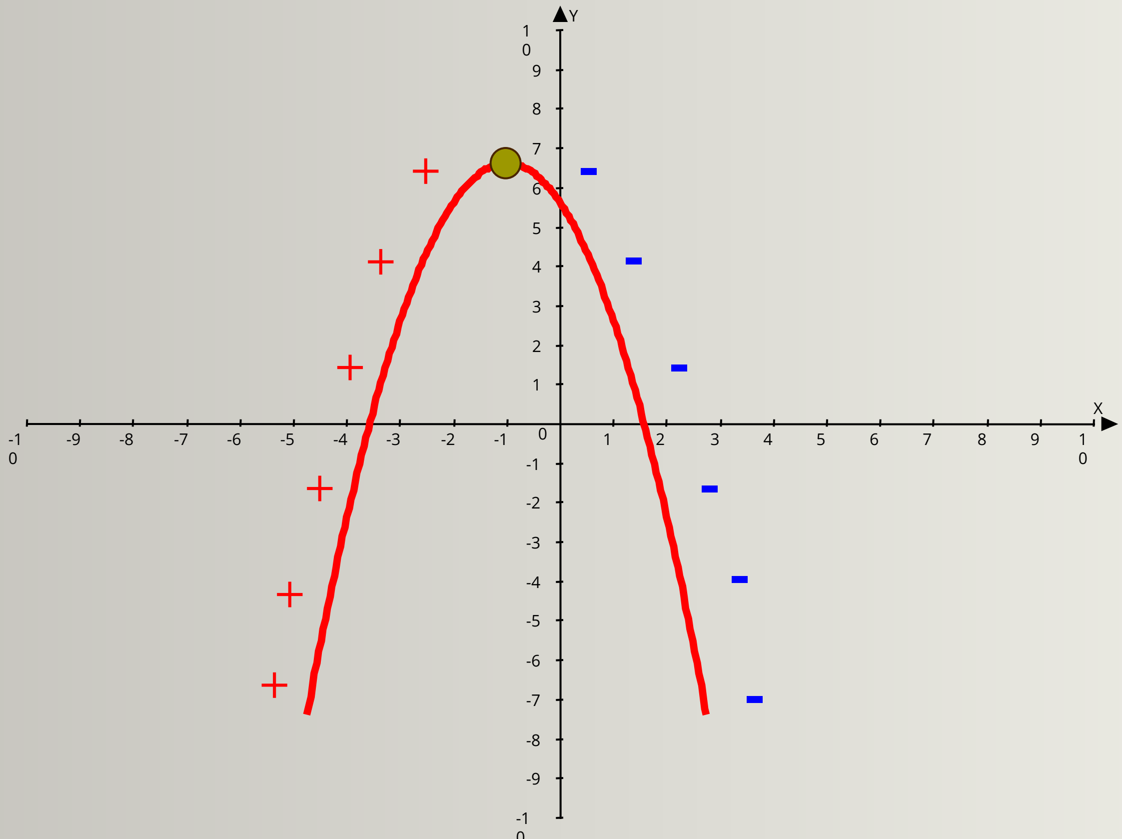
$$f`(x) = 0.$$

Теорема Ферма лишь необходимое условие экстремума. Например, производная функции $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет.



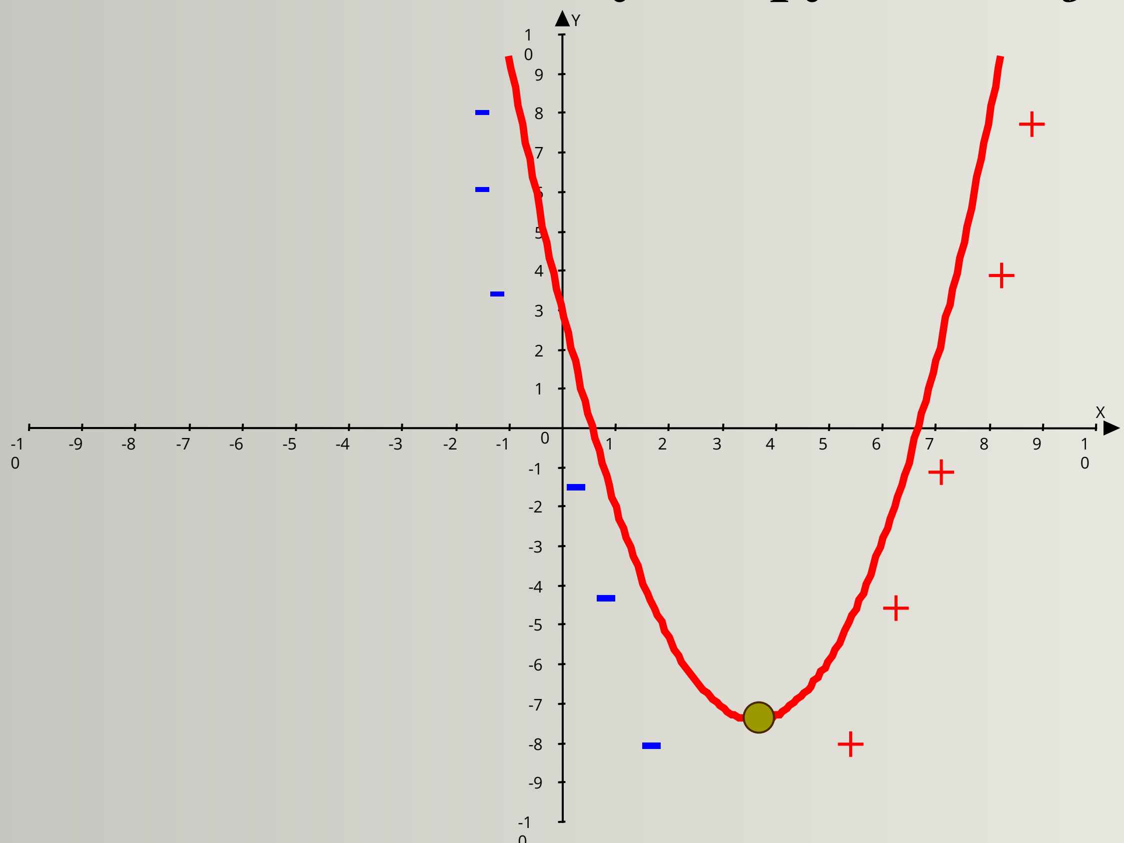
Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак максимума функции. **Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f`(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, и $f`(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.**



