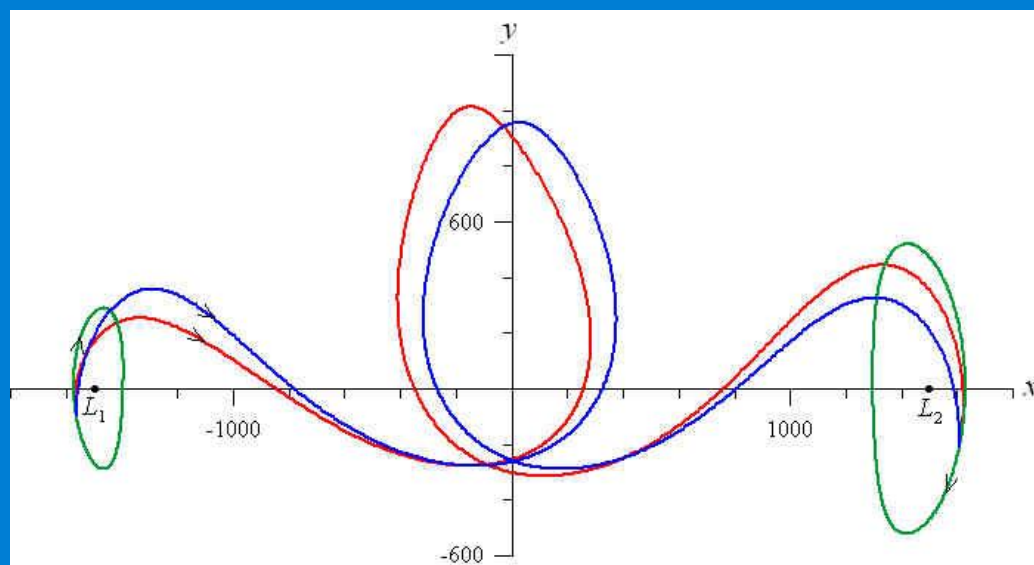


# ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ



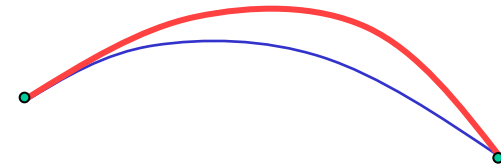
А. Суханов  
ИКИ РАН  
[sukhanov@iki.rssi.ru](mailto:sukhanov@iki.rssi.ru)  
[sasha@dem.inpe.br](mailto:sasha@dem.inpe.br)

# Метод транспортирующей траектории (МТТ)

В.В. Белецкий, В.А. Егоров, Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности, *Космические исследования*, 1964, № 3

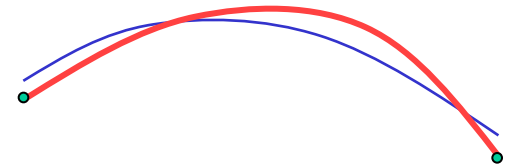
Метод приближенной оптимизации перелетов с идеально регулируемой малой тягой между двумя заданными положениями, основанный на линеаризации траектории перелета около некоторой опорной кеплеровской орбиты (транспортирующей траектории).

- Орбитальная система координат
- Постоянная мощность тяги
- Решение частично в квадратурах
- Приемлемая точность только при небольшой угловой дальности



# Модифицированный МТТ

- Инерциальная система координат
- Полностью аналитическое решение для постоянной мощности
- Решение в квадратурах для произвольного закона изменения мощности
- Ненулевые конечные смещения транспортирующей траектории, повышающие точность аппроксимации
- Возможность частично заданных граничных условий
- Перелеты с большой угловой дальностью (включая многовитковые орбиты)
- Возможность получения любой требуемой точности вычислений
- Возможность облета нескольких небесных тел
- Применение при линейных ограничениях на направление тяги



А.А. Суханов, Оптимизация перелетов с малой тягой, *Космические исследования*, 1999, № 2

А.А. Суханов, Оптимизация межпланетных перелетов с малой тягой, *Космические исследования*, 2000, № 6

А.А. Суханов, А.Ф.Б. де А. Прадо, Модификация метода транспортирующей траектории, *Космические исследования*, 2004, № 1

