*Муниципальное общеобразовательное учреждение – средняя общеобразовательная школа №65 г. Тулы*

# Курс «Алгебра и начала анализа»

**Тема урока:**

## «Первообразная. Интеграл.»

*Учитель математики Мещерякова Е.А.*

# Аннотация

Данная презентация предназначена для проведения урока алгебры и начала анализа в 11 классе по теме: «Первообразная. Интеграл.»

**Цель урока**:

- закрепление свойств первообразной, умение пользоваться таблицей первообразных, правилами нахождения первообразных, отработка вычислительных навыков интегралов, проверка умения в построении графиков, применение интегралов к вычислению площадей;
- Подготовка к итоговой аттестации в форме и по материалам ЕГЭ.

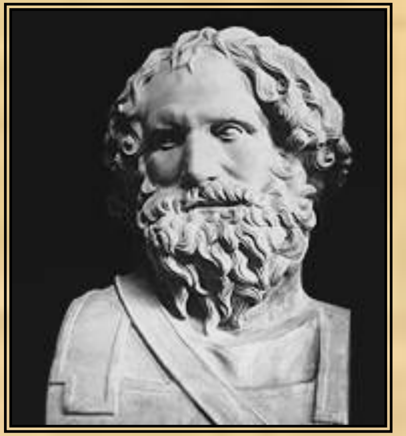
# Историческая справка

Вы познакомитесь в этой теме с самыми началами интегрального исчисления, служащего продолжением уже известного вам дифференциального исчисления.

Первые работы по открытию интегрального исчисления принадлежат еще ***Архимеду*** – первому математику древности.

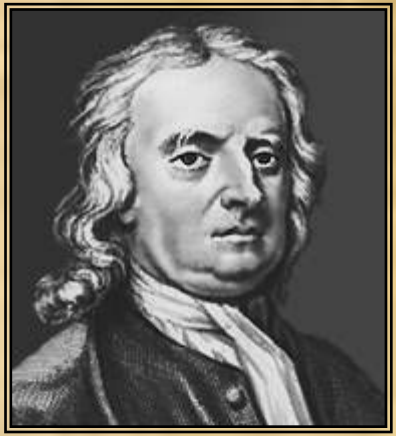
В средние века этой проблемой занимался итальянский ученый ***Кавальери.***

Но подлинное открытие интегрального исчисления принадлежит двум великим
ученым XVII века – ***Ньютону*** и ***Лейбницу***.



*Архимед*

*Бонавентура Кавальери*



*Исаак Ньютон*

*Готфрид Вильгельм Лейбниц*

Повторение пройденного материала

# Неопределенный интеграл

**Дифференцирование** - это операция нахождения производной,

если функция ***f***(***x***) имеет производную в точке ***x0***.

Сама функция называется дифференцируемой в этой точке.

Операция, обратная дифференцированию, называется **интегрированием.**

Если мы ищем скорость пути, мы дифференцируем функцию ***s(t)*** и получаем ***s'(t)=v(t)***. Если же функция ***v(t)*** нам известная, а требуется найти функцию ***s(t)***, то мы будем интегрировать функцию ***v(t)***.

Чтобы хорошо разобраться в материале этой темы, нужно вспомнить, что такое дифференцирование, геометрический смысл производной,

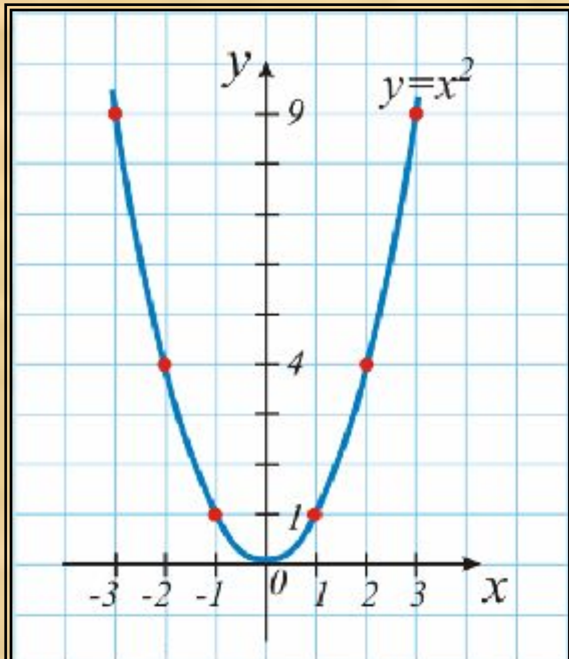
Механический смысл производной и формулы дифференцирования.

# Первообразная

**$f = F'$**

$f$ – производная функции $F$

$F$ – первообразная функции $f$



Производная и первообразная.

Функция ***F(x)*** называется первообразной функции ***f(x)***, если

функция ***f(x)*** является производной функции ***F(x)***.