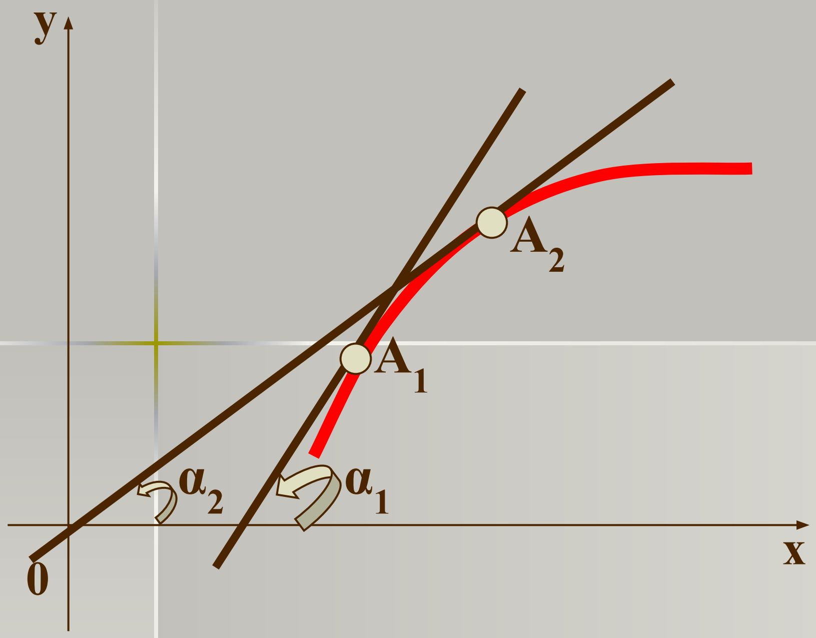
Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак минимума функции. **Если функция f непрерывна в точке x_0, $f`(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f`(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f**



<u>Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции</u>

Т е о р е м а. **Пусть функция *$f(x)$*, *$x \in (a;b)$*, имеет первую и вторую производные. Тогда, если <u>*$f``(x) < 0$*</u> для всех *$x \in (a;b)$*, то на интервале *$(a;b)$* график функции *$f(x)$* <u>*выпуклый вверх*</u>, если же <u>*$f``(x) > 0$*</u> для всех *$x \in (a;b)$*, то график функции *$f(x)$* <u>*выпуклый вниз*</u> на *$(a;b)$*.**



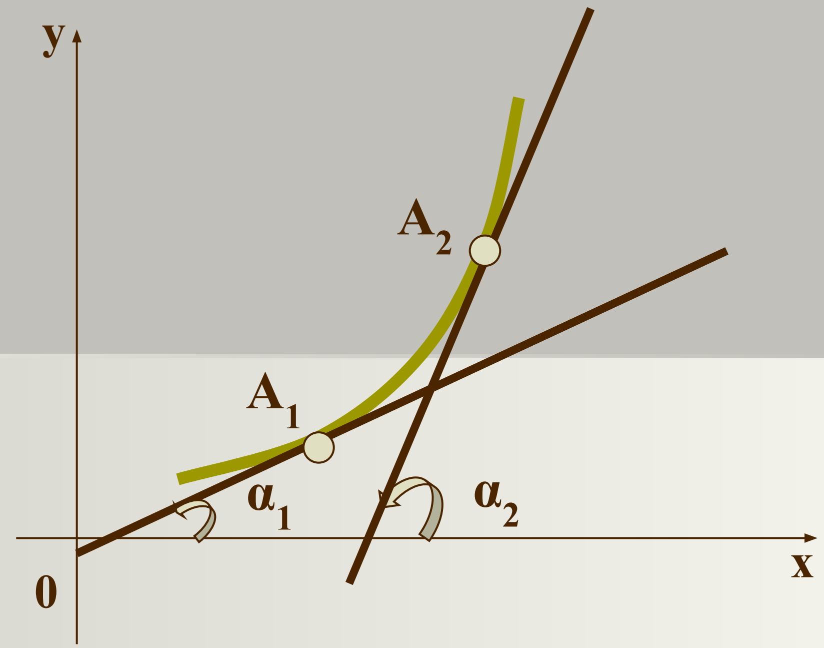


График выпуклый

α - убывает

$tg\ \alpha$ - убывает

$f\,`(x)$ – убывает

$f\,``(x) < 0$

График вогнутый

α - возрастает

$tg\ \alpha$ - возрастает

$f\,`(x)$ – возрастает

$f\,``(x) > 0$

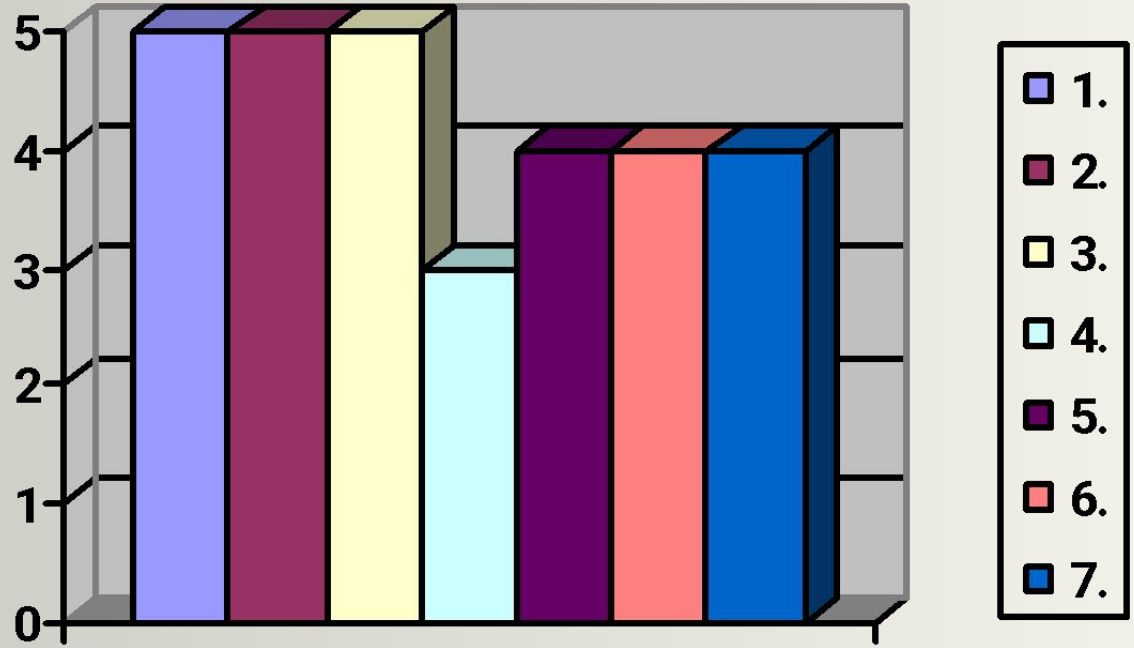
Точки перегиба

1) **Найти критические точки функции по второй производной.**
2) **Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности критический точки.**

