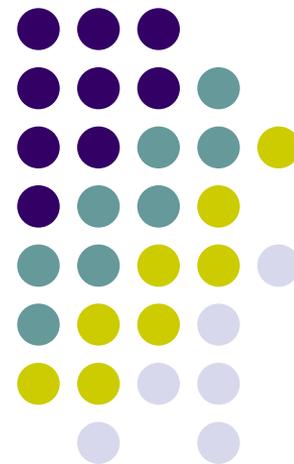


ИЕРАРХИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Яковлев К.С.
ИСА РАН
yakovlev@isa.ru



Метрический топологический граф



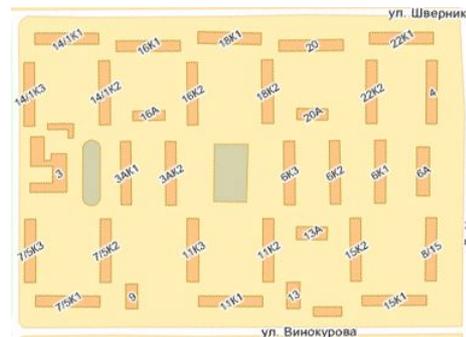
$$MT-GR = \langle A, d, c \rangle$$

- A – множество клеток, представляющее собой матрицу $A_{m \times n} = \{a_{ij}\}: a_{ij} = 0 \text{ или } 1, i, j: 0 \leq i < m, 0 \leq j < n, m, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.
- d – метрика на множестве $A^+ = \{a_{ij} | a_{ij} \in A, a_{ij} = 0\}$
- $c: E \rightarrow (0, +\infty)$ – коммутативная функция, определяющая веса переходов между клетками MT-графа (здесь, $E \subset A \times A$).

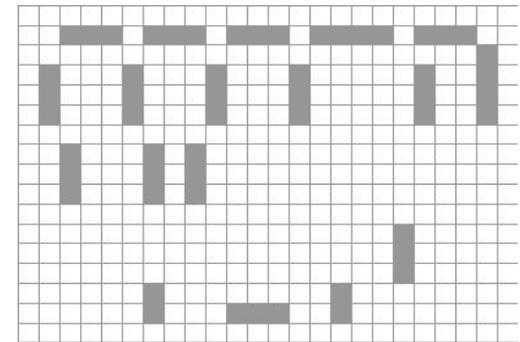


а)

б)



в)



МТ-граф. Основные определения 1.



Пусть $a_{ij}, a_{lk} \in A_{m \times n} : a_{ij} \neq a_{lk}, a_{ij} \neq 0, a_{lk} \neq 0$. Путем из a_{ij} в a_{lk} будем называть последовательность смежных проходимых клеток МТ-графа

$$\pi = \{a_{i_0 j_0}, a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_s j_s}\}, a_{i_0 j_0} = a_{ij}, a_{i_s j_s} = a_{lk}$$

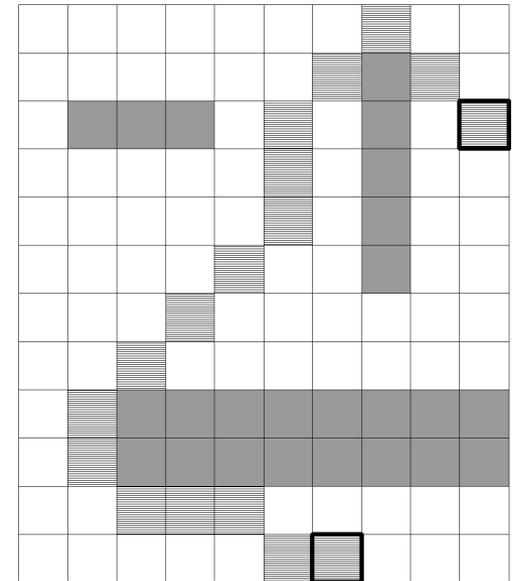
Будем обозначать путь как $\pi(a_{ij}, a_{lk})$ или просто π .

Клетку a_{ij} пути π будем называть начальной, a_{lk} – целевой.

Вес пути π - сумма весов переходов по всем смежным клеткам, входящим в π :

$$c(\pi) = \sum_{v=1}^s c(a_{i_{v-1} j_{v-1}}, a_{i_v j_v})$$

Кратчайшим путем из a_{ij} в a_{lk} будем называть такой путь $\pi^*(a_{ij}, a_{lk})$, что $\forall \pi \neq \pi^* c(\pi) \geq c(\pi^*)$.



МТ-граф. Основные определения

2.



Две различные клетки МТ-графа $a_{i_1 j_1}$, $a_{i_2 j_2} \in A_{m \times n}$ будем называть смежными, если $|i_1 - i_2| \leq 1 \wedge |j_1 - j_2| \leq 1$.

Две различные клетки $a_{i_1 j_1}$, $a_{i_2 j_2} \in A_{m \times n}$ будем называть:
 горизонтально смежными, если $|i_1 - i_2| = 0 \wedge |j_1 - j_2| = 1$
 вертикально смежными, если $|i_1 - i_2| = 1 \wedge |j_1 - j_2| = 0$
 диагонально смежными, если $|i_1 - i_2| = 1 \wedge |j_1 - j_2| = 1$

$ADJ \subset A \times A$ – множество всех пар смежных клеток

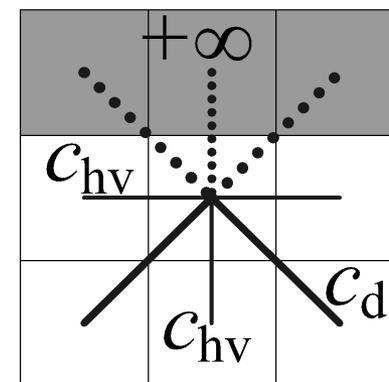
$$c_{hv}, c_d \in R^+$$

$$c: ADJ \rightarrow \{c_{hv}, c_d, +\infty\}:$$

$c(a_{ij}, a_{lk}) = c_{hv}$, если $a_{ij} = 0$, $a_{lk} = 0$ и клетки a_{ij} , a_{lk} являются горизонтально или вертикально смежными;

$c(a_{ij}, a_{lk}) = c_d$, если $a_{ij} = 0$, $a_{lk} = 0$ и клетки a_{ij} , a_{lk} являются диагонально смежными;

$c(a_{ij}, a_{lk}) = +\infty$, если $a_{ij} = 1$, $a_{lk} = 1$.



$$c_d = \sqrt{2} \cdot c_{hv}$$

МТ-граф. Основные определения

3.