У одной и той же функции ***f(x)*** много первообразных.

Например,

Если $\boldsymbol{x^2}$ – первообразная функции **2*x***, то и ***x2+5*** – тоже первообразная функции **2*x***.

Это легко проверить дифференцированием: $\boldsymbol{(x^2+5)'=2x}$.

Да и любая функция вида $\boldsymbol{x^2+C}$, где ***C*** – любое число, является

первообразной функции **2*x***. Ведь $\boldsymbol{(x^2+C)'=(x^2)'=2x}$

**Теорема о множестве первообразных данной функции.**

**Теорема.** Если ***F(x)*** – первообразная функции ***f(x)***, то и любая

функция ***F(x)+C***, где ***C*** – число, является первообразной той же функции.

**Доказательство.** ***(F(x)+C)'=(F(x))'=F(x).*** Верно и обратное: если ***F(x)*** и ***G(x)*** – две первообразные одной и той же функции

***f(x)***, то ***G(x)=F(x)+C***. И в самом деле, так как ***G(x)-F(x)=C*** или ***G(x)=F(x)+C***, что и требовалось доказать.

# Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом функции ***f(x)*** называется множество первообразных этой функции.

Неопределенный интеграл функции ***f(x)*** обозначается символом $\int f(x)dx$. Знак дифференциала ***dx*** указывает, какая переменная, входящая в выражение ***f(x)***, является аргументом.

Например, $\int a^b db$ – интеграл показательной функции, $\int a^b da$ – интеграл степенной функции.

Первый равен $\dfrac{a^b}{\ln a} + C,$ а второй равен $\dfrac{a^{b+1}}{b+1} + C.$

Чтобы найти интеграл от данной функции, нужно найти любую ее первообразную и прибавить к ней произвольное число С.

Так,

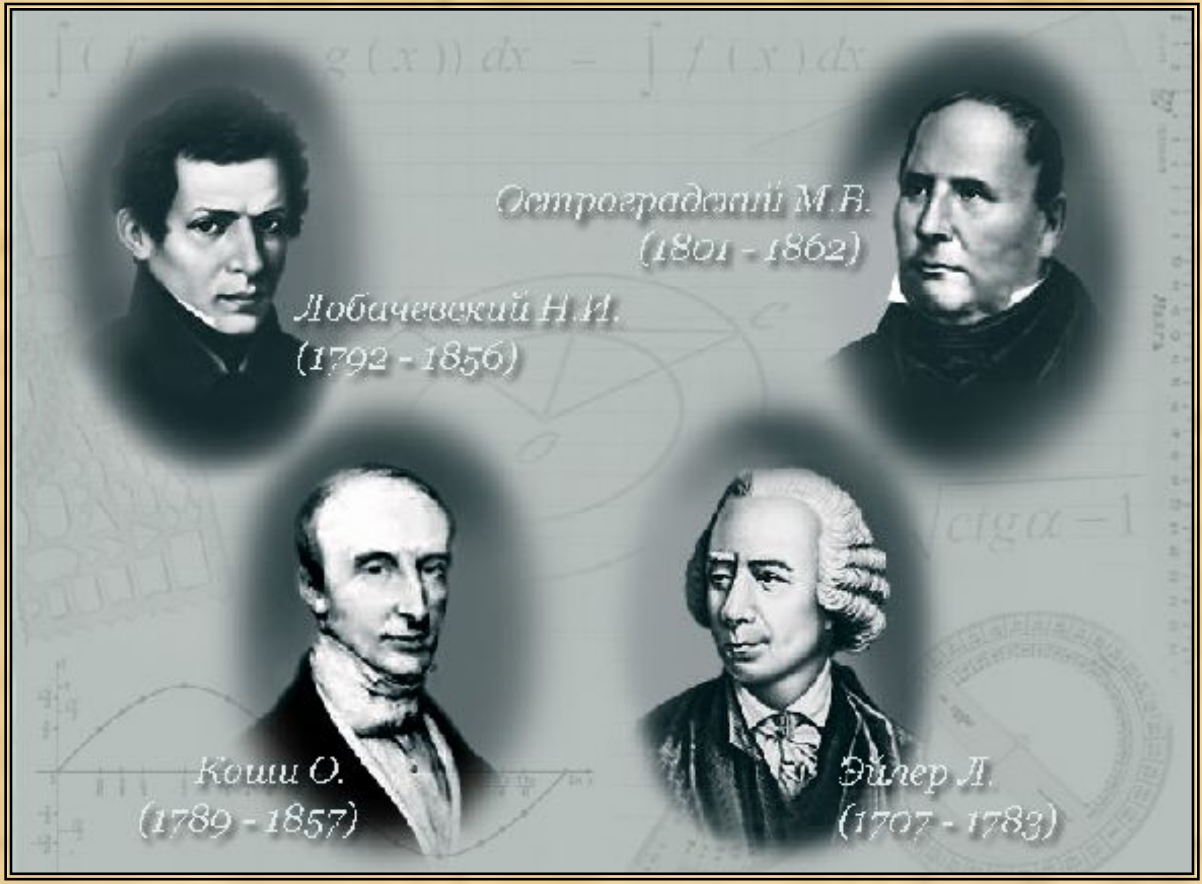
$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \frac{1}{2} dx = \ln|x| + C$$