Если $f``(x)$ меняет свой знак при переходе аргумента через критическую точку x_0, то $(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба графика данной функции

Анализ компетентности учащихся в теоретических вопросах темы (например)

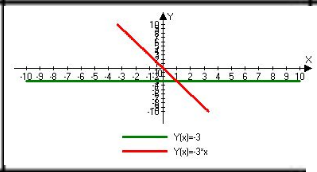
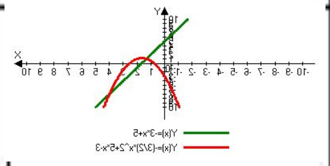
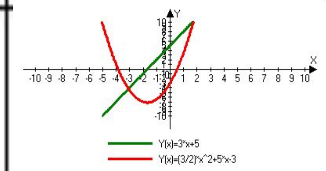
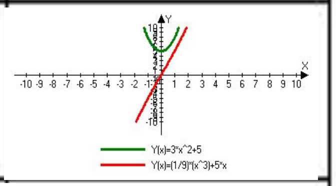
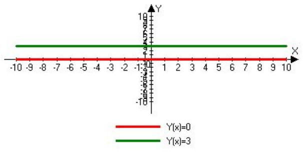
1.	5
2.	5
3.	5
4.	3
5.	4
6.	4
7.	4



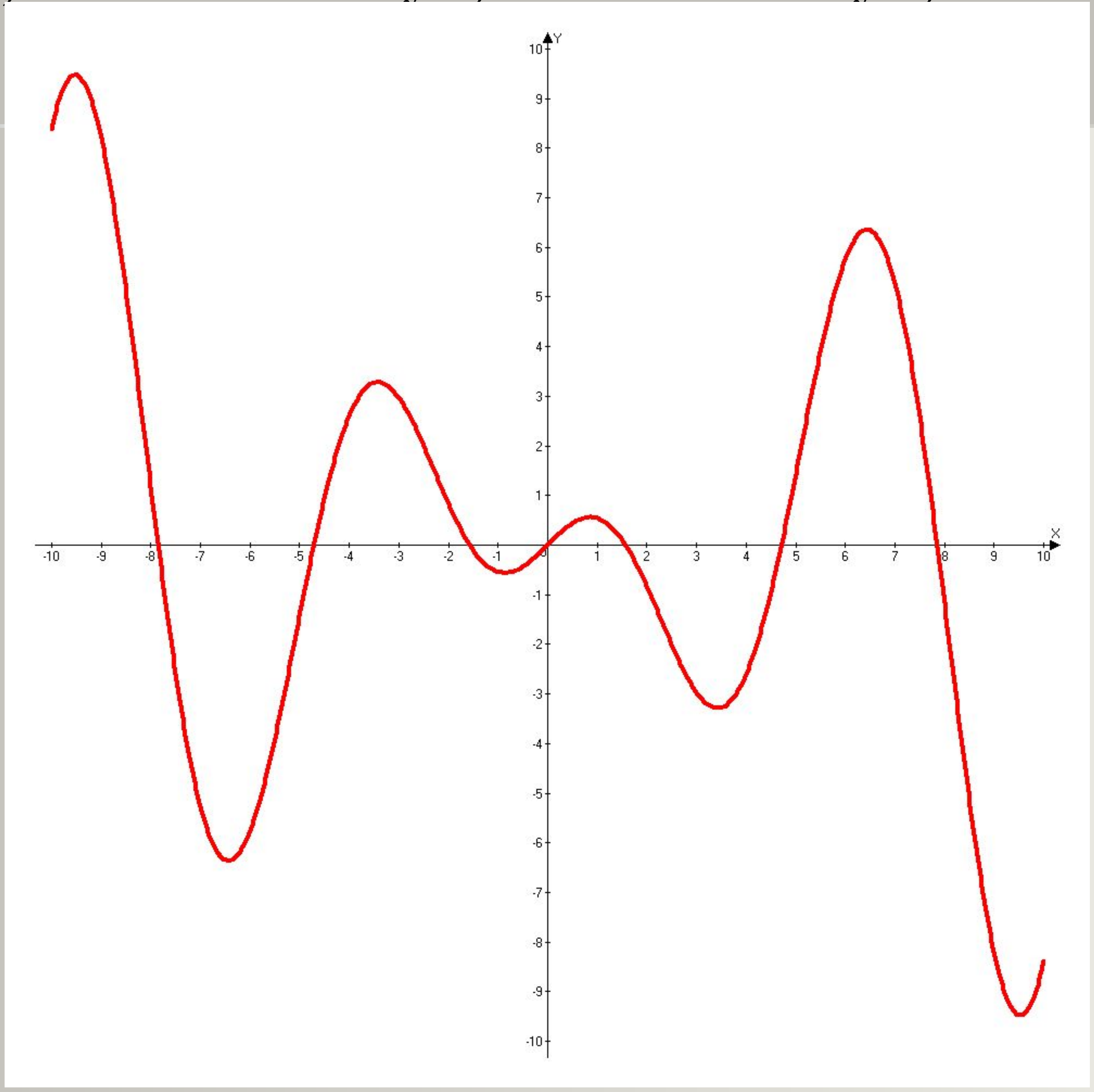
II этап. Обобщение и систематизация знаний и способов деятельности

Задание для всех учащихся.