1. $d(a_{ij}, a_{lk}) = H(a_{ij}, a_{lk}) =$

$$\begin{cases} c_{hv}\Delta_j + c_d(\Delta_i - \Delta_j), & \text{если } \Delta_i(a_{ij}, a_{lk}) \geq \Delta_j(a_{ij}, a_{lk}) \\ c_{hv}\Delta_i + c_{hv}(\Delta_j - \Delta_i), & \text{если } \Delta_i(a_{ij}, a_{lk}) < \Delta_j(a_{ij}, a_{lk}) \end{cases}$$

$$\Delta_i = \Delta_i(a_{ij}, a_{lk}) = |i-l|$$

$$\Delta_j = \Delta_j(a_{ij}, a_{lk}) = |j-k|$$

Задача планирования траектории



$$PTask = \langle MT-Gr, a_{startI\ startJ}, a_{goalI\ goalJ} \rangle$$

Путь на MT-графе $\pi(a_{startI\ startJ}, a_{goalI\ goalJ})$

Решение задачи планирования

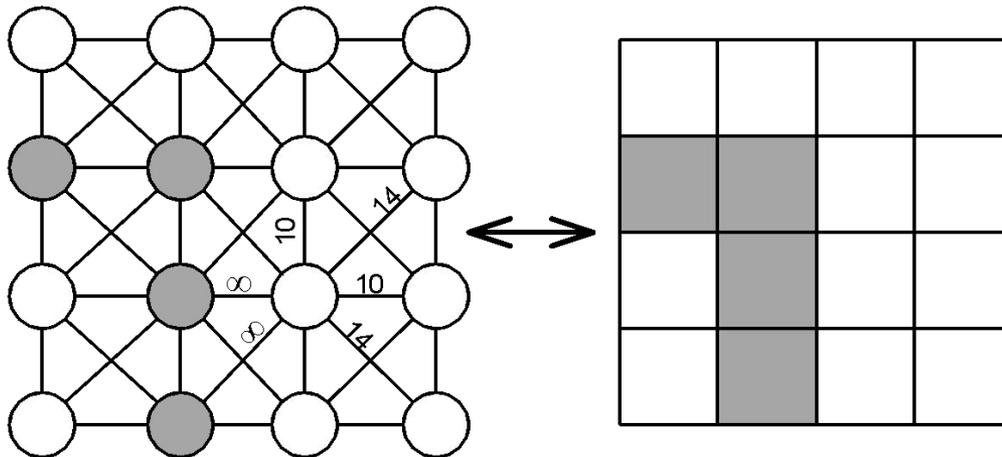
Кратчайший путь на MT-графе $\pi^*(a_{startI\ startJ}, a_{goalI\ goalJ})$

Оптимальное решение задачи планирования

$$r = \max\{|startI - goalI|, |startJ - goalJ|\}$$

Глубина решения

MT-графы и взвешенные графы



- каждой клетке MT-графа соответствует вершина графа;
- множеству ADJ MT-графа соответствует множество ребер графа;
- веса ребер, соединяющих смежные вершины графа, равняются весам переходов между соответствующими клетками MT-графа.

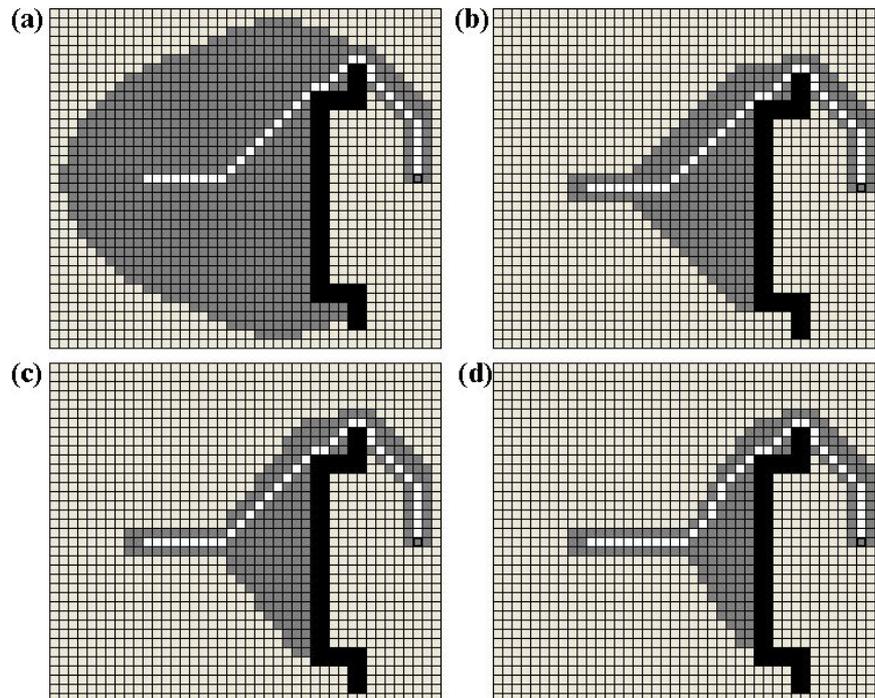
Любой MT-граф может имплицировать взвешенный граф

Все алгоритмы эвристического поиска, применимые на графах, являются применимыми и для MT-Графов

Алгоритмы семейства A^* при поиске пути на МТ-графе



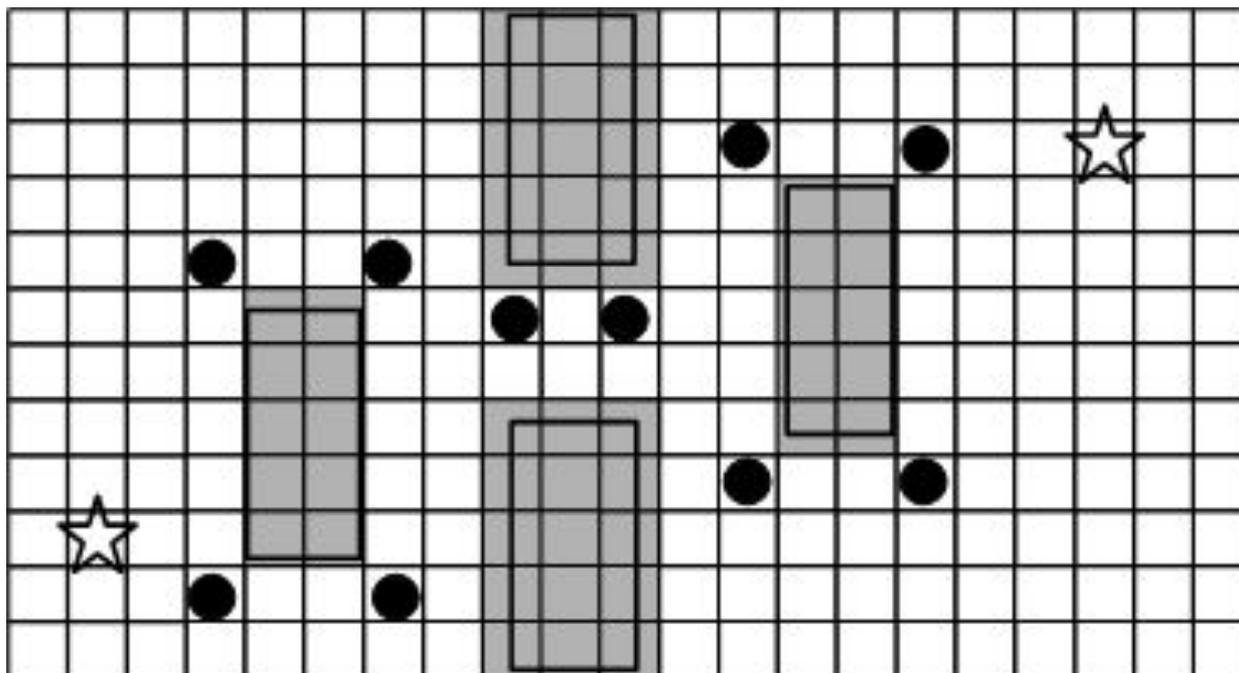
- Алгоритмическая сложность (как временная, так и емкостная) $O(r^2)$
- Проблема «локального минимума»