А.А. Суханов, А.Ф.Б. де А. Прадо, Оптимизация перелетов при ограничениях на направление тяги, *Космические исследования* (в печати)

# МТТ в произвольном поле сил

$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  – уравнение движения,  $\mathbf{g} = \{\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}\}$

$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k$  – граничные условия

$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  – решение уравнения  $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$

$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{y}_k$  – граничные условия на транспортирующей траектории

$\boldsymbol{\alpha}$  – вектор реактивного ускорения КА (тяги)

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\xi}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{g}$$

$$\boldsymbol{\xi}(t_0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \boldsymbol{\xi}(t_k) = \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k = \boldsymbol{\xi}_k$$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) \boldsymbol{\xi}_0 + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}(t_0)} \quad \text{– матрица изохронных производных,} \quad \ddot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\Phi}$$

# МТТ в произвольном поле сил

$$\Delta = \Psi_{\hat{e}} \xi_{\hat{e}} - \xi_0$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \psi \Psi_v \Psi_v^T dt, \quad \mathbf{S}_{\hat{e}} = \mathbf{S}(t_0, t_{\hat{e}})$$

$$\alpha = \psi \Psi_v^T \mathbf{S}_{\hat{e}}^{-1} \Delta$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \Phi(\xi_0 + \mathbf{S} \mathbf{S}_{\hat{e}}^{-1} \Delta)$$

$\Psi = \Psi(t, t_0) = \Phi(t_0, t) = \Phi^{-1}(t, t_0)$  – сопряженная матрица,  $\dot{\Psi} = -\Psi \mathbf{F}$

$$\Psi = [\Psi_r \quad \Psi_v]$$

$$N = N_0 \psi \quad \text{— мощность, } \psi = \psi(r, t), \quad \psi(r_0, t_0) = 1$$

Свойства:

- Матрица  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t, t + \Delta t)$  является невырожденной положительно определенной для любых значений  $t$  и  $\Delta t > 0$
- Оптимальная тяга может обращаться в нуль лишь в изолированных точках, причем в этих точках знак тяги меняется на противоположный (т.е. эти точки являются точками переключения) и число таких точек конечно

# Обеспечение любой заданной точности

Интервал времени полета разбивается на  $n$  подынтервалов и МТТ применяется к каждому подынтервалу в отдельности.

Проблема заключается в нахождении граничных условий  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  для подынтервалов.

$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$  – вектор размерности  $6n - 6$