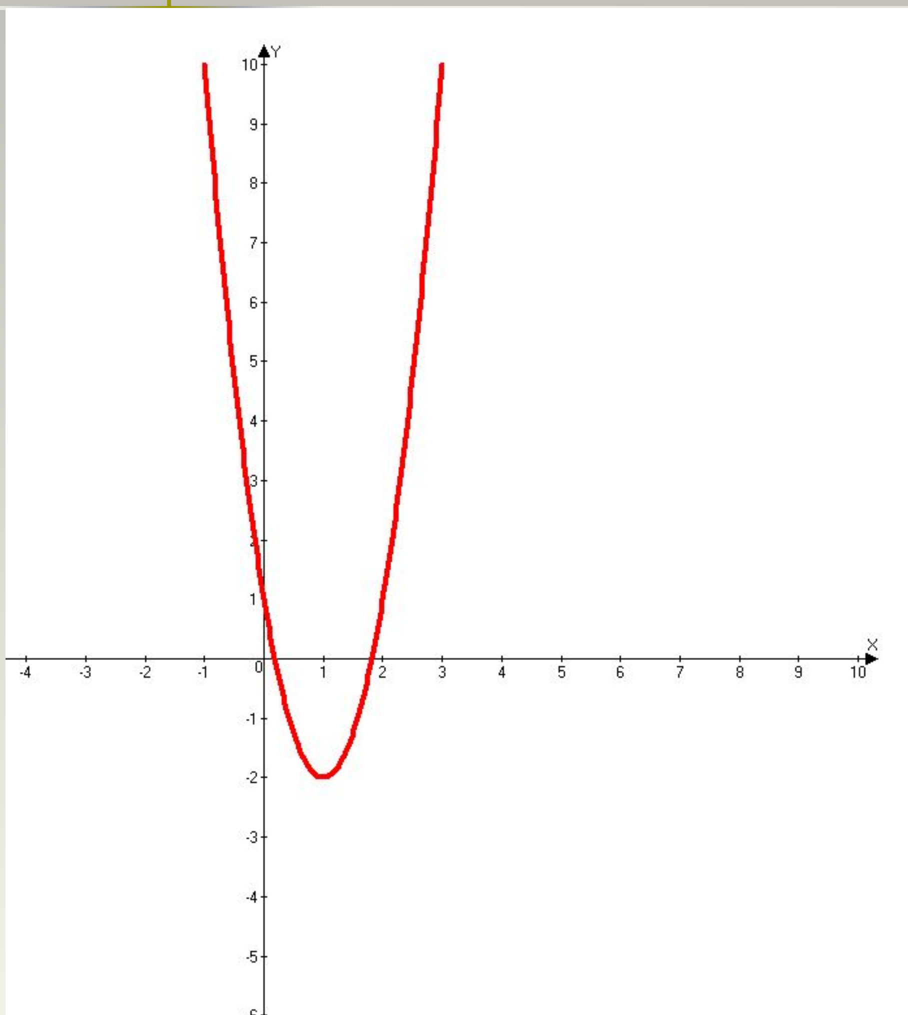
Заполните таблицу

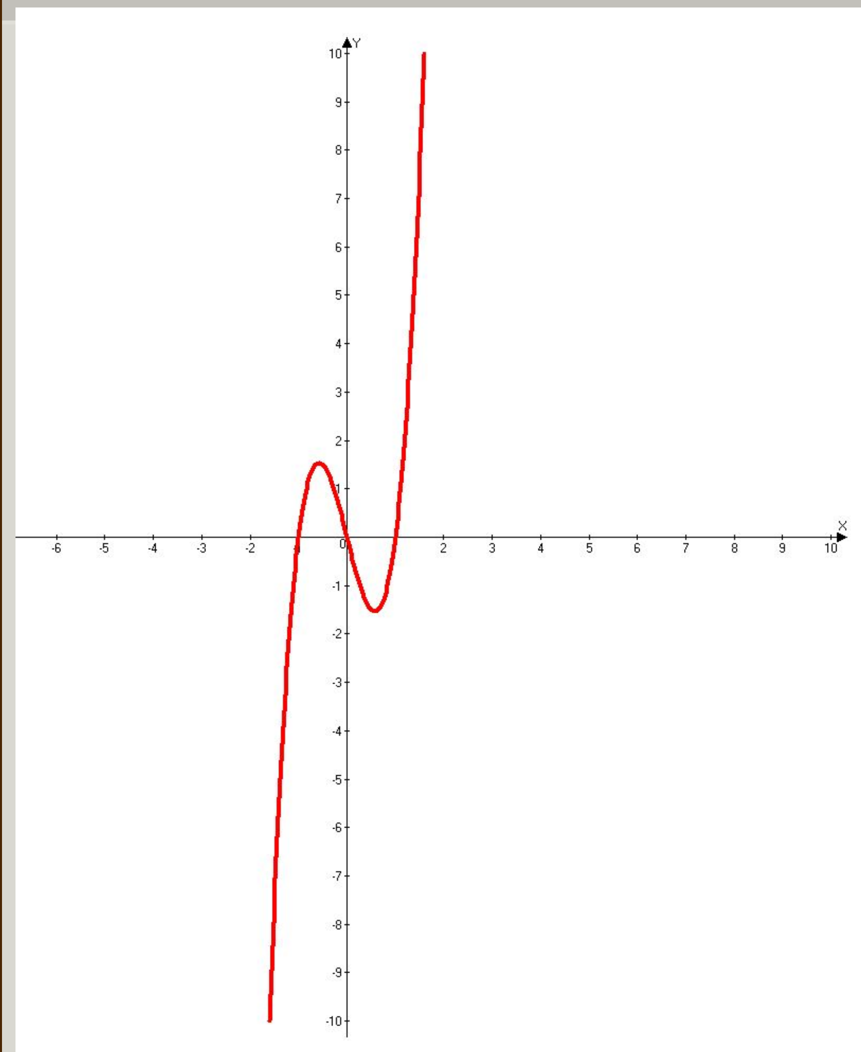
то y / если	Монотонно убывает	Имеет максимум во внутренней точке	Имеет минимум во внутренней точке	Постоянна	Монотонно возрастает
$y' = -3$					
$y' = -3x + 5$					
$y' = 3x + 5$					
$y' = 3x^2 + 5$					
$y' = 0$					

