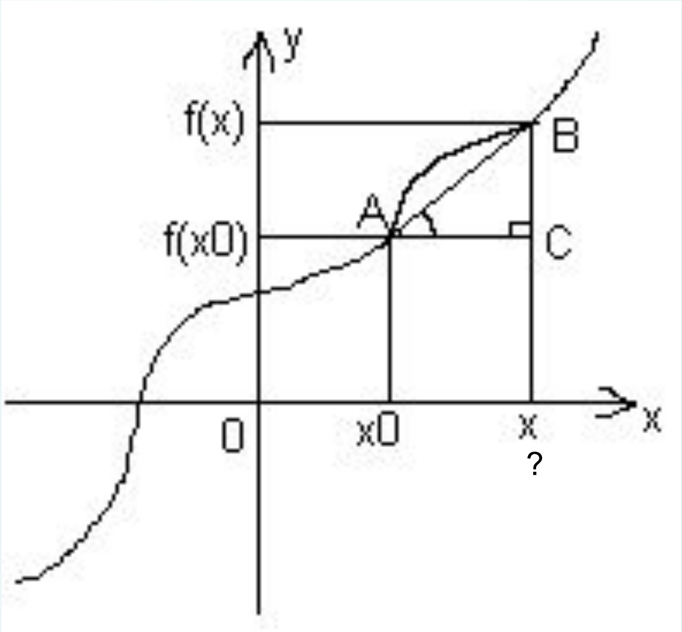
Производная и ее приложения.

Приращение функции. Физический смысл производной. Вычисление производной по определению

Приращение функции



1) Сформулируйте определения приращения аргумента и приращения функции в данной точке x_0.

2) От чего зависит приращение функции при каждом фиксированном x_0?

3) Что показывает на графике отношение $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$

Физический смысл производной, рассмотрим падение тела с некоторой высоты

- рассмотрим промежуток Δt от момента t_0 до $t = t_0 + \Delta t$. Тогда $\Delta S(t_0) = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = ... = gt_0\Delta t + g(\Delta t)^2$, то есть, при фиксированном t0 **$\Delta S(t_0)$ зависит только от Δt !** Для рассматриваемой функции: Δt – приращение аргумента в точке t_0; $\Delta S(t_0)$ – приращение функции в этой точке. Средняя скорость
- движения на $[t_0; t_0 + \Delta t]$ равна: $V_{ср.} = \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2} g\Delta t = V_0 + \frac{1}{2} g\Delta t$. Пусть $\Delta t \to 0$, тогда

$$\lim_{\Delta t \to 0} V_{ср.} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(V_0 + \frac{1}{2} g\Delta t\right) = V_0$$

Таким образом, для каждого фиксированного момента времени t_0 $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = V_0$ – равен некоторому числу, которое называется ***мгновенной скоростью падения тела в момент времени t_0!***

Определение

- ***Производной функции* в точке x_0 *называется предел* отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю.**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Определения.

- 1) ***Функция называется дифференцируемой в точке x_0, если $\exists f'(x_0)$.***
- 2) ***Функция называется дифференцируемой на множестве I, если она дифференцируема в каждой точке из этого множества.***
- Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на I. Тогда $\forall x_0 \in I \ \exists \ f'(x_0)$. ***Соответствие $\{x_0\} \to \{f'(x_0)\}$ определяет новую функцию, которая называется производной функции $y = f(x)$ и обозначается $f'(x)$.***
- **В чем различие $f'(x)$ и $f'(x_0)$?** [функция и число]. ***Операция вычисления производной функции называется дифференцированием функции.***

Вычисление производных по определению

- 1) **f(x) = C**.

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) – f(x_0) = C – C = 0;$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Таким образом,.

(C)' = 0

- 2) **f(x) = kx + b**.
- $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) – f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) – kx_0 = k\Delta x;$
- $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k$$

.

Таким образом,

(kx + b)' = k

Алгоритм нахождения производной:

- Зафиксировать значение x_0 и найти $f(x_0)$
- Дать аргументу x_0 приращение Δx ,и найти $f(x_0+\Delta x)$
- Найти приращение $\Delta y= f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$
- Составить отношение $\Delta y / \Delta x$
- Вычислить

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Вычислить по определению производные

