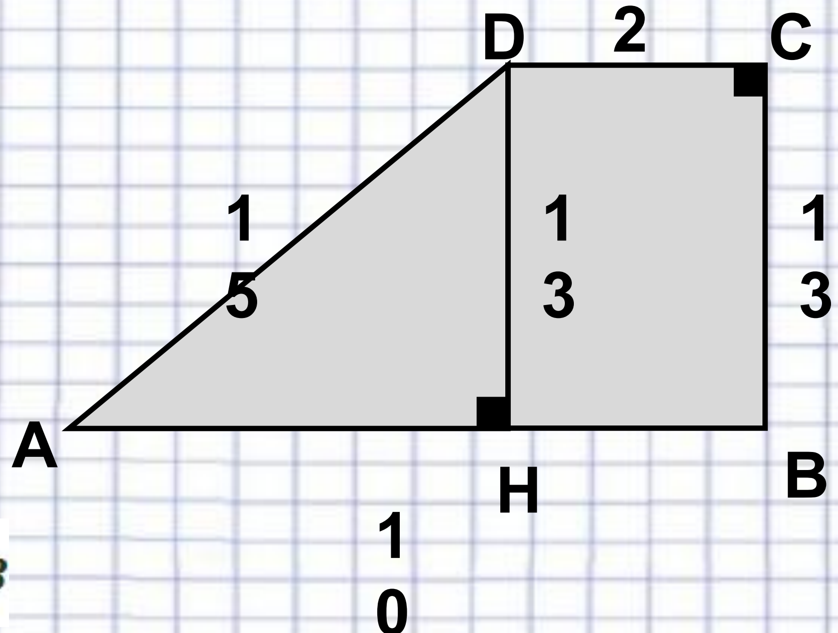
Задачи
на максимум
и
минимум

Задача Льва Толстого

$$DH = \sqrt{15^2 - (10 - 2)^2} \approx 13$$



$$S = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CB$$

$$S = \frac{1}{2}(10 + 2) \cdot 13 = 78$$

Трапеция или прямоугольник ?

В роковой для своей жизни день Пахом прошел $10 + 13 + 2 + 15 = 40$ верст, идя по сторонам трапеции. Его первоначальным намерением было идти по сторонам прямоугольника; трапеция же получилась случайно, в результате пл расчета.

Интересно

выгадал он или прогадал от того, что участок его оказался не прямоугольником, а трапецией? В каком случае он должен был получить большую площадь земли?

Решение.

Прямоугольников с периметром в 40 верст может быть очень много, и каждый имеет другую площадь.

$14 \cdot 6 = 84$ кв. верст

$13 \cdot 7 = 91$ кв. верст

$12 \cdot 8 = 96$ кв. верст

$11 \cdot 9 = 99$ кв. верст

> 78 кв. верст

$18 \cdot 2 = 36$ кв. верст

$19 \cdot 1 = 19$ кв. верст

$19\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 9\frac{3}{4}$ кв. верст

< 78 кв. верст

Следовательно, на вопрос задачи нельзя дать определенного ответа

***Есть прямоугольники с большей площадью, чем трапеция, но есть и с меньшей, при одном и том же периметре*.**

Трапеция или прямоугольник ?

Площадь квадрата больше!

В роковой для своей жизни день Пахом прошел $10 + 13 + 2 + 15 = 40$ верст, идя по сторонам трапеции. Его первоначальным намерением было идти по сторонам прямоугольника; трапеция же получилась случайно, в результате плохого расчета.

Зато можно дать ответ на вопрос: какая из всех прямоугольных фигур с заданным периметром заключает самую большую площадь?

Итак, **я выдвинул предположение, что из всех прямоугольных фигур, с заданным периметром, квадрат имеет наибольшую площадь**.