$$\Xi = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{d}$$

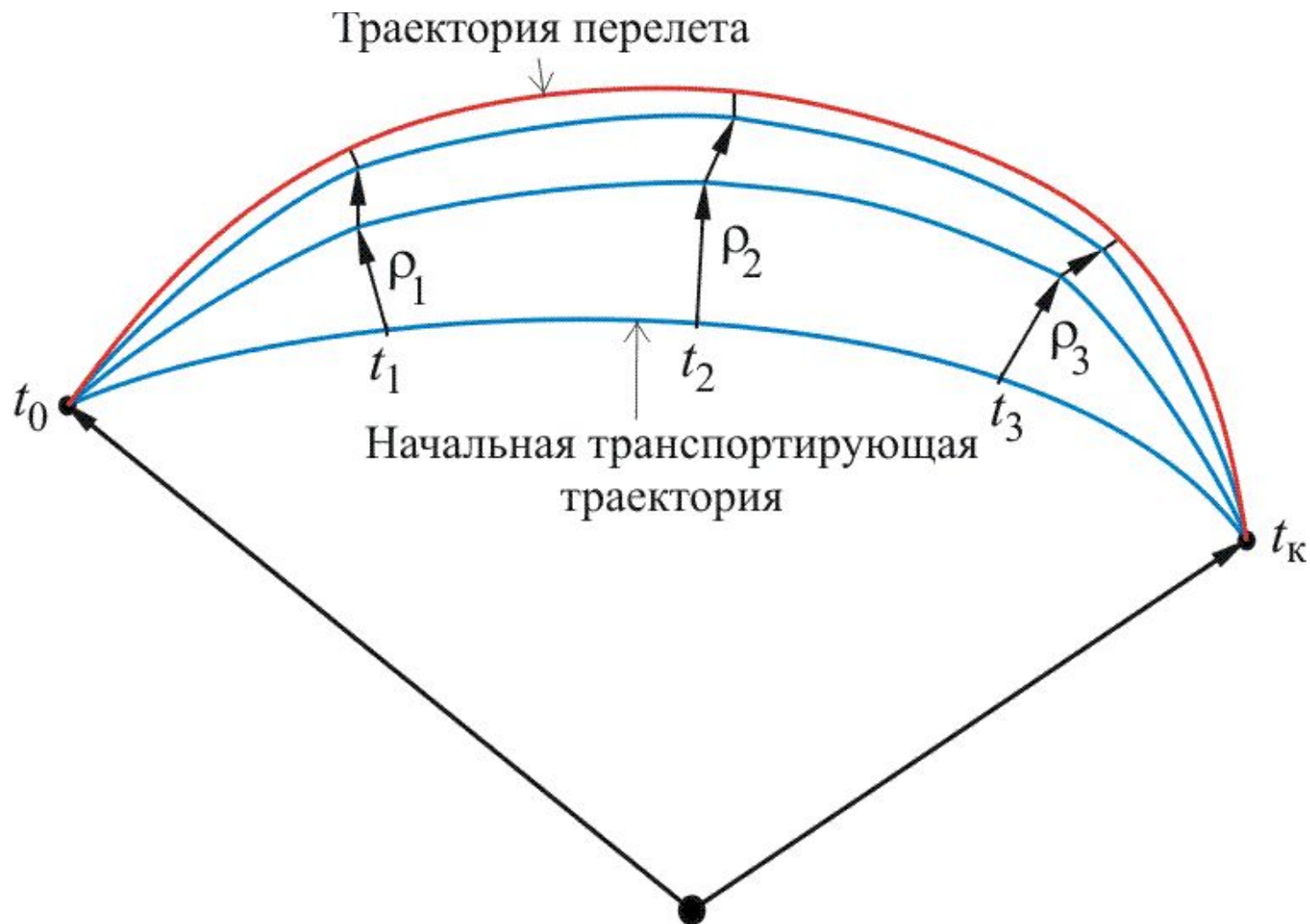
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & -\mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E}_2^T & \mathbf{D}_2 & -\mathbf{E}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E}_3^T & \mathbf{D}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{D}_{n-3} & -\mathbf{E}_{n-2} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\mathbf{E}_{n-2}^T & \mathbf{D}_{n-2} & -\mathbf{E}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & -\mathbf{E}_{n-1}^T & \mathbf{D}_{n-1} \end{bmatrix}$$

– симметричная  
матрица  
порядка  $6n - 6$

$\mathbf{D}_i, \mathbf{E}_i$  – матрицы 6-го порядка, вычисляемые на  $i$ -м подынтервале

# Достижение любой заданной точности

$$\Xi = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}, \quad \Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}, \quad \xi_i = \{\rho_i, \eta_i\}$$