- 3) $f(x) = ax^2 + bx + c$
- 4) $f(x) = \sqrt{x}$. **f’(0) – не существует**

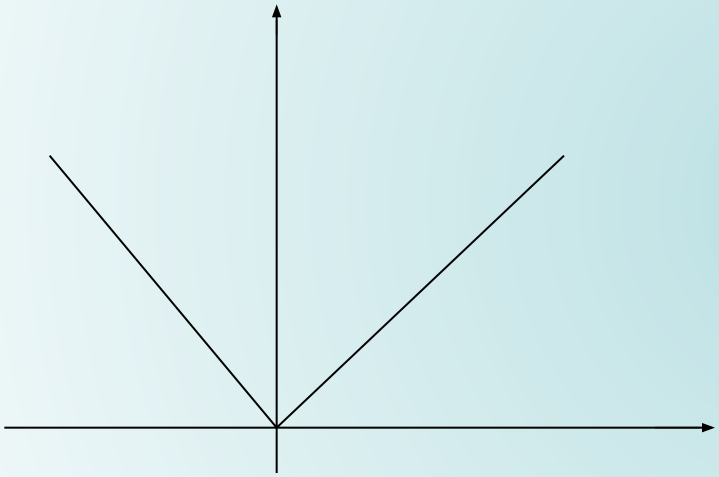
.

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(ax2 + bx + c)’ = 2ax + b

Рассмотрим функцию f(x) = |x| и ее график

- Докажем по определению, что



$$f'(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x>0\\ -1, \text{ если } x<0\end{cases}$$

А) Пусть $x_0 > 0$, тогда выберем Δx так, чтобы $x_0 + \Delta x > 0$. $\Delta f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = \Delta x$;

- . $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

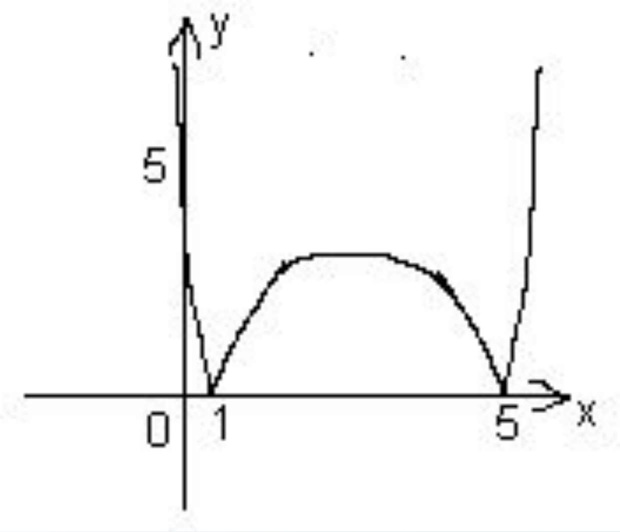
Б) Пусть $x_0 < 0$, тогда выберем Δx так, чтобы $x_0 + \Delta x < 0$. Аналогично получим, что . $f'(x_0) = -1$

В) Пусть $x_0 = 0$, тогда $\Delta f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = |\Delta x|$.

, $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$ не существует, поэтому

- данная функция не дифференцируема в нуле.

- **F(x) = |x2 – 6x + 5|.**
- А) Постройте график функции.
- Б) Найдите f'(2) и f'(6).
- В) (*по вариантам*) Докажите, что в точках $x_0 = 1$ и $x_0 = 5$ функция не дифференцируема



$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x+5, \text{ если } x\le 1 \text{ или } x\ge 5 \\ -x^2+6x-5, \text{ если } 1<x<5 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-6, \text{ если } x<1 \text{ или } x>5 \\ -2x+6, \text{ если } 1<x<5 \end{cases}$$

f'(2) = 2; f'(6) = 6

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|\cdot|x-5|}{x-1}$$ не существует, так как

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|\cdot|x-5|}{x-1}=4 \qquad \lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|\cdot|x-5|}{x-1}=-4$$

- $$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|\cdot|x-5|}{x-5}$$

не существует, так как

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{|x-1|\cdot|x-5|}{x-5}=4 \qquad \lim_{x\to 5-0}\frac{|x-1|\cdot|x-5|}{x-5}=-4$$

Домашнее задание

- Выучить стр163 п1,2,3 и записи
- Вып.№392 (3,5,7) №393(1,2)
- Составить таблицу производных.
- Вопросы по теории:
- 1)Сформулируйте определение приращения функции и приращения аргумента.
- 2) определение производной функции в точке.
- 3)Физический смысл производной
- 4)Как называется операция нахождения производной?
- 5)Какая функция называется дифференцируемой в точке?.
- 6)Какая функция называется дифференцируемой на отрезке?
- 7)Алгоритм вычисления производной.
- 8) Вычислять по определению производные простейших функций.