# Три правила интегрирования

Техника интегрирования – сложный раздел математики. В нем сделали свои открытия такие корифеи, как ***Эйлер, Лобачевский, Коши, Остроградский***.

Вам предстоит ознакомиться с тремя самыми простыми правилами интегрирования.



# Три правила интегрирования

**Первое правило интегрирования:**

Интеграл суммы двух функций равен сумме интегралов этих функций: $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

**Доказательство:** Пусть ***F(x)*** и G(x) – первообразные функций ***f(x)*** и ***g(x)***. Тогда $P(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$.

Но известно, что $(F(x)+G(x))'=P(x)+G'(x)$, то есть $(F(x)+G(x))'=f(x)+g(x)$. Тем самым доказано, что функция ***F(x)+G(x)***-первообразная функции ***f(x)+g(x)***. Отсюда получаем $\int (f(x)+g(x))dx=F(x)+G(x)+C^1$, $\int (f(x)dx+\int g(x))dx=F(x)+C_2+G(x)+C_3$. И так как $C_1$, $C_2$ и $C_3$ – произвольные числа, то окончательно имеем: $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$, что и требовалось доказать.

**Второе правило интегрирования:**

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла: $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$.

**Доказательство:** Пусть ***F(x)*** – первообразная функции ***f(x)***. Тогда $P(x)=f(x)$, а значит, $cP(x)=cf(x)$, откуда и следует доказываемое равенство.

**Третье правило интегрирования:**

Если ***F(x)*** первообразная функции ***f(x), k≠0***, то $$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

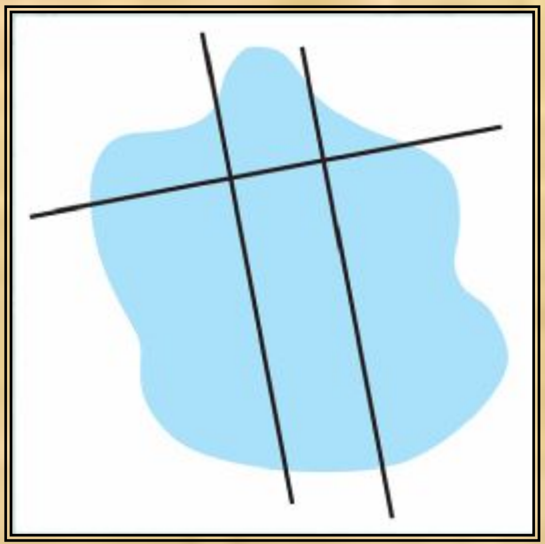
**Доказательство:**

Пусть ***F(x)*** первообразная функции ***f(x)***. Тогда $P(x)=f(x)$, а $P(kx+b)=f(kx+b)k$, откуда и получается доказываемое равенство.

# Определенный интеграл

Пусть $\int v(t)dt = s(t) + C$. Зная это, можно найти путь, пройденный от момента времени ***a*** до момента времени *b*. Путь равен разности значений функций ***s*** при ***t=b*** и при ***t=a***, то есть ***(s(b)+C) - (s(a)+C)***. При этом безразлично, какую из первообразных мы возьмем: ведь (***s(b) + C) – (s(a) + C)=s(b) - s(a)***. Моделью интеграла может служить не только формула пути, но и формула площади любой плоской фигуры.

## *Разбиение плоской фигуры на криволинейные трапеции*

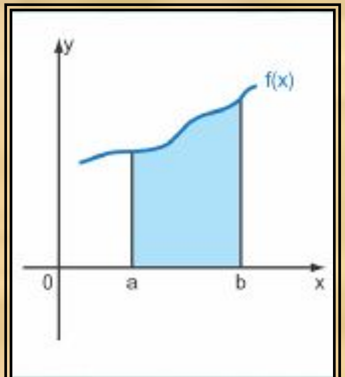


*Разбиение плоской фигуры на криволинейные трапеции*

Итак, перед нами стоит задача научиться находить площадь плоской фигуры. Фигура определяется ограничивающей ее линией. Если эта линия состоит из прямолинейных отрезков, то ее площадь – площадь многоугольника, которую можно найти деля

фигуру на прямоугольники и треугольники. Плохо, если фигура со всех сторон ограