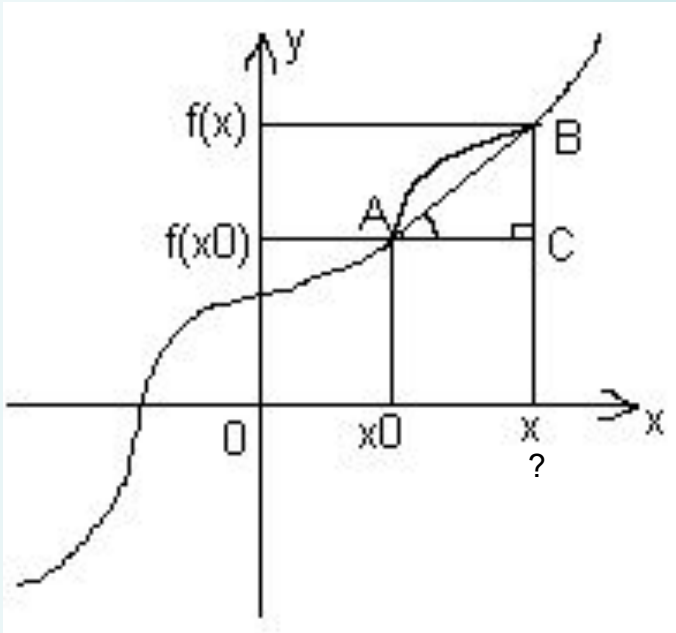


Производная и ее приложения.

Приращение функции. Физический смысл производной. Вычисление производной по определению

Приращение функции



1) Сформулируйте определения приращения аргумента и приращения функции в данной точке x_0 .

2) От чего зависит приращение функции при каждом фиксированном x_0 ?

3) Что показывает на графике отношение $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$

Физический смысл производной, рассмотрим падение тела с некоторой высоты

- рассмотрим промежуток Δt от момента t_0 до $t = t_0 + \Delta t$. Тогда $\Delta S(t_0) = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = \dots = gt_0\Delta t + g(\Delta t)^2$, то есть, при фиксированном t_0 **$\Delta S(t_0)$ зависит только от Δt !** Для рассматриваемой функции: Δt – приращение аргумента в точке t_0 ; $\Delta S(t_0)$ – приращение функции в этой точке. Средняя скорость движения на $[t_0; t_0 + \Delta t]$ равна: $v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g\Delta t = V_0 + \frac{1}{2}g\Delta t$. Пусть $\Delta t \rightarrow 0$, тогда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(V_0 + \frac{1}{2}g\Delta t \right) = V_0$$

Таким образом, для фиксированного момента времени t_0 – равен некоторому числу, которое называется

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = V_0$$

мгновенной

скоростью падения тела в момент времени t_0 !

Определение

- **Производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю.**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Определения.

- 1) **Функция называется дифференцируемой в точке x_0 , если $\exists f'(x_0)$.**
- 2) **Функция называется дифференцируемой на множестве I , если она дифференцируема в каждой точке из этого множества.**
- Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на I . Тогда $\forall x_0 \in I \exists f'(x_0)$. **Соответствие $\{x_0\} \rightarrow \{f'(x_0)\}$ определяет новую функцию, которая называется производной функции $y = f(x)$ и обозначается $f'(x)$.**
- **В чем различие $f'(x)$ и $f'(x_0)$? [функция и число].**
Операция вычисления производной функции называется дифференцированием функции.

Вычисление производных по определению

- 1) $f(x) = C$.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0;$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Таким образом, ..

$$(C)' = 0$$

- 2) $f(x) = kx + b$.

- $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) - kx_0 = k\Delta x;$

- $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k$

Таким образом, ..

$$(kx + b)' = k$$

Алгоритм нахождения производной:

- Зафиксировать значение x_0 и найти $f(x_0)$
- Дать аргументу x_0 приращение Δx , и найти $f(x_0 + \Delta x)$
- Найти приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- Составить отношение $\Delta y / \Delta x$
- Вычислить