# Ограничения на направление тяги

**$\mathbf{B}\alpha = 0$**   $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  – матрица ранга 1 или 2

$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}$  – проективная матрица

$$\mathbf{S}_K = \int_{t_0}^{t_k} \psi \Psi_v \mathbf{P} \Psi_v^T dt$$

$$\alpha = \psi \mathbf{P} \Psi_v^T \mathbf{S}_{\hat{e}}^{-1} \Delta$$



# Способы вычисления необходимых компонентов

## Задача двух тел

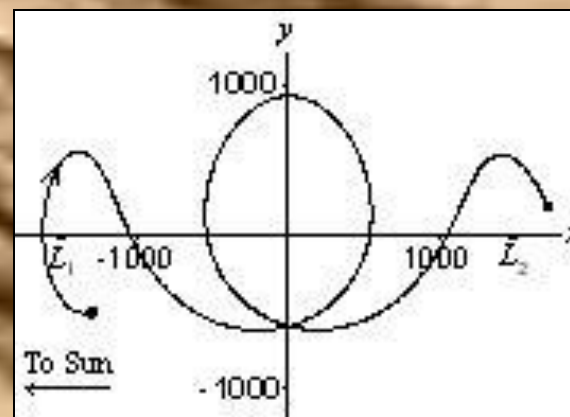
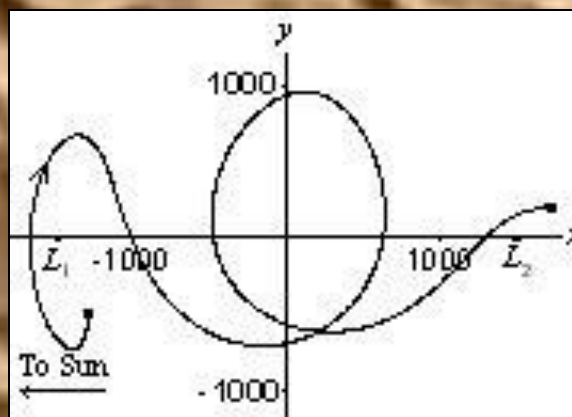
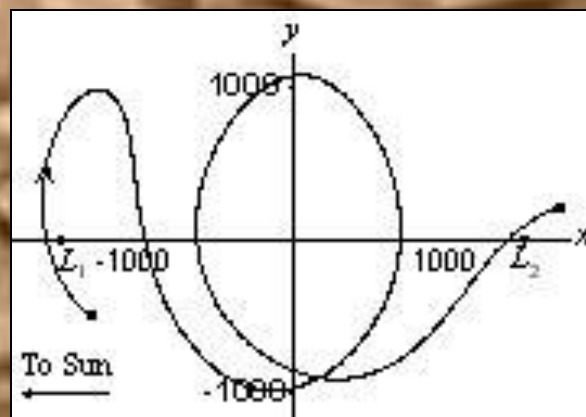
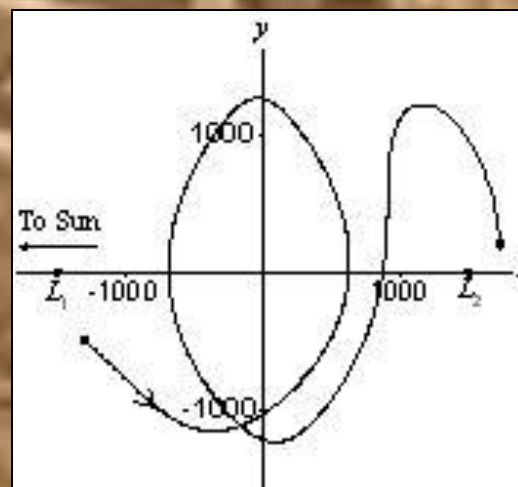
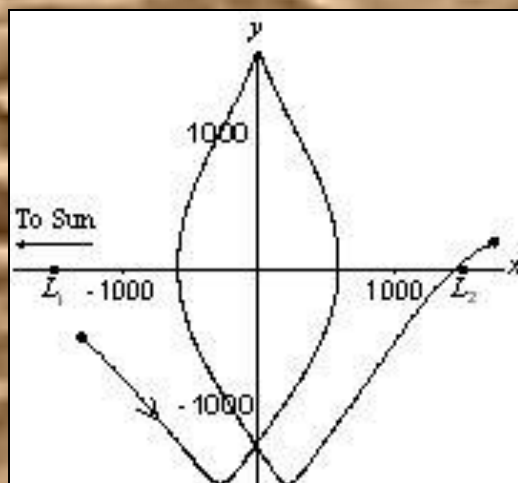
- Матрицы  $\Phi$ ,  $\Psi$  вычисляются аналитически
- Матрица  $S$  вычисляется аналитически или в квадратурах
- Транспортирующая траектория: кеплеровская орбита, найденная путем решения задачи Ламберта

## Произвольное поле сил

- Матрицы  $\Phi$ ,  $\Psi$  вычисляются численным интегрированием уравнений в вариациях совместно с уравнениями движения
- Матрица  $S$  вычисляется в квадратурах
- Транспортирующая траектория является решением краевой задачи