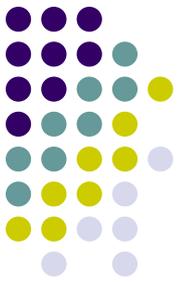




Иерархический подход

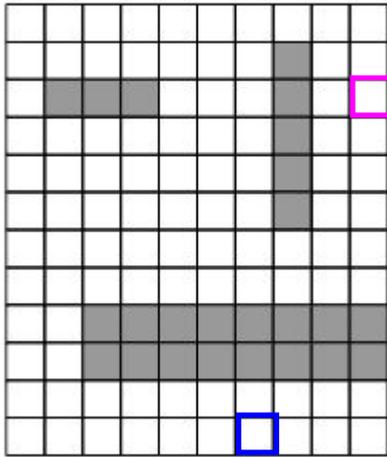
- Разбить исходную задачу на упорядоченное множество «элементарных» подзадач



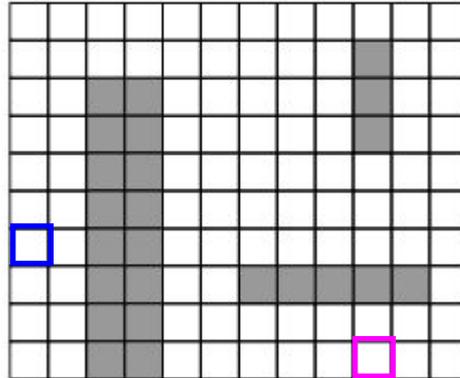


Операция поворота и взаимное расположение клеток на МТ-графе

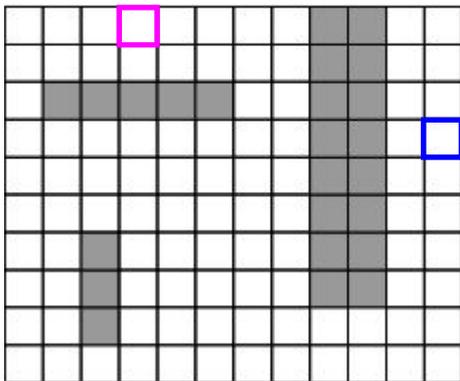
а)



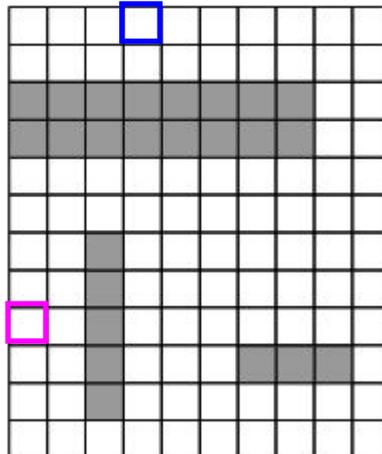
б)



г)



в)



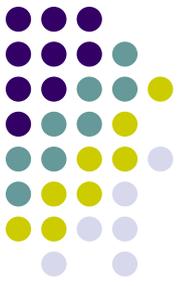
$ROT(A_{m \times n}) = RA_{n \times m}$, где $RA_{n \times m} = \{ra_{ij}\}$, $ra_{ij} = a_{m-j+1, i}$.
 Графически МТ-граф RA представляет собой перевернутый на 90 градусов по часовой стрелке МТ-граф $A_{m \times n}$.

Пусть $a_{ij}, a_{lk} \in A_{m \times n}$.

$$\Delta_i(a_{ij}, a_{lk}) = |i-l|;$$

$$\Delta_j(a_{ij}, a_{lk}) = |j-k|.$$

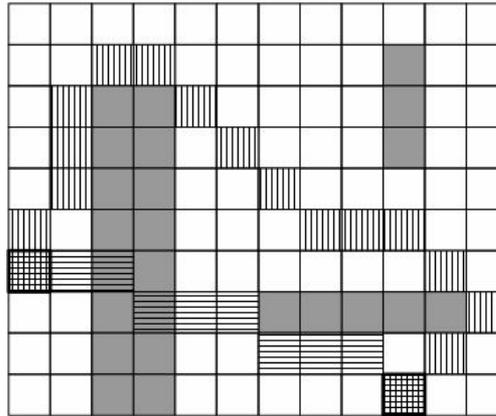
клетка a_{lk} расположена правее клетки a_{ij} , если $\Delta_j \geq \Delta_i$ и $k > j$.



Препятствие

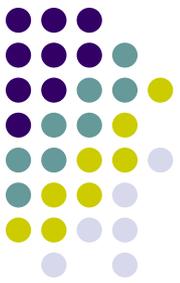
- Препятствия

$$Obs = \{a_{i_0j_0}, a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}, \dots, a_{i_sj_s} \mid a_{ikjk} = 1, a_{ikjk} \in adj(a_{i_{k-1}j_{k-1}}) \\ \forall k=0,1,2, \dots, s, s \in \mathbf{N}\}.$$



Препятствие Obs лежит между клетками a_{ij} и a_{lk} , если

$$tr(a_{ij}, a_{lk}) \cap Obs \neq \emptyset$$



Секция

- **Секция** $\langle a_{ij}, a_{kl} \rangle$ - упорядоченная пара клеток МТ-графа
- Секция $\langle a_{ij}, a_{kl} \rangle$ **проходима** ТТТК нуль-траектория $tr(a_{ij}, a_{kl})$ проходима
- Вес секции равен весу нуль-траектории с $(\langle a_{ij}, a_{kl} \rangle) = c(tr(a_{ij}, a_{kl}))$



Задача планирования

Пусть на заданном МТ-графе **МТ-Gr** зафиксированы начальная $a_{startI\ startJ}$ и целевая $a_{goalI\ goalJ}$ клетки.

Задача планирования состоит в отыскании такой последовательности клеток $PP = \{a_{i_0\ j_0}, a_{i_1\ j_1}, a_{i_2\ j_2}, \dots, a_{i_s\ j_s}\}$, что

$$a_{i_0\ j_0} = a_{startI\ startJ}$$

$$a_{i_s\ j_s} = a_{goalI\ goalJ}$$

секции $\langle a_{i_0\ j_0}, a_{i_1\ j_1} \rangle, \langle a_{i_1\ j_1}, a_{i_2\ j_2} \rangle, \dots, \langle a_{i_{s-1}\ j_{s-1}}, a_{i_s\ j_s} \rangle$ - проходимы

PP – частичный путь

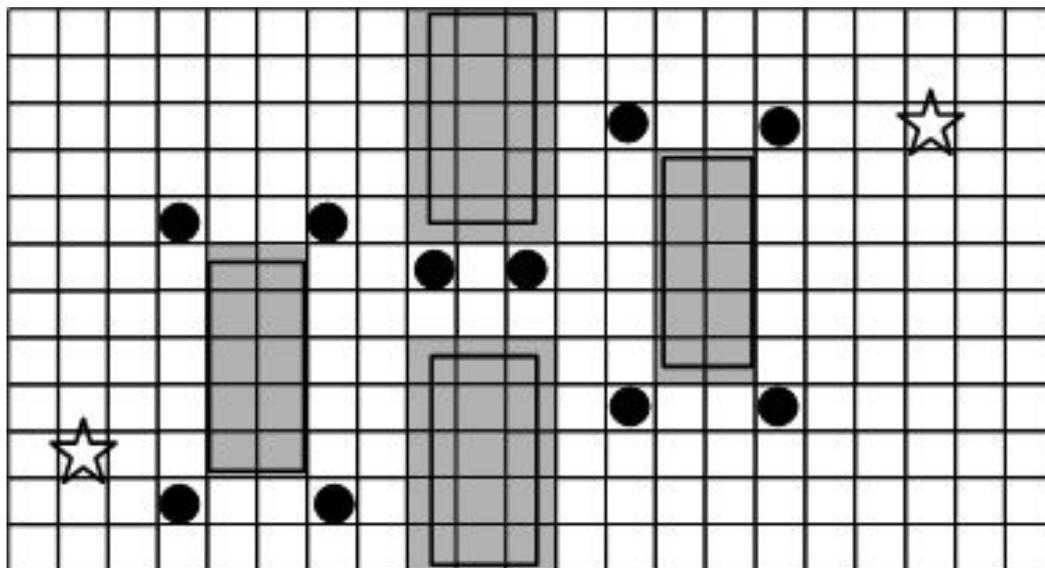
Клетки $a_{ij} \in PP$ – опорные клетки

$$\text{Вес частичного пути } C(PP) = \sum_{v=1}^s c(\langle a_{i_{v-1}\ j_{v-1}}, a_{i_v\ j_v} \rangle)$$