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

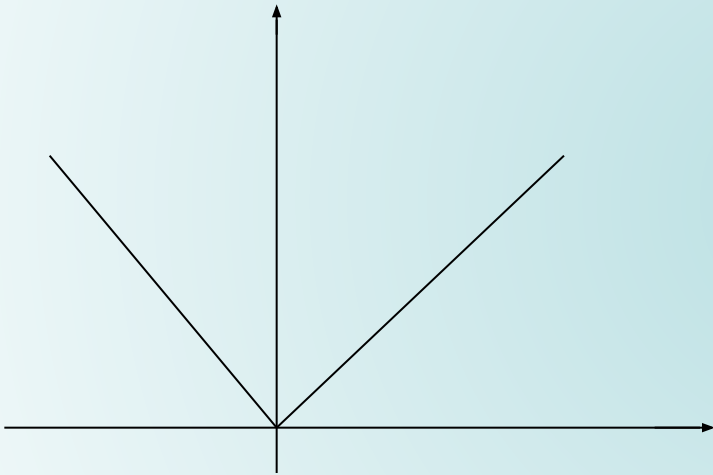
Вычислить по определению производные

- 3) $f(x) = ax^2 + bx + c$
- 4) $f(x) = \sqrt{x}$. $f'(0)$ – не существует

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$ и ее график

- Докажем по определению, что



$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

А) Пусть $x_0 > 0$, тогда выберем Δx так, чтобы $x_0 + \Delta x > 0$. $\Delta f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = \Delta x$;

$$\bullet \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$$

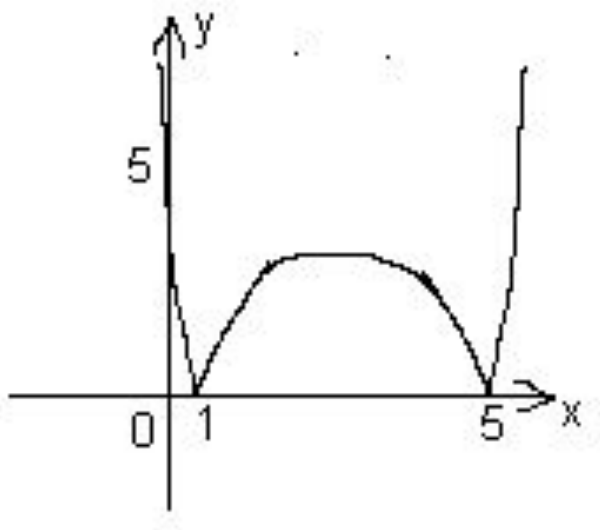
Б) Пусть $x_0 < 0$, тогда выберем Δx так, чтобы $x_0 + \Delta x < 0$. Аналогично получим, что $f'(x_0) = -1$

В) Пусть $x_0 = 0$, тогда $\Delta f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = |\Delta x|$.

, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не существует, поэтому

- данная функция не дифференцируема в нуле.

- $F(x) = |x^2 - 6x + 5|$.
- А) Постройте график функции.
- Б) Найдите $f'(2)$ и $f'(6)$.
- В) (по вариантам) Докажите, что в точках $x_0 = 1$ и $x_0 = 5$ функция не дифференцируема



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5, & \text{если } x \leq 1 \text{ или } x \geq 5 \\ -x^2 + 6x - 5, & \text{если } 1 < x < 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6, & \text{если } x < 1 \text{ или } x > 5 \\ -2x + 6, & \text{если } 1 < x < 5 \end{cases}$$

$$f'(2) = 2; f'(6) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1| \cdot |x - 5|}{x - 1}$$

не существует, так как

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{|x - 1| \cdot |x - 5|}{x - 1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x - 1| \cdot |x - 5|}{x - 1} = -4$$

- $$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1| \cdot |x - 5|}{x - 5}$$

не существует, так как

$$\lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{|x - 1| \cdot |x - 5|}{x - 5} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{|x - 1| \cdot |x - 5|}{x - 5} = -4$$

Домашнее задание

- Выучить стр 163 п 1,2,3 и записи
- Вып. №392 (3,5,7) №393(1,2)
- Составить таблицу производных.
- Вопросы по теории:
 - 1) Сформулируйте определение приращения функции и приращения аргумента.
 - 2) определение производной функции в точке.
 - 3) Физический смысл производной
 - 4) Как называется операция нахождения производной?
 - 5) Какая функция называется дифференцируемой в точке?
 - 6) Какая функция называется дифференцируемой на отрезке?
 - 7) Алгоритм вычисления производной.
 - 8) Вычислять по определению производные простейших функций.