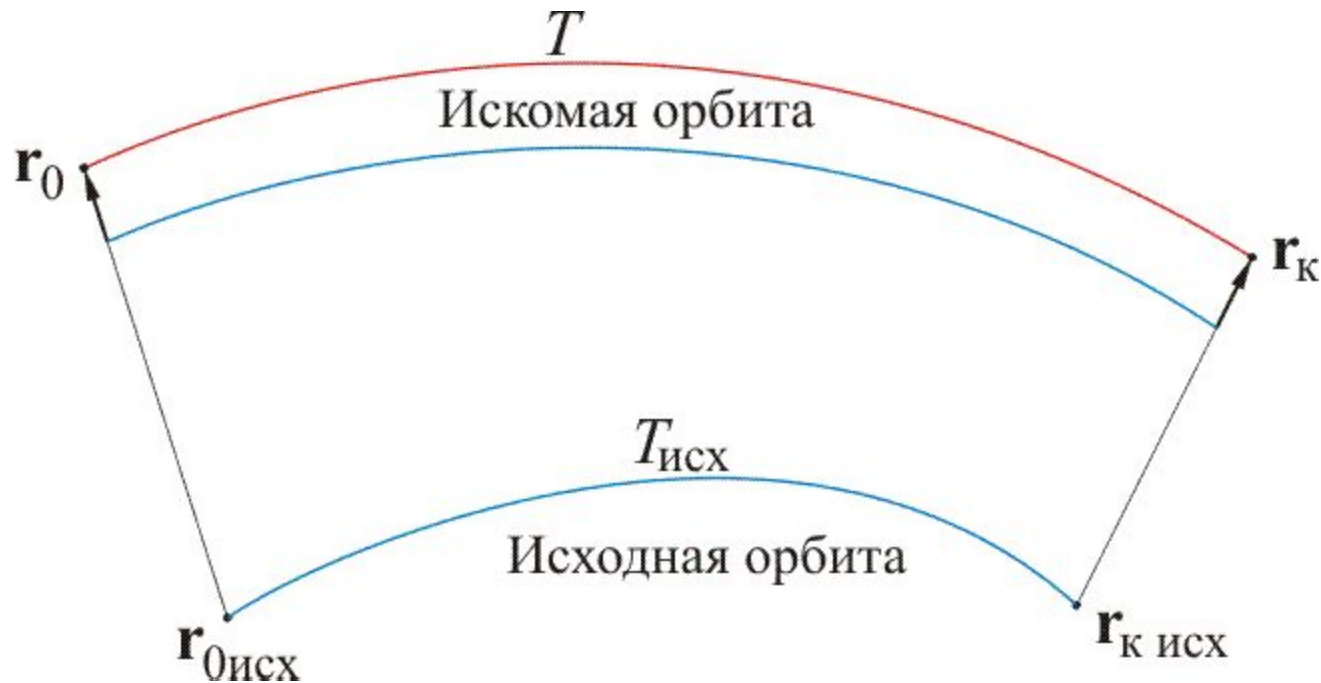
Основным препятствием на пути применения МТТ в произвольном поле сил является проблема нахождения транспортирующей траектории заданного типа

# Пример множественности решений



# Решение краевой задачи в произвольном поле сил

- Задаются характерные образцы орбит разных типов (исходные орбиты)
- Применяется некая пошаговая математическая процедура перехода от исходной орбиты к орбите между двумя заданными положениями с заданным временем перелета



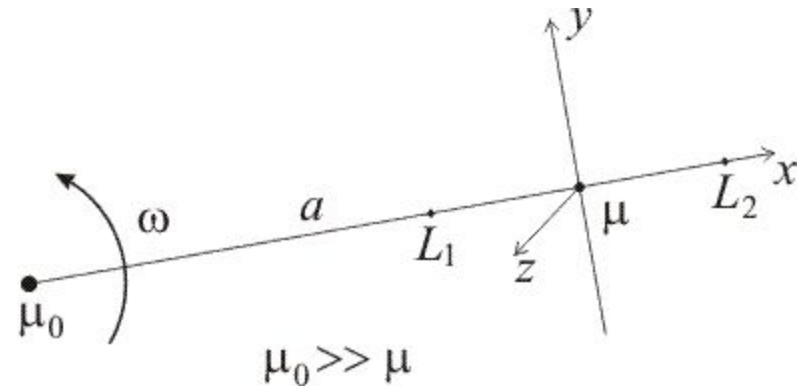
# Модель движения Хилла

Уравнения движения:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{r} + 2\omega \mathbf{M} \mathbf{v} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{\mu_0}}{a^{3/2}}$$



Коллинеарные точки либрации  $L_1$  и  $L_2$ :