Следовательно, **на вопрос задачи нельзя дать определенного ответа**
***Есть прямоугольники с большей площадью, чем трапеция, но есть и с меньшей, при одном и том же периметре*.**

Замечательное свойство квадрата

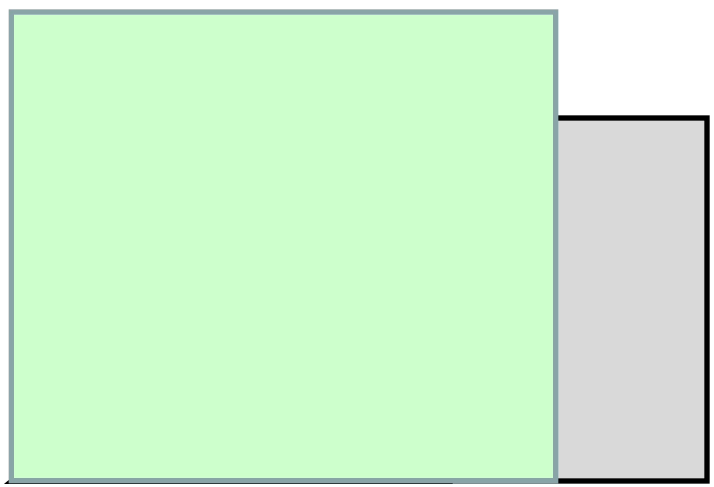
Теорема 1. *Квадрат имеет наибольшую площадь из всех прямоугольников с таким же периметром*

Замечательное свойство квадрата

Теорема 2. *Из всех прямоугольников с одинаковой площадью квадрат имеет наименьший периметр*

Знакомство с этими свойствами квадрата
помогло бы Пахому правильно рассчитать свои силы
и получить прямоугольный участок наибольшей площади.

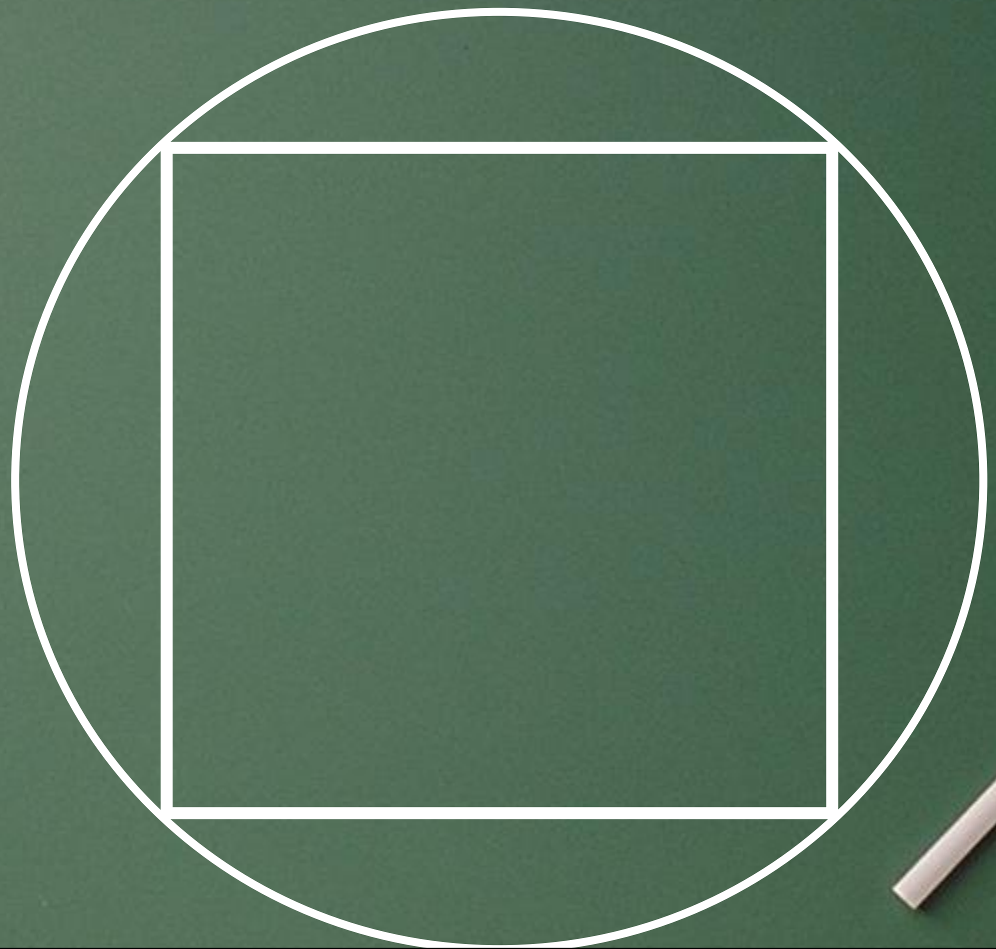
Зная, что он может пройти в день без напряжения сил, скажем 36 верст, он пошел бы по границе квадрата со стороной 9 верст и к вечеру был бы обладателем участка в 81 кв. версту, - что на 3 кв. версты больше, чем он получил.