Компоненты планирования

- Выделение опорных клеток
- Упорядочивание опорных клеток
- Выбор опорных клеток для формирования итогового решения



Вероятностный иерархический алгоритм планирования траектории



Вход: $PPC = \{PP = \{a_{startI\ startJ}, a_{goalI\ goalJ}\}\}$ – множество частичных путей кандидатов

Шаг 1. Выбрать лучший частичный PP из PPC согласно *Критерию Выбора Частичного Плана*

Шаг 2. Если PP удовлетворяет *Критерию Остановки*, то вернуть PP в качестве решения задачи планирования

Шаг 3. В соответствии с *Критерием Выбора Опорных Клеток* выбрать пару опорных клеток из PP - a_{ij}, a_{lk}

Шаг 4. Построить нуль-траекторию $tr(a_{ij}, a_{lk})$

Шаг 5. Если нуль-траектория $tr(a_{ij}, a_{lk})$ проходима, то перейти к шагу 1

Шаг 6. **Случайным образом выбрать N опорных клеток** $C_1, C_2, \dots, C_n \in A^+$

Шаг 7. Разбить секцию $\langle a_{ij}, a_{lk} \rangle$ на N вариантов, а именно:

Для каждого $PP \in PPC$, включающего a_{ij}, a_{lk}

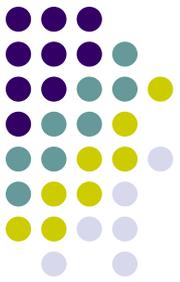
Шаг 7.1. Разбить PP на N дубликатов

Шаг 7.2. Заменить последовательность a_{ij}, a_{lk} на a_{ij}, C_1, a_{lk} ,

$a_{ij}, C_2, a_{lk}, \dots, a_{ij}, C_n, a_{lk}$ в каждом дубликате соответственно

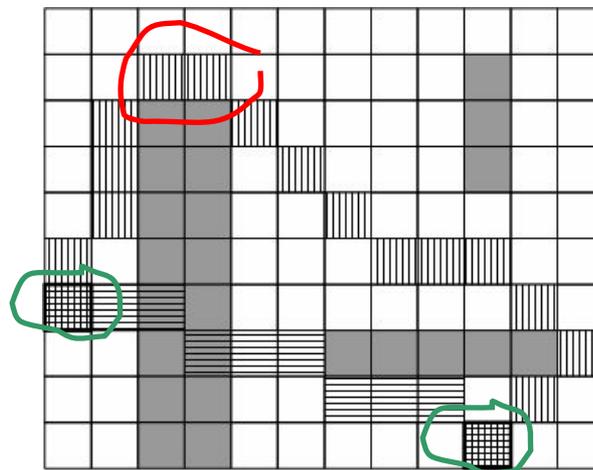
Шаг 8. Перейти к шагу 1

Детерминированный выбор опорных клеток



- **Утверждение**

Если препятствие Obs лежит между клетками a_{ij} , a_{lk} , то частичный план $PP(a_{ij}, a_{lk})$ необходимо содержит клетки, расположенные выше (либо ниже) препятствия Obs .

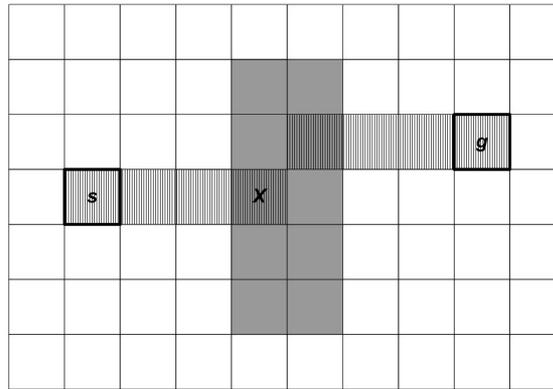


Детерминированный выбор опорных клеток

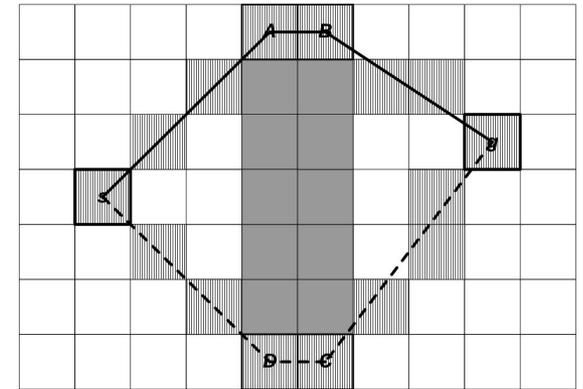


```

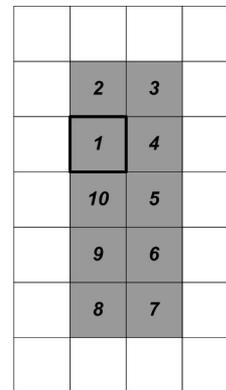
GetBaseCellsForExtension(cell s, cell g, cell X)
int i_up, i_down, j_right, j_left=X.j-1;
cell tmp=X;
while (tmp==1)
    tmp.i--;
i_up=tmp.i; tmp.i++;
while (tmp==1)
    tmp.j++;
j_right=tmp.j; tmp=X;
while (tmp==1)
    tmp.i++;
i_down=tmp.i;
if (i_up>=0){
    A.i=B.i=i_up;
    A.j=j_left;
    B.j=j_right
}
else
    A=B=null;
if (i_down<m){
    C.i=D.i=i_down;
    C.j=j_left;
    D.j=j_right
}
else
    C=D=null;
return {A, B, C, D}
    
```



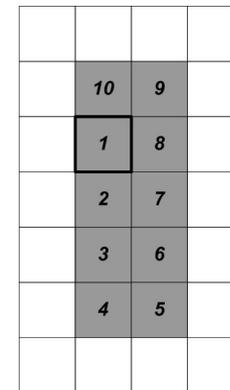
a)



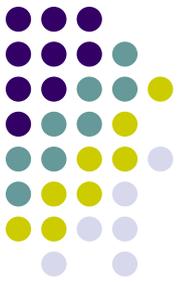
б)



a)



б)



HGA*

Вход: $PPC = \{PP = \{a_{startI\ startJ}, a_{goalI\ goalJ}\}\}$

Шаг 1. Выбрать лучший частичный путь PP из PPC согласно *Критерию Выбора Частичного Плана*

Шаг 2. Если PP удовлетворяет *Критерию Остановки*, то вернуть PP

Шаг 3. В соответствии с *Критерием Выбора Опорных Клеток* выбрать пару опорных клеток из PP - a_{ij}, a_{lk}

Шаг 4. Построить нуль-траекторию $tr(a_{ij}, a_{lk})$

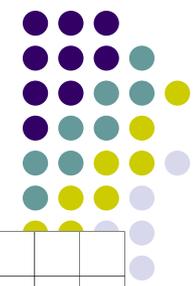
Шаг 5. Если нуль-траектория $tr(a_{ij}, a_{lk})$ проходима, то перейти к шагу 1

Шаг 6. Выполнить процедуру *GetBaseCellsForExtension* для получения опорных клеток A, B, C, D .