№2 По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум, имеет перегиб.,

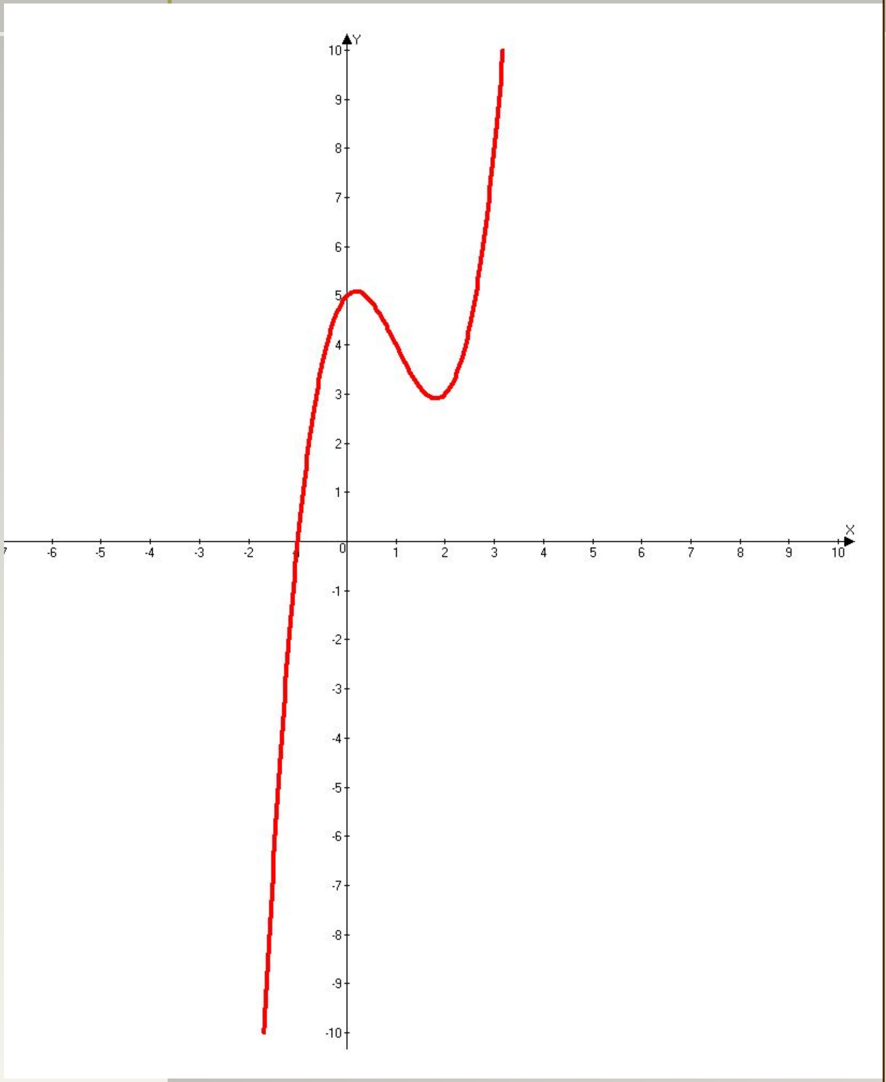


3. **На рисунке изображён график производной функции *y=f(x)*. Сколько точек максимума имеет эта функция?**