Знакомство с этими свойствами квадрата помогло бы Пахому правильно рассчитать свои силы и получить прямоугольный участок наибольшей площади.

И наоборот, если бы он наперед ограничился какою-нибудь определенной площадью прямоугольного участка, например в 64 кв. верст, то мог бы достичь результата с наименьшей затратой сил, идя по границе квадрата, сторона которого 8 верст.

Но может быть, Пахому еще выгоднее было бы выкроить себе участок вовсе не прямоугольной формы, а какой-нибудь другой – четырехугольной, треугольной, пятиугольной и т.д.?

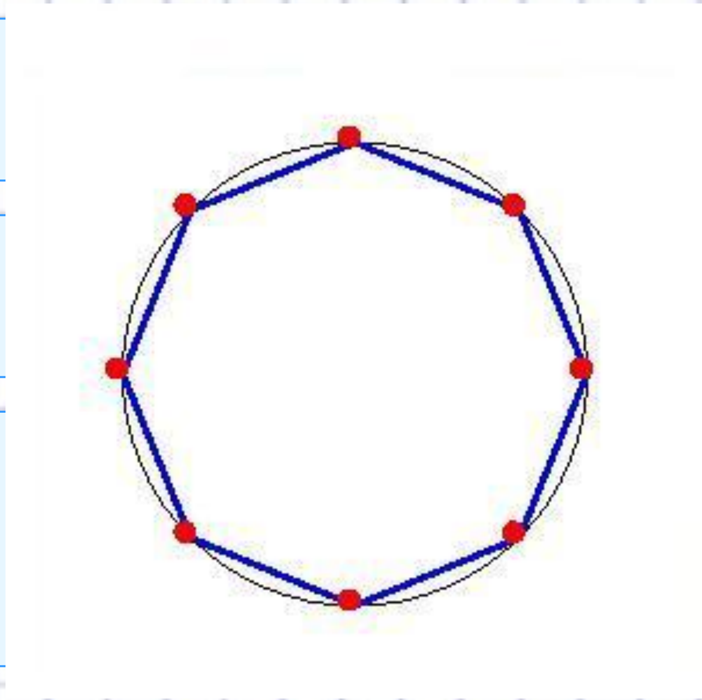


Теорема 3. *Среди всех замкнутых линий, данной длины, окружность охватывает наибольшую площадь площадью*

Мы сделали

5. Среди всех замкнутых линий, данной длины, окружность охватывает наибольшую площадь

2.



3. …, чем
…ного

4. …драта с площадью
…и т.д. равного периметра,
…ется: правильный
…лощадью, правильный
…т.д.

В математике вопросы подобного рода носят название

Задачи на максимум и мин

Задачи, которые мы рассматривали, рассматривают вопрос со стороны как бы экономической:

при дан

как достигнуть наивыгоднейшего результата (охватить наибольший участок)?

Они могут быть весьма разнообразны по сюжетам и степени трудности.