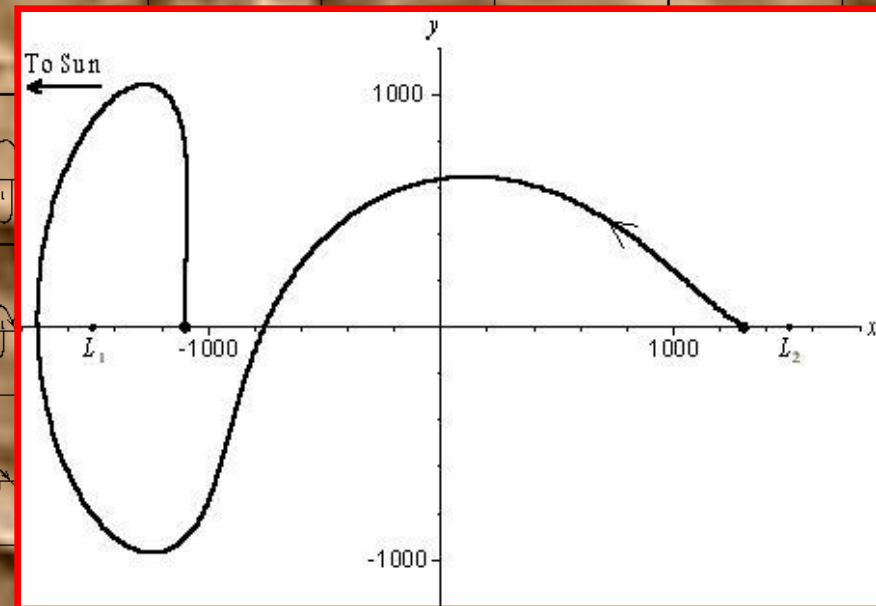
$$\mathbf{r}_L = \{x_L, 0, 0\}, \quad x_L = \pm a \left( \frac{\mu}{3\mu_0} \right)^{\frac{1}{3}} = \pm 1496.56 \times 10^3 \text{ км для с.-з. системы}$$

Матрица изохронных производных  $\Phi$ :

$$\dot{\Phi} = \mathbf{F} \Phi, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \omega^2 \mathbf{N} + \mathbf{G} & 2\omega \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \frac{\mu}{r^3} \left( 3 \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}^T}{r^2} - \mathbf{I} \right)$$

# Исходные орбиты в модели движения Хилла

Тип перелета	Число вилок	Тип орбиты								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
EE	0			—	—	—	—	—	—	—
EL	0					—	—	—	—	—
LE	0					—	—	—	—	—
LL	0						—	—	—	—
	1						—	—	—	—
	2						—	—	—	—