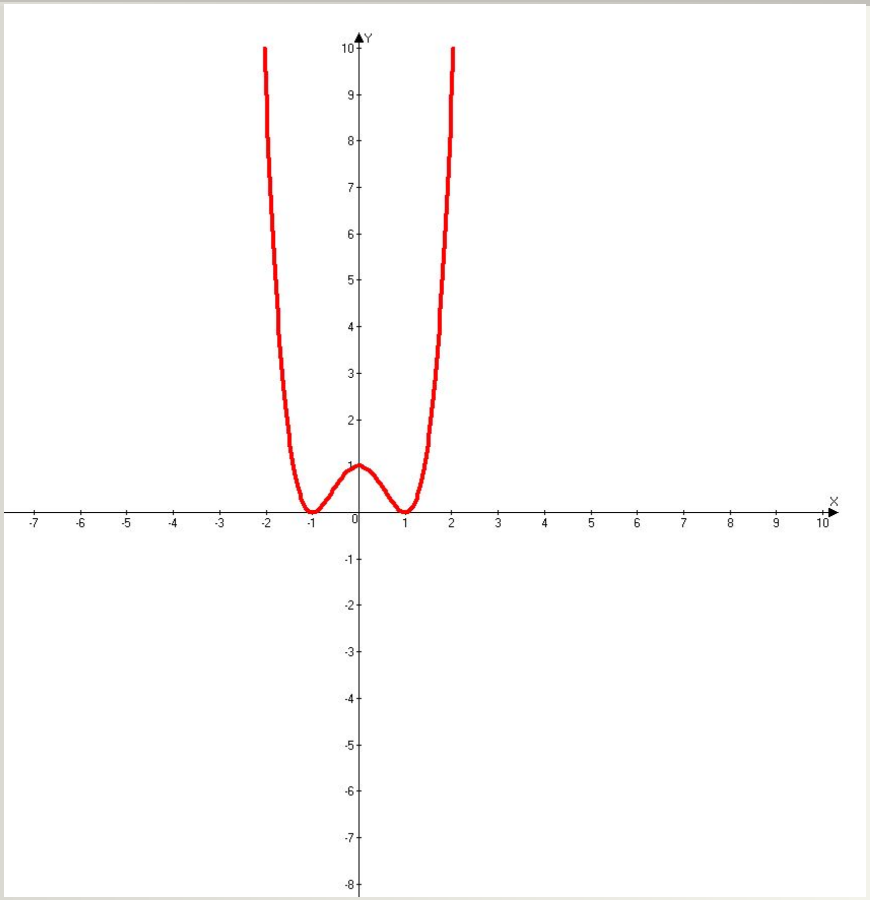




$$y = x^3 - 3x^2 + x + 5$$

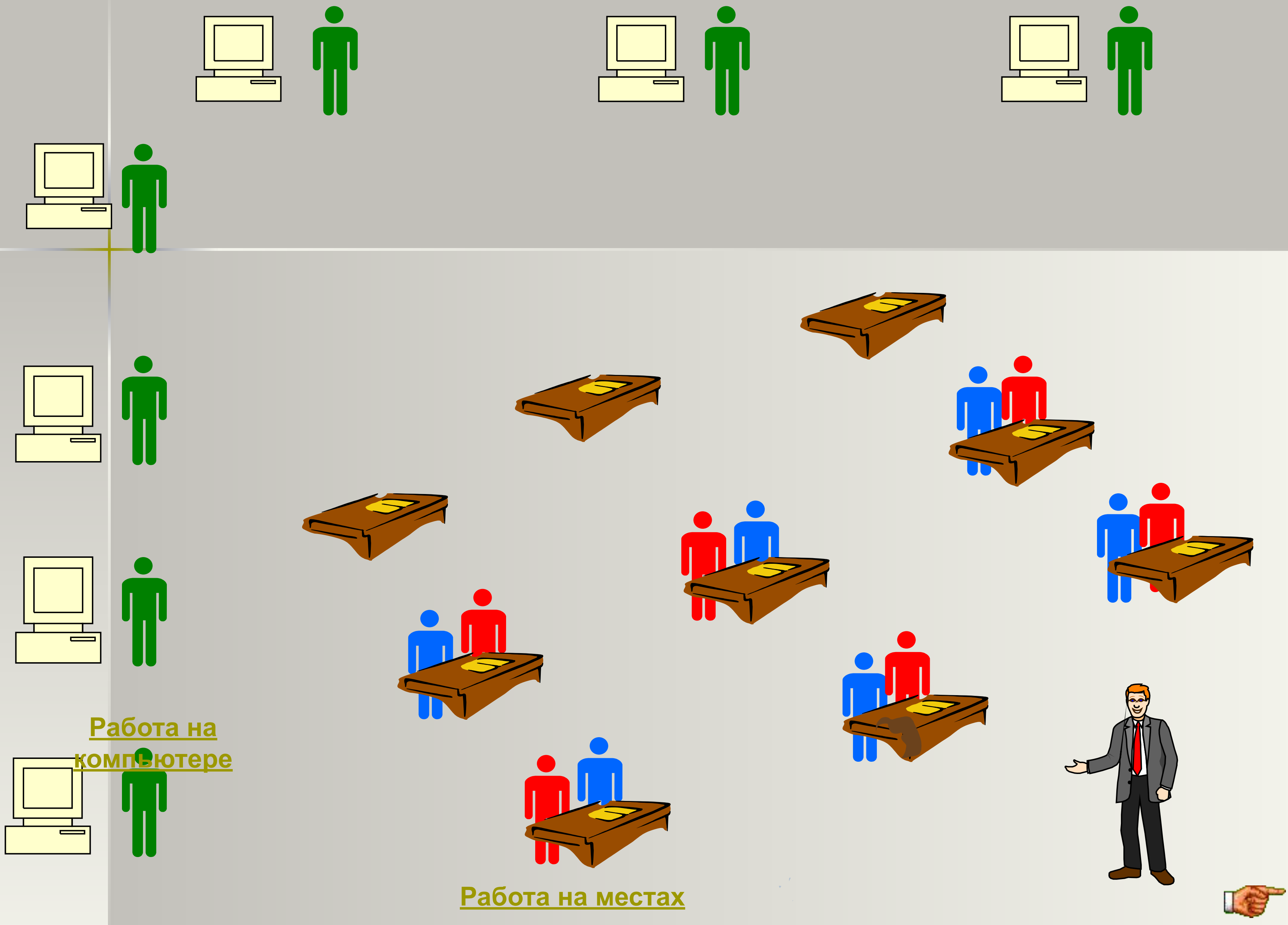


$$y = (x^2 - 1)^2$$



III этап. Усвоение образца комплексного применения ЗУН.

Практическая работа с применением электронного учебного пособия «Математика – практикум 5-11» и по индивидуальным заданиям на местах. За компьютер сначала рассаживаются 7 учащихся, остальные за парты. По мере выполнения заданий ребята меняются местами.



Работа на компьютере

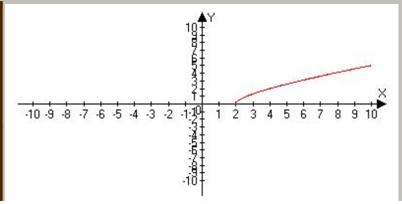
Работа на местах

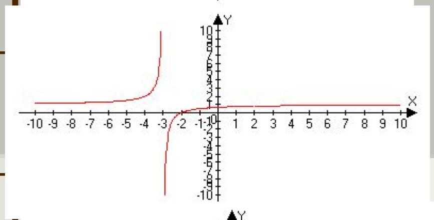
МАТЕМАТИКА 5-11

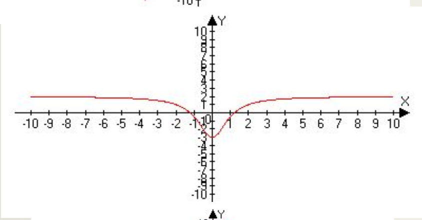
Электронное учебное пособие

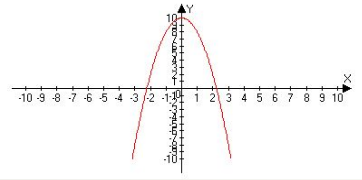
Работа с ЭУП «Математика – практикум 5-11»

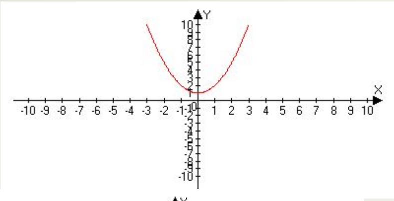
1.	**Какова область определения функции?**
2.	**Найдите область определения функции.** $y=\sqrt{(x-2)\sqrt{x}}$
3.	**Найдите множество значений функции.** $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$
4.	**Найдите область значений функции.** **$y = 10 - 2x^2$** $y=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$
5.	**В каких точках график функции $y = x^2 + 1$ пересекает ось абсцисс?**
6.	**Является ли функция чётной или нечётной?**
7.	**Может ли функция обращаться в нуль?**