Многие разрешаются лишь приемами высшей математики,

но …

есть и такие задачи, для решения которых достаточно самых элементарных сведений:

любопытное свойство произведения равных множителей

Произведение множителей, имеющих постоянную сумму

$a \cdot b \cdot c$

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3}$$

Это произведение больше!

Теорема. *Произведение достигает наибольшей величины, когда множители равны между собой*

Мы рассмотрели
и решили
следующие
задачи

Задачи

1. Доказать, что среди а) прямоугольников, б) ромбов с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет **квадрат**.
в) Какими должны быть стороны вписанного в окружность прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

2. Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

3. Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

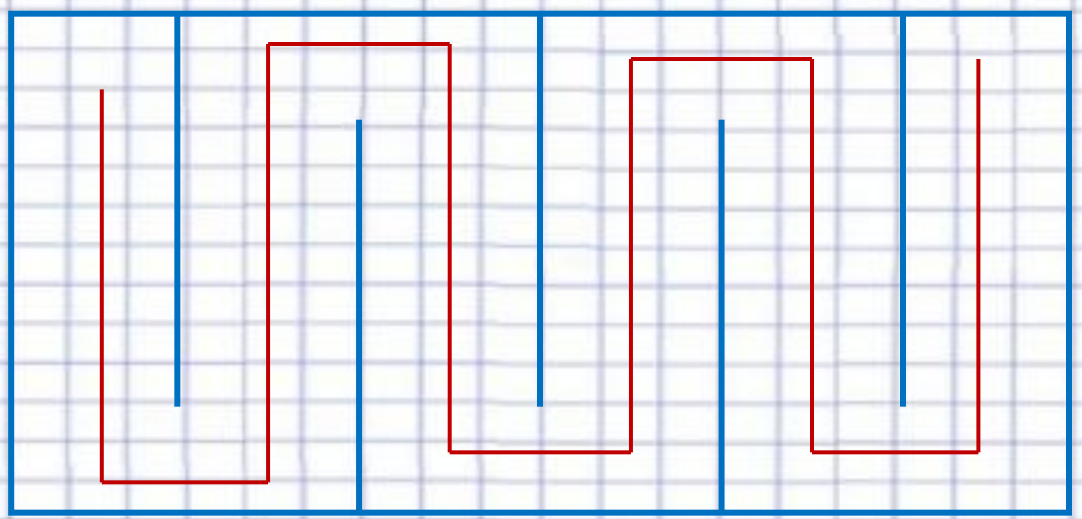
4. Площадь прямоугольника составляет $16\ \text{см}^2$ Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

5. Огораживают спортивную площадку прямоугольной формы площадью 2500 м^2 Каковы должны быть ее размеры, чтобы на забор ушло наименьшее количество сетки «рабицы»?

6. Дана прямая l и две точки A и B, лежащие а) по разные стороны, б) по одну сторону от прямой l. Найдите такую точку X на прямой l, что $AX + BX$ инимает наименьшее значение.

А на последок…

При помощи ножниц вырежьте в тетрадном листе дырку, через которую мог бы пролезть слон !



Дальше есть решения задач.

Это всё, что мы хотели ВАМ сегодня рассказать !

Можно посмотреть

Решение задач

Задача

1. Доказать, что среди
а) прямоугольников,
б) ромбов
с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет **квадрат**.
в) Какими должны быть стороны вписанного в окружность прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Доказательство.

а) Пусть $P-$ периметр квадрата и периметр прямоугольника (дано, что эти периметры равны).

1) $P-$ периметр квадрата => $\frac{P}{4}-$ сторона квадрата=> $\left(\frac{P}{4}\right)^2-$его площадь;

2) Чтобы из квадрата сделать прямоугольник, мы одну из сторону квадрата

увеличим на x, и она станет $\frac{P}{4}+x$

тогда для сохранения периметра, другую сторону должны уменьшить на x

и она станет $\frac{P}{4}-x$

3) Площадь прямоугольника $\left(\frac{P}{4}-x\right)\left(\frac{P}{4}+x\right)$

Задача

1. Доказать, что среди

а) прямоугольников,

б) ромбов

с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет **квадрат**.