# Демонстрация метода

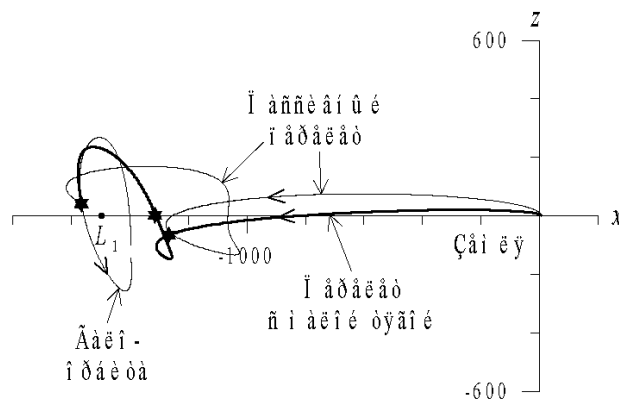
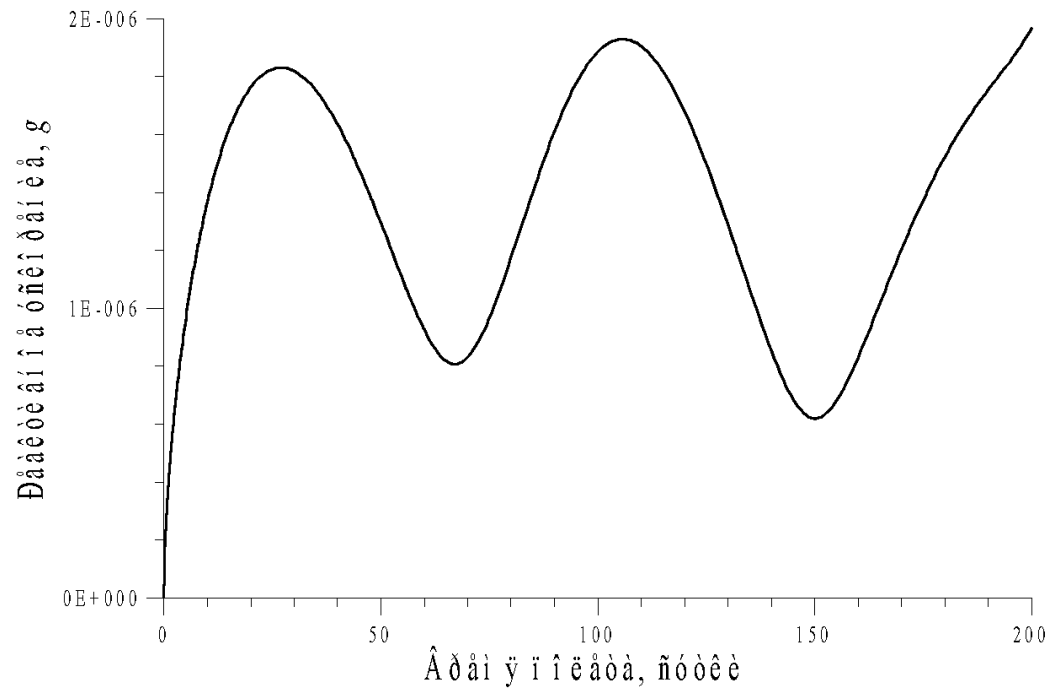
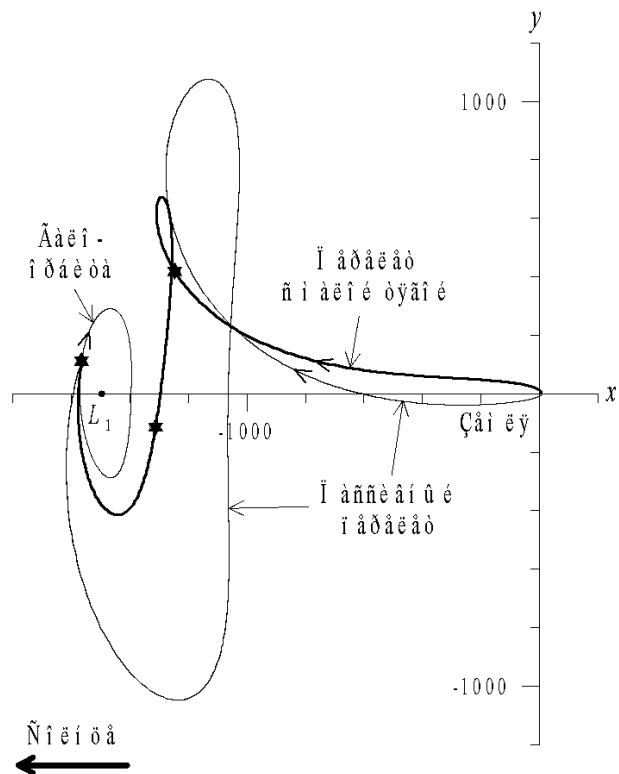