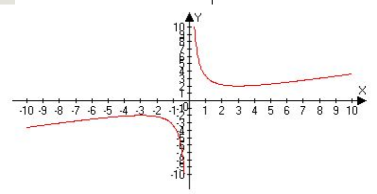


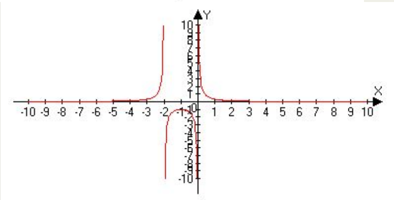






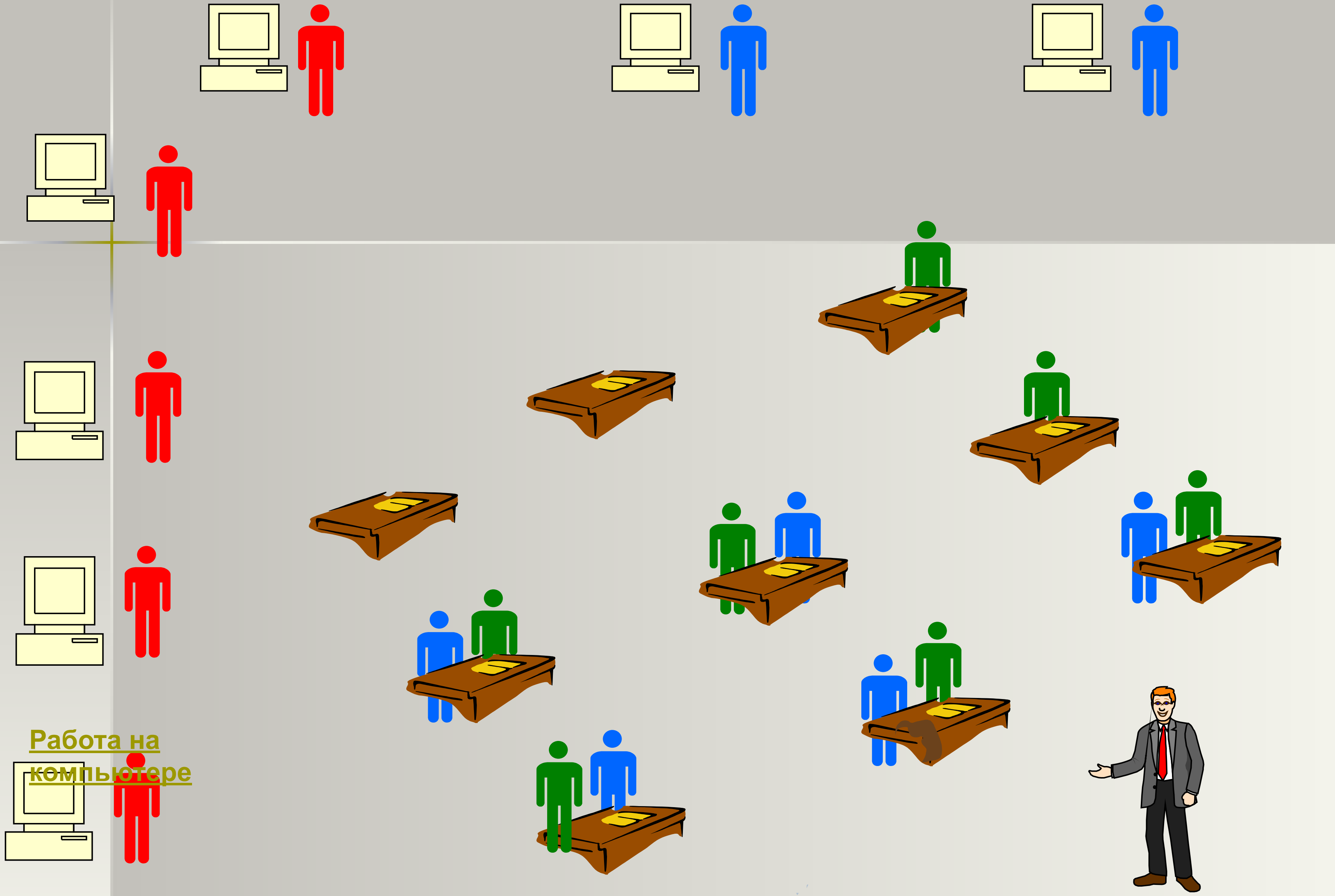






$$y=\frac{x^2+9}{3x}$$

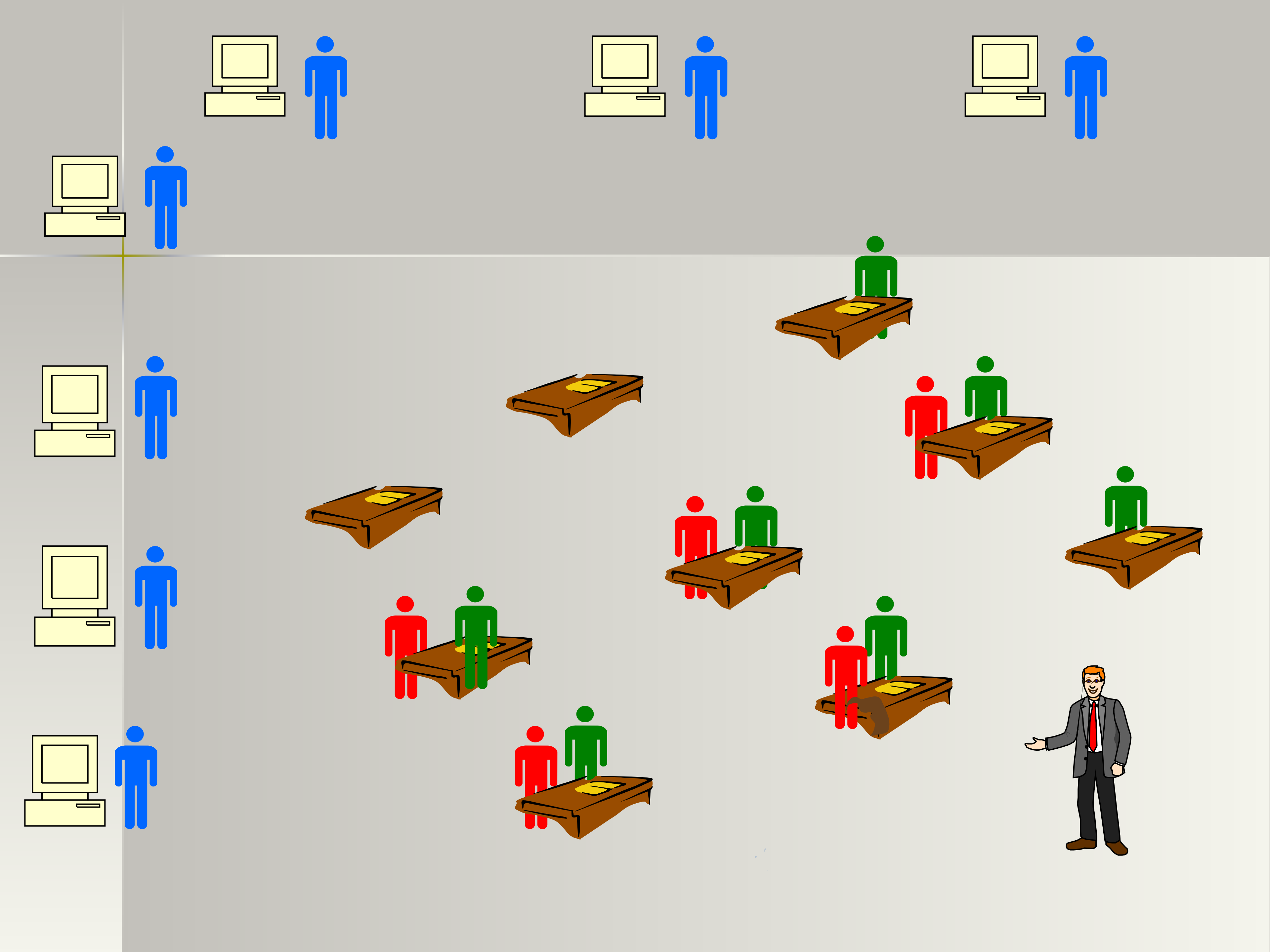
$$y=\frac{1}{x^2+2x}$$


Работа на компьютере

Какая из данных функций убывает на всей оси?

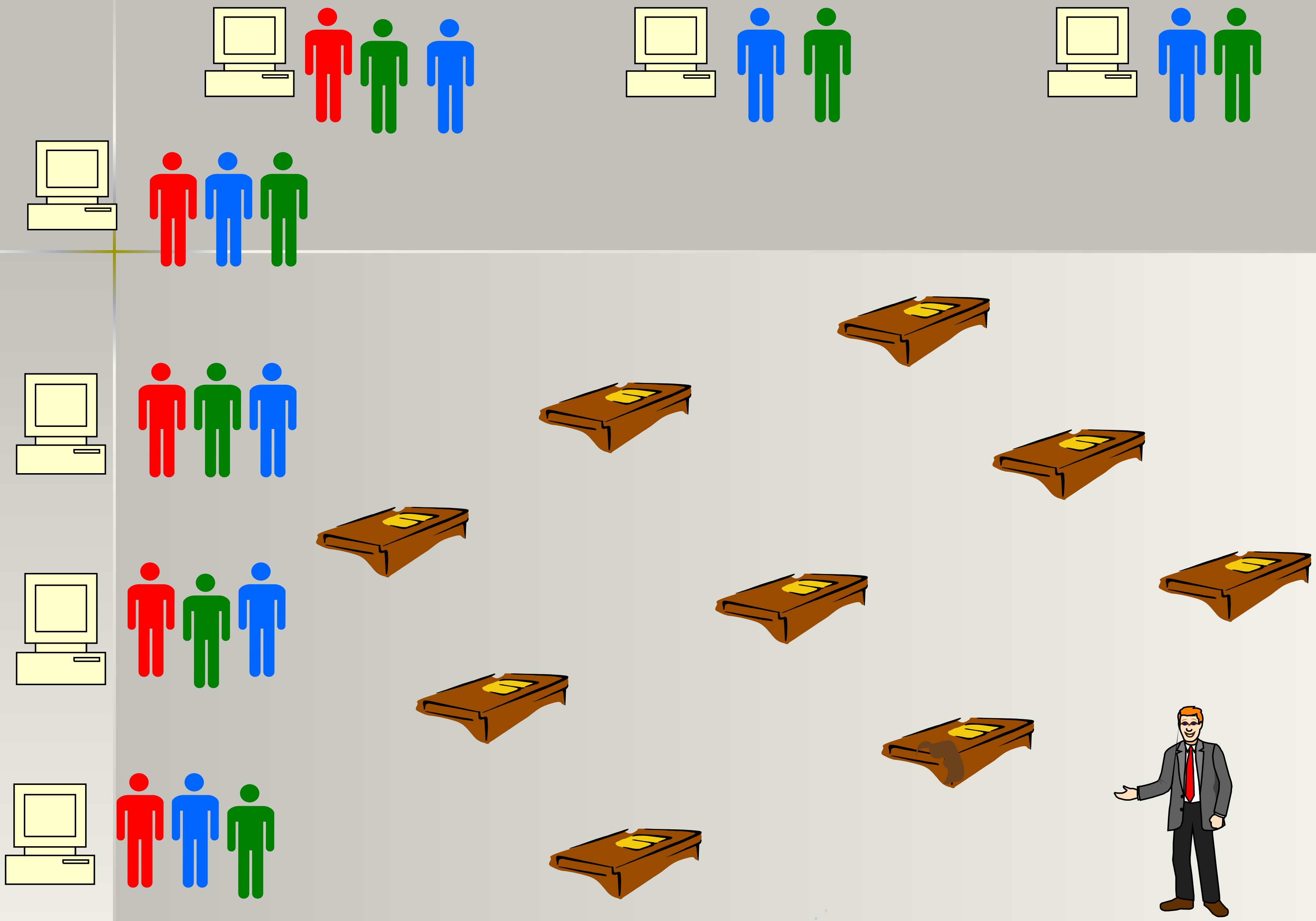
а) $y = -x^3 + x$ в) $y = x^3 + x^2$ д) $y = x^3 - x$

б) $y = -x^3 - x$ г) $y = -x^3 - x^2$ е) $y = x^3 + x$



Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость.

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 1{,}7x$$



Ещё расскажу, если вам интересно,
Что точку разрыва и корень имею,
И есть интервал, где расти не посмею.
Во всём остальном положительна, право,
И это, конечно, не ради забавы.
Для чисел больших я стремлюсь к единице.
Найдите меня среди прочих в таблице.

$f(x)=\frac{1}{4}x^4$	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$	$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$
$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-x}}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+4x^2}}$	$f(x)=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$
$f(x)=(x^2-1)^2$	$f(x)=x(1-x)$	$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$