в) Какими должны быть стороны вписанного в окружность прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Доказательств

а. Сравним площади квадрата и прямоугольника:

$$S_{\text{прямоугольника}} = \left(\frac{P}{4} - x\right)\left(\frac{P}{4} + x\right) = \left(\frac{P}{4}\right)^2 - x^2 \le \left(\frac{P}{4}\right)^2 = S_{\text{квадрата}}$$

т.к. $x^2 \ge 0$ $\quad S_{\text{прямоугольника}} < S_{\text{квадрата}}$

б) P – периметр ромба => $\frac{P}{4}$ – сторона ромба =>

Пусть

$$S_{\text{ромба}} = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \cdot \sin\alpha \le \left(\frac{P}{4}\right)^2 \cdot 1 = S_{\text{квадрата}}$$

т.к. $\sin\alpha \le 1$

Задача

1. Доказать, что среди

а) прямоугольников,

б) ромбов

с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет **квадрат**.

в) Какими должны быть стороны вписанного в окружность прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Доказательство.

в) Из всех прямоугольников наибольшую площадь имеет квадрат. Значит, в окружность вписан квадрат, и тогда его сторона x находится из уравнения

$x^2 + x^2 = (2R)^2$ => $2x^2 = 4R^2$ => $x = R\sqrt{2}$

Ответ: стороны прямоугольника должны быть равны $R\sqrt{2}$ где R - радиус данной окружности.

Задача

2. Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

Решение.

Из всех прямоугольников с заданным периметром, квадрат имеет наибольшую площадь (по теореме 1).

Значит, прямоугольник должен быть квадратом.

$$\boxed{P_{квадрата} = 4a}$$

$$P = 56\ см \quad \Rightarrow \quad a = 56 : 4 = 14 см$$

Ответ: стороны прямоугольника должны быть равны 14 см и 14 см.

3. Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Решение.

По теореме 1 участок должен быть квадратом

$$\boxed{P_{квадрата} = 4a}$$

$$P = 200\ м \quad \Rightarrow \quad a = 200 : 4 = 50\ м$$

Ответ: стороны участка 50 м и 50 м.

Задача

4. Площадь прямоугольника составляет 16 $см^2$. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

Решени е.

По теореме 2 участок должен быть квадратом. $\boxed{S_{квадрата} = a^2}$

$$S = 16\ см^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{16} = 4\ см$$

Ответ: стороны прямоугольника должны быть равны 4 см и 4 см.

5. Огораживают спортивную площадку прямоугольной формы площадью 2500 $м^2$. Каковы должны быть ее размеры, чтобы на забор ушло наименьшее количество сетки «рабицы»?

Решени е.

По теореме 2 площадка должна быть квадратной формы. $\boxed{S_{квадрата} = a^2}$

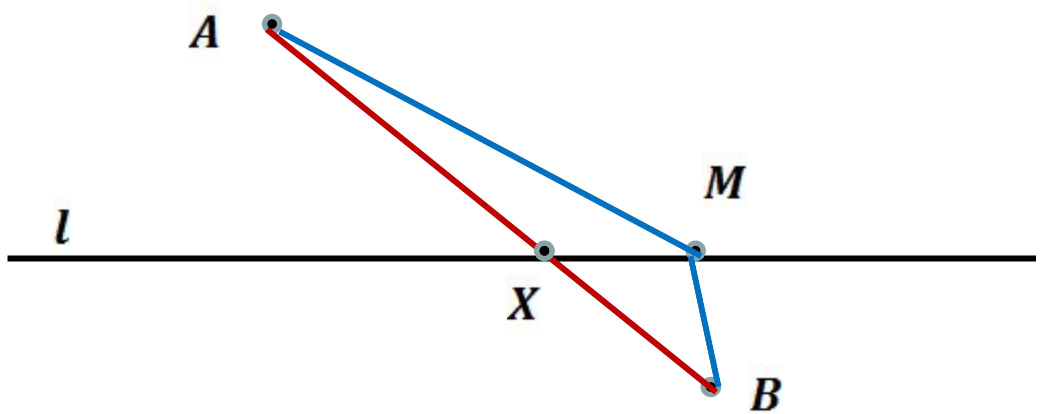
$$S = 2500\ м^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2500} = 50\ м$$