Шаг 7. Если $A=B=C=D=null$ вернуть *failure*

Шаг 8. Разбить секцию $\langle a_{ij}, a_{lk} \rangle$ на 2 варианта: a_{ij}, A, B, a_{lk} и a_{ij}, D, C, a_{lk}

Шаг 9. Перейти к шагу 1

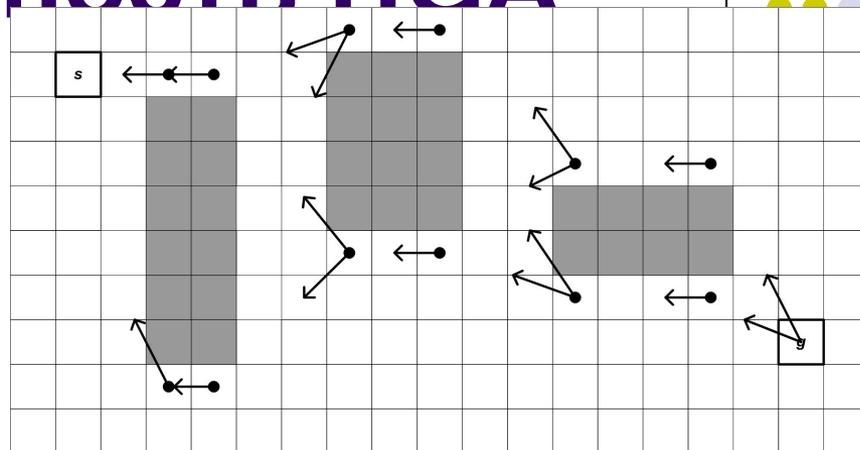


Емкостная сложность HGA*

«Хранить»
клетку – $O(1)$

$$A^* - O(r^2)$$

$$r = \max\{|goalI - startI|, |goalJ - startJ|\}$$



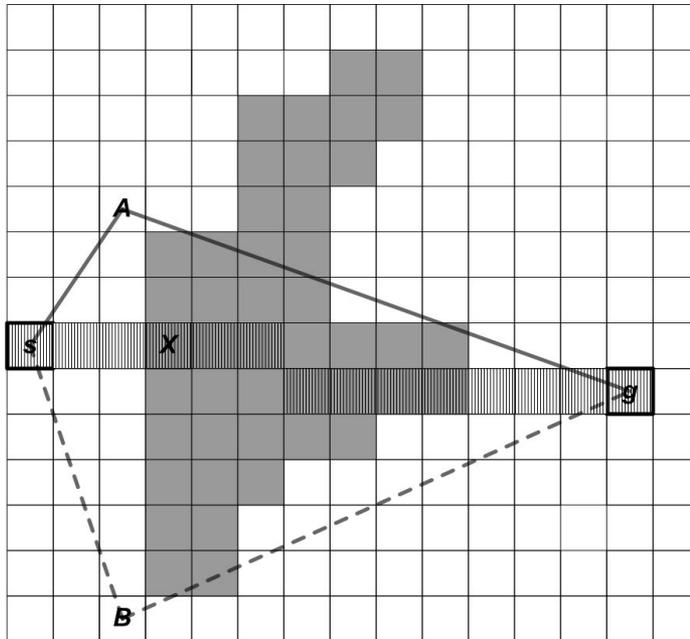
Число препятствий	Число хранимых клеток
0	2
1	6
2	10
...	...