1024 \* 768



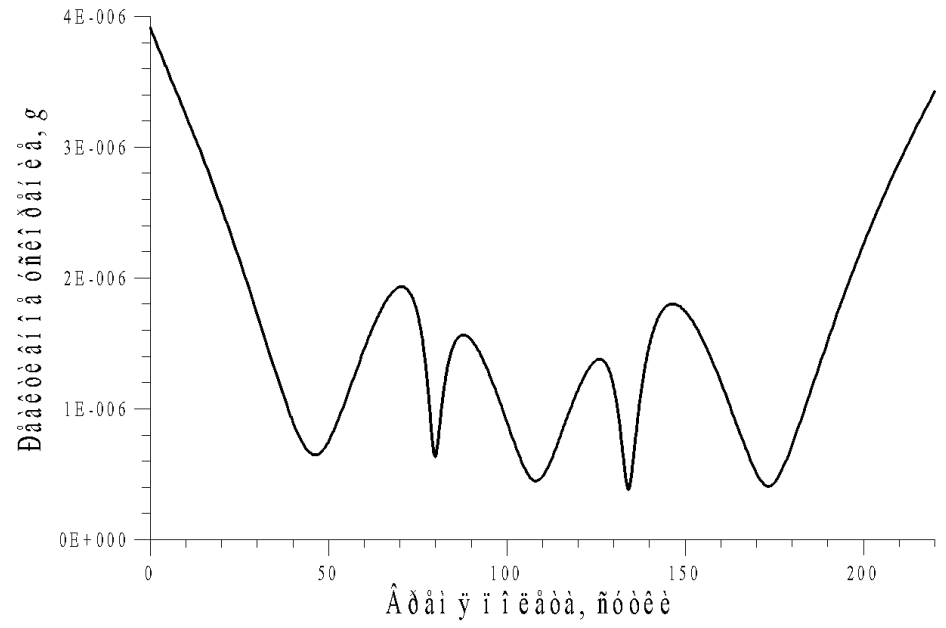
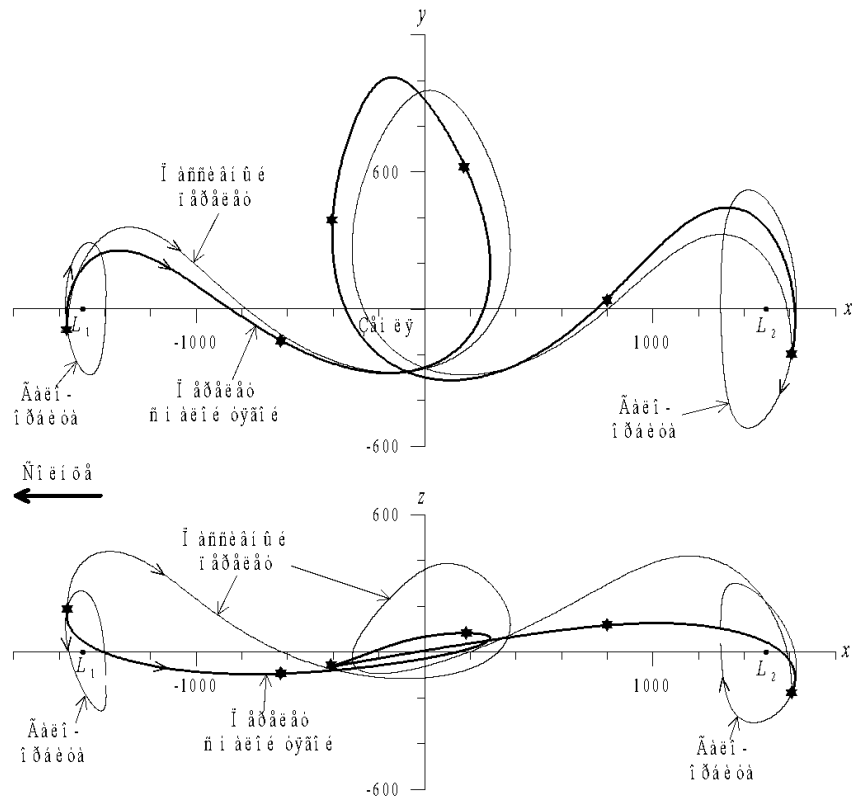
1280 \* 1024

# Перелет Земля – гало-орбита



- Относительная ошибка минимизируемого функционала  $< 0,002$  достигается при  $n = 22$
- Плохая сходимость при  $7 \leq n \leq 20$

# Перелет между гало-орбитами



- Относительная ошибка минимизируемого функционала  $< 0,002$  достигается при  $n = 35$
- Плохая сходимость при  $n \geq 15$



# Характеристики перелетов

$J$  – минимизируемый  
функционал

$N_0$  – начальная мощность

$$\tilde{N}_0 = N_0 / m_0$$

$$m_{\delta\delta} = \frac{J}{\tilde{N}_0 + J} m_0$$

$\tilde{N}_0$

Ограничение на  
направление тяги:  
тяга ортогональна  
направлению на Солнце

$\tilde{N}_0$