Ответ: размеры площадки 50 м и 50 м.

Задача

6. Дана прямая l и две точки A и B, лежащие
а) по разные стороны ,
б) по одну сторону от прямой l .
Найдите такую точку X на прямой l, что $AX+BX$ принимает наименьшее значение.

Решение.



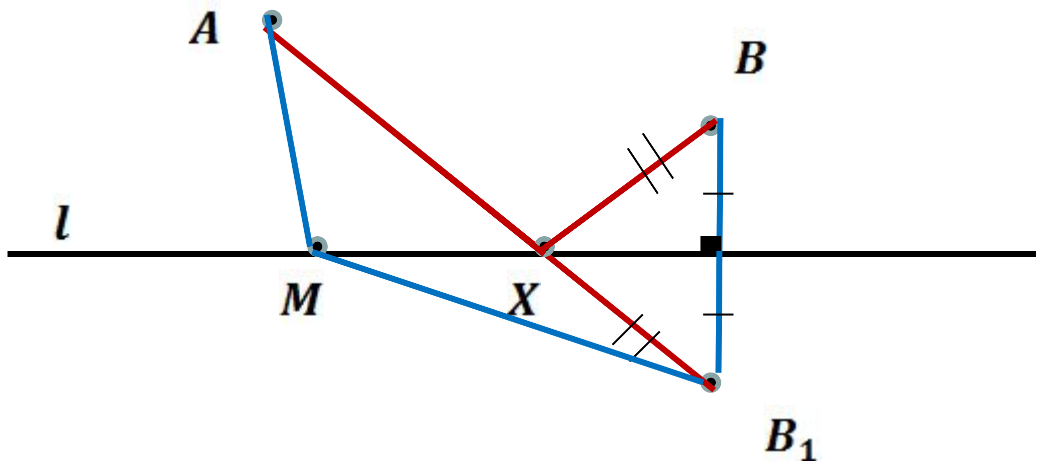
По неравенству треугольника $AM+BM>AB$

$AX+BX=AB$ - наименьшее расстояние между двумя точками

Задача

6. Дана прямая l и две точки A и B, лежащие
а) по разные стороны ,
б) по одну сторону от прямой l .
Найдите такую точку X на прямой l, что $AX + BX$ принимает наименьшее значение.

Решение.



$AX + XB_1 = AB_1$ - наименьшее расстояние

$AM + BM > AX + BX$ по неравенству треугольника

Задача

6. Дана прямая l и две точки A и B, лежащие
а) по разные стороны ,
б) по одну сторону от прямой l .
Найдите такую точку X на прямой l, что $AX + BX$ принимает наименьшее значение.

Решение.

а) 1) Соединим данные точки отрезком AB

2) Построенный отрезок пересекает прямую l

(т.к. по условию точки A и B лежат в разных полуплоскостях , относительно прямой l) в точке, которую и обозначим за X . $AB \cap l = X$

3) Тогда сумма $AX + BX$ будет равна длине отрезка AB
(т.к. эти три точки принадлежат одной прямой) . $AX + BX = AB$
4) Докажем, что длина отрезка AB наименьшее расстояние между двумя точками.
Предположим, что это неверно и на прямой l есть другая точка M такая, что

$$AM + BM < AB$$

Но полученное неравенство противоречит неравенству треугольника

$$AM + BM > AB$$

Ответ: точка X - это точка пересечения l с AB