$$Obs \leq r/2$$

$$HGA^* - O(r)$$

$$Obs: 2+4*Obs$$

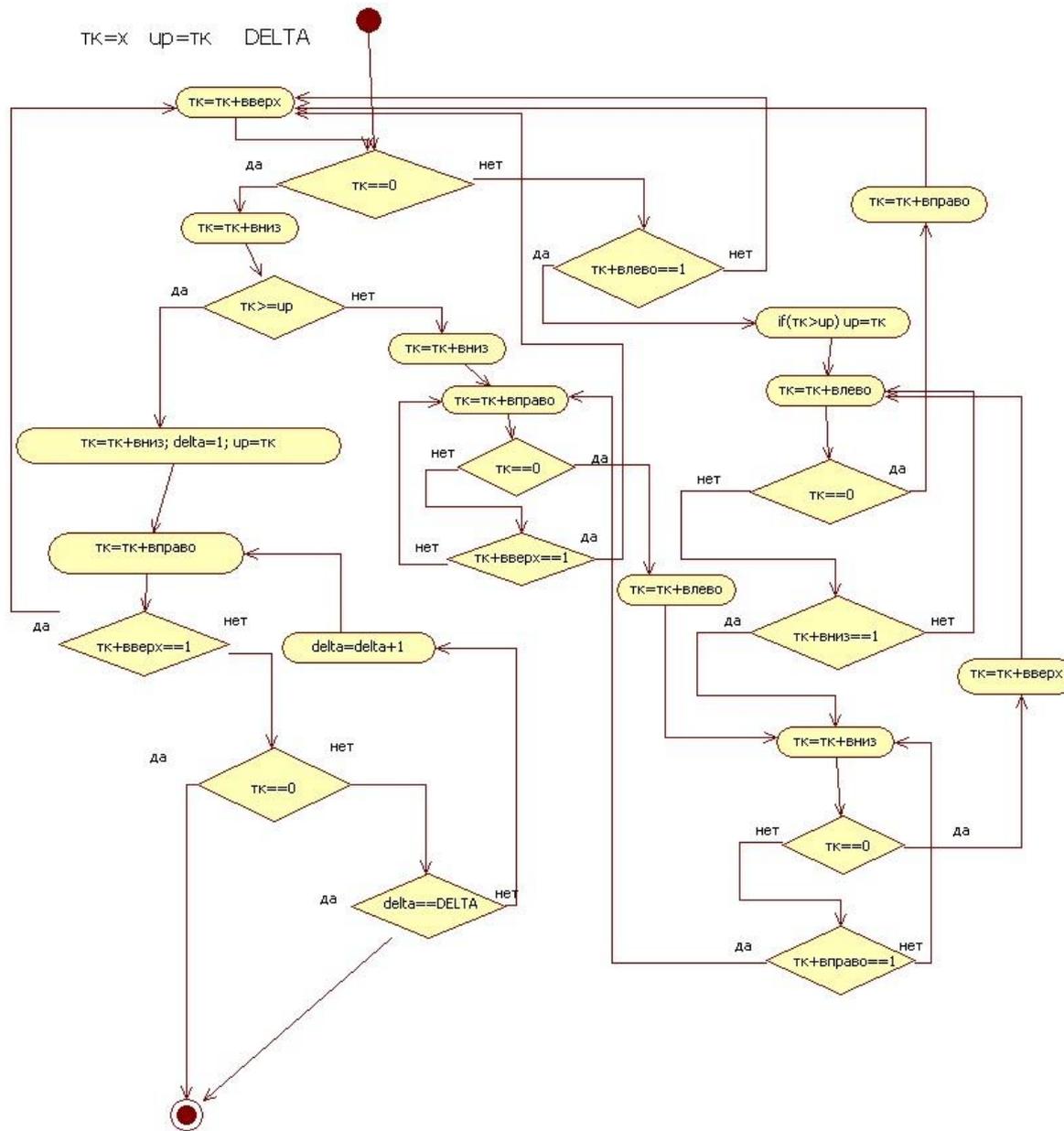
Препятствия нетривиальной формы



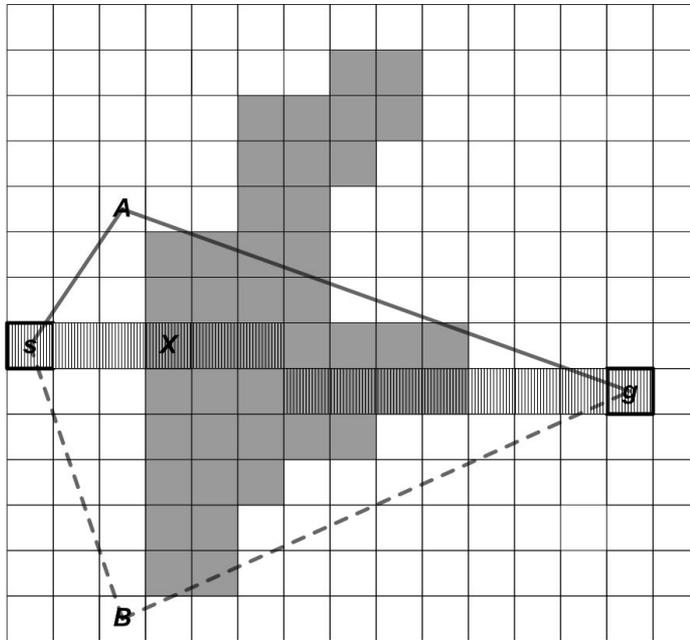
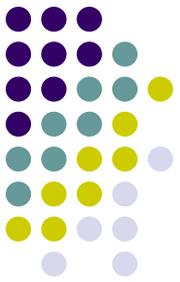
(a)

Обход контура препятствия по (против) часовой стрелке от клетки X до «первого шага в горизонтальном направлении»

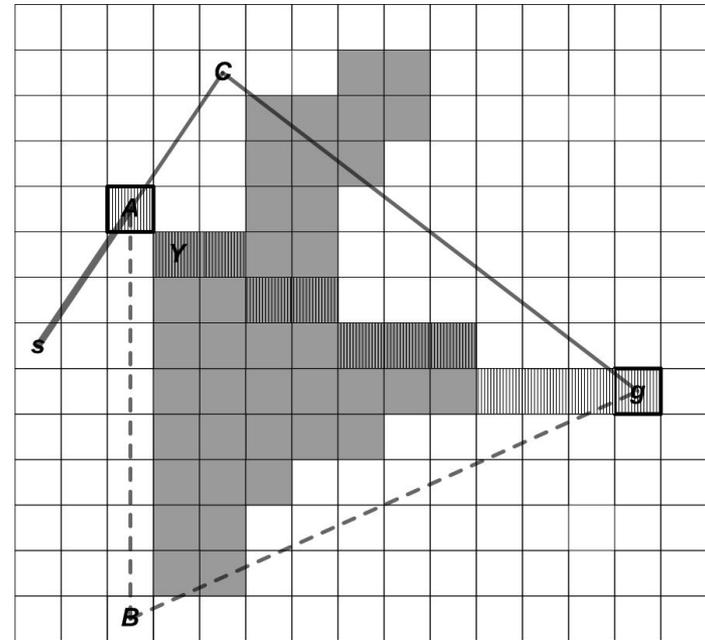
ТК=х up=тк DELTA



Препятствия нетривиальной формы

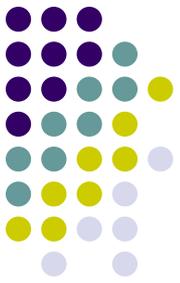


(a)



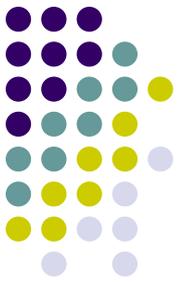
(b)

Экспериментальные результаты.



- 3 серии экспериментов
 - МТ-графы различных размеров с различной степенью заполнения препятствиями
 - МТ-графы – цифровые карты Москвы в разрешении необходимом для обеспечения маловысотного полета беспилотного вертолета

Экспериментальные результаты.

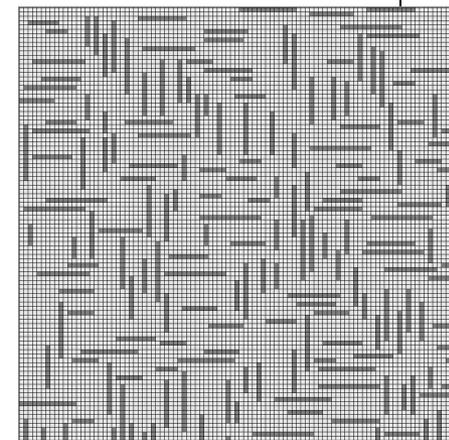
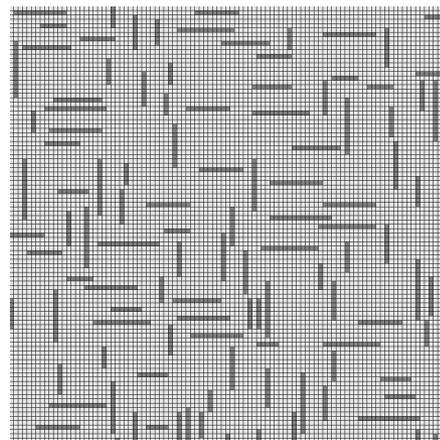


- Алгоритмы
 - HGA*, A*, WA*-3, WA*-5
- Отслеживаемые индикаторы
 - Q – число сохраненных клеток
 - W – вес пути
 - T – затраченное время
 - $EQ=(Q/W)$ – коэффициент емкостной эффективности;
 - $ENQ_{alg}=(Q_{alg}/W_{alg}) (Q_{A^*}/W_{A^*})$ – нормированный коэффициент емкостной эффективности *alg*.

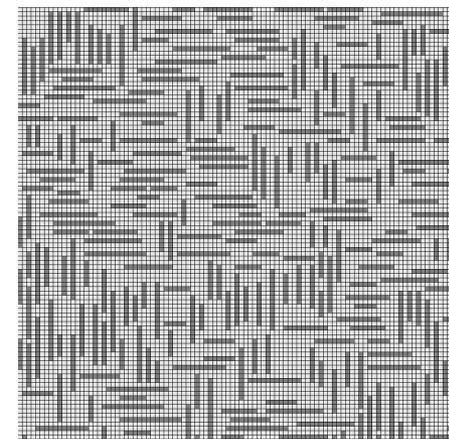


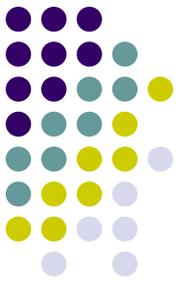
1 серия экспериментов.

λ	Размер	Количество МТ-графов
$\lambda=0,3$	51 x 51	10
$\lambda=0,3$	101 x 101	10
$\lambda=0,3$	251 x 251	10
$\lambda=0,3$	501 x 501	10
$\lambda=0,3$	1001 x 1001	10
$\lambda=0,5$	51 x 51	10
$\lambda=0,5$	101 x 101	10
$\lambda=0,5$	251 x 251	10
$\lambda=0,5$	501 x 501	10
$\lambda=0,5$	1001 x 1001	10
$\lambda=0,8$	51 x 51	10
$\lambda=0,8$	101 x 101	10
$\lambda=0,8$	251 x 251	10
$\lambda=0,8$	501 x 501	10
$\lambda=0,8$	1001 x 1001	10
Итого		150



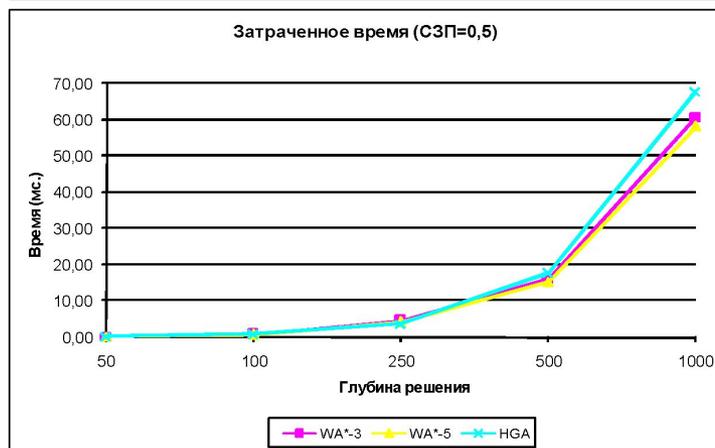
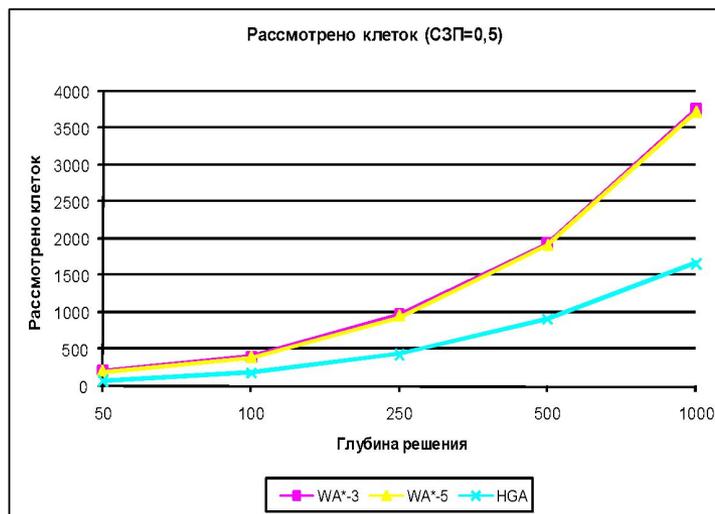
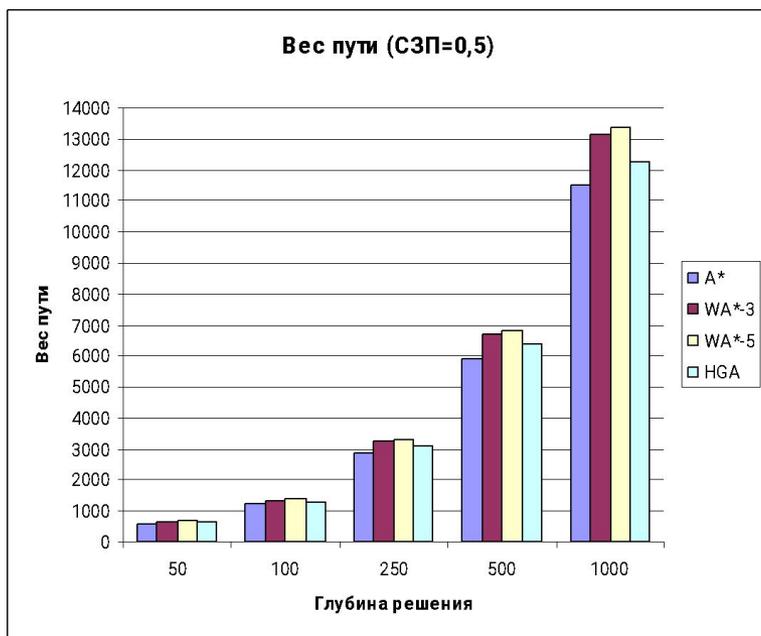
$$\lambda = [(l \cdot 2 + d \cdot 4) \cdot N] / (m \cdot n)$$

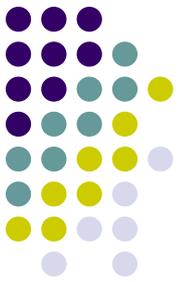




Алгоритм	Выходные параметры	Глубина решения				
		50	100	250	500	1000
A*	W_{A^*}	607	1203	2878	5914,8	11512
A*	Q_{A^*}	575	1861	8828	30278	119153,0
A*	T_{A^*}	5,77	57,74	1154,53	15481,49	261164,80
A*	EQ_{A^*}	0,95	1,55	3,07	5,12	10,35
A*	ENQ_{A^*}	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
WA*-3	W_{WA^*-3}	660	1327	3258	6705,2	13150
WA*-3	Q_{WA^*-3}	208	395	973	1933	3765
WA*-3	T_{WA^*-3}	0,29	0,80	4,60	16,0165	60,85
WA*-3	EQ_{WA^*-3}	0,31	0,30	0,30	0,29	0,29
WA*-3	ENQ_{WA^*-3}	0,33	0,19	0,10	0,06	0,03
WA*-5	W_{WA^*-5}	688	1365	3326	6835,2	13365
WA*-5	Q_{WA^*-5}	205	395	956	1916	3724
WA*-5	T_{WA^*-5}	0,27	0,78	4,26	15,3257	58,26
WA*-5	EQ_{WA^*-5}	0,30	0,29	0,29	0,28	0,28
WA*-5	ENQ_{WA^*-5}	0,32	0,19	0,09	0,05	0,03
HGA*	W_{HGA^*}	631	1286	3084	6378,4	12234
HGA*	Q_{HGA^*}	73	184	435	917	1677
HGA*	T_{HGA^*}	0,28	0,99	3,74	17,7148	67,85
HGA*	EQ_{HGA^*}	0,12	0,14	0,14	0,14	0,14
HGA*	ENQ_{HGA^*}	0,12	0,09	0,05	0,03	0,01

1 серия экспериментов. Результаты.





2 серия экспериментов

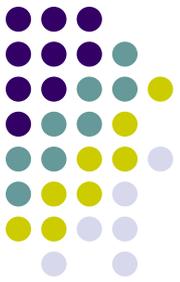
- Размер МТ-графа фиксирован 101×101
- Глубина решения фиксирована 100
- СЗП фиксирована $\lambda = 0.5$
- Длины препятствий варьируются
 - $l=2, 5, 10, 15, 25$

Алгоритм	Выходные параметры	Средняя длина препятствия				
		2	5	10	15	25
A*	W_{A^*}	1179	1153	1180	1207	1293
A*	Q_{A^*}	537	686	1855	1457	2248
A*	T_{A^*}	2,38	6,55	49,91	31,76	86,77
A*	EQ_{A^*}	0,46	0,59	1,57	1,21	1,74
A*	ENQ_{A^*}	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
WA*-3	W_{WA^*-3}	1221	1229	1336	1318	1448
WA*-3	Q_{WA^*-3}	371	351	410	410	587
WA*-3	T_{WA^*-3}	0,58	0,55	0,90	1,01	3,28
WA*-3	EQ_{WA^*-3}	0,30	0,29	0,31	0,31	0,41
WA*-3	ENQ_{WA^*-3}	0,67	0,48	0,20	0,26	0,23
WA*-5	W_{WA^*-5}	1221	1231	1394	1370	1498
WA*-5	Q_{WA^*-5}	371	350	405	400	530
WA*-5	T_{WA^*-5}	0,59	0,55	0,85	0,92	2,18
WA*-5	EQ_{WA^*-5}	0,30	0,28	0,29	0,29	0,35
WA*-5	ENQ_{WA^*-5}	0,67	0,48	0,18	0,24	0,20
HGA*	W_{HGA^*}	1187	1180	1270	1277	1472
HGA*	Q_{HGA^*}	101	141	199	117	124
HGA*	T_{HGA^*}	0,45	0,74	1,06	0,57	0,57
HGA*	EQ_{HGA^*}	0,08	0,12	0,16	0,09	0,08
HGA*	ENQ_{HGA^*}	0,19	0,20	0,10	0,08	0,05

0,05

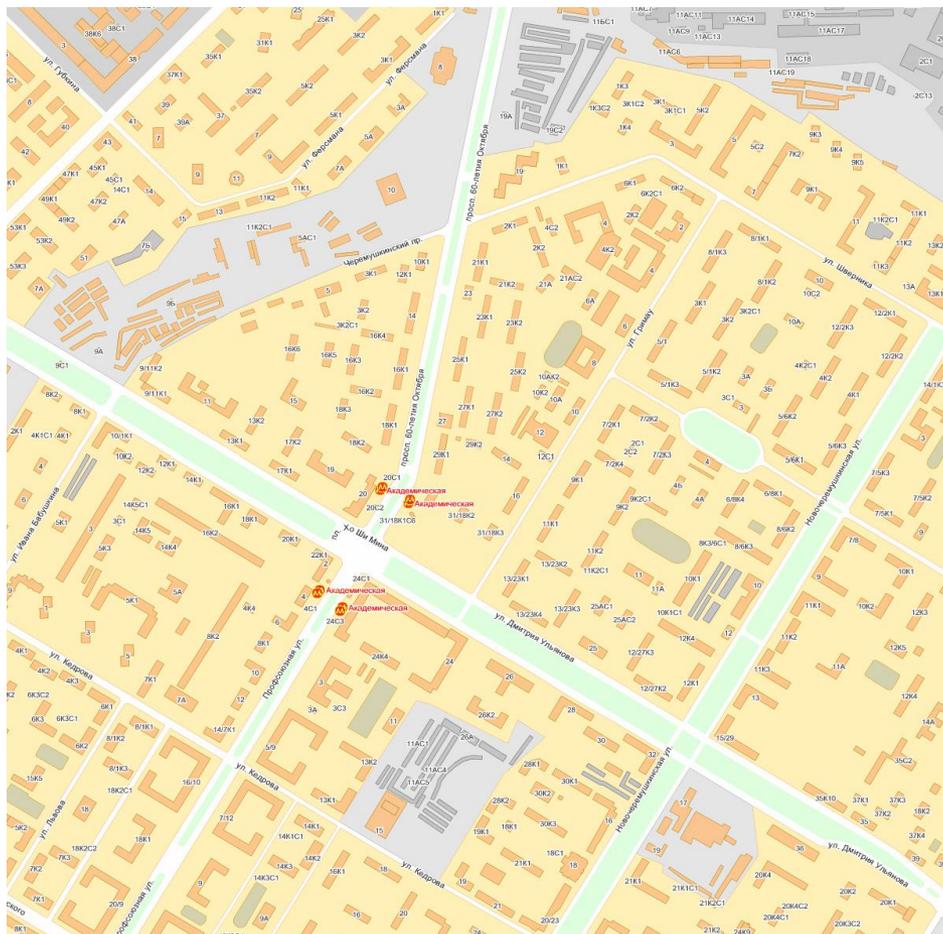


3 серия экспериментов. Маловысотный полет вертолета.

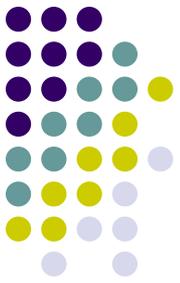


- 2 МТ-графа (цифровые карты местности Москвы, 2x2 км)
- Глубина решения $r=100$
- Случайный выбор начальной и целевых клеток (10 повторений на каждый МТ-граф)
- A^* , WA^*-5 , HGA^*

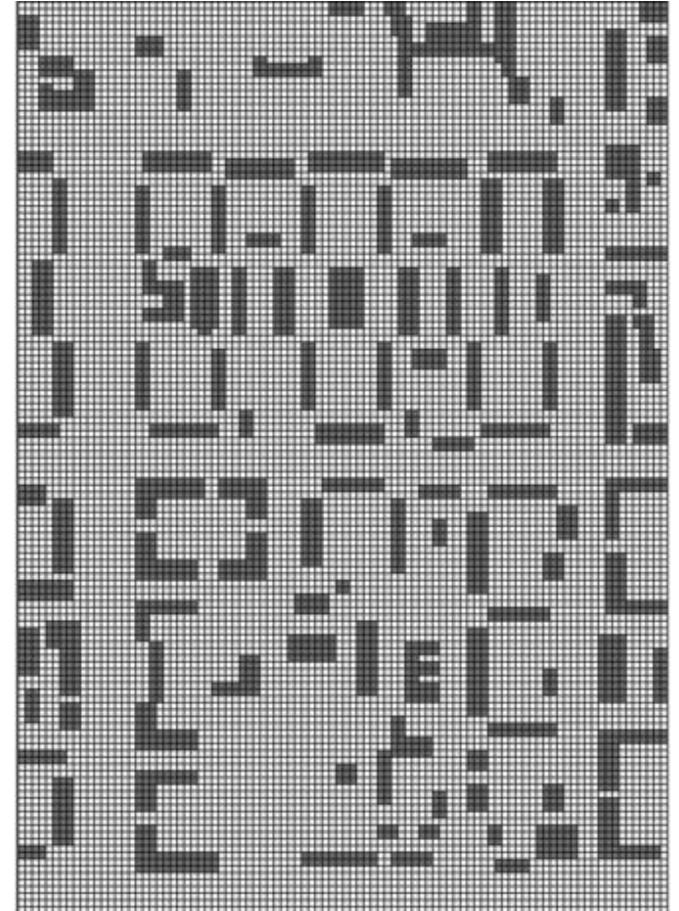
3 серия экспериментов.



3 серия экспериментов.



КИИ-2010



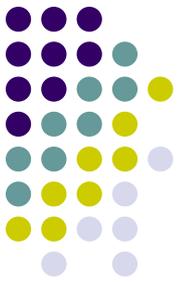
33



0,13

Алгоритм	Выходные параметры	МТ-граф 1	МТ-граф 2
A*	W_{A^*}	1228	1187
A*	Q_{A^*}	1161	1302
A*	T_{A^*}	177,04	80,55
A*	EQ_{A^*}	0,95	1,10
A*	ENQ_{A^*}	1,00	1,00
WA*-5	W_{WA^*-5}	1301	1277
WA*-5	Q_{WA^*-5}	382	335
WA*-5	T_{WA^*-5}	6,48	1,80
WA*-5	EQ_{WA^*-5}	0,29	0,26
WA*-5	ENQ_{WA^*-5}	0,31	0,24
HGA*	W_{HGA^*}	1269	1278
HGA*	Q_{HGA^*}	78	184
HGA*	T_{HGA^*}	3,30	2,94
HGA*	EQ_{HGA^*}	0,06	0,14
HGA*	ENQ_{HGA^*}	0,06	0,13

Выводы по результатам экспериментов



- HGA* использует вычислительные ресурсы гораздо эффективней аналогов
- HGA* лучше масштабируется
- HGA* эффективно обрабатывает на МТ-графах с любой степенью заполнения любыми типами «элементарных» препятствий
- HGA* может использоваться в задачах планирования траектории характерных для «городского» ландшафта

Спасибо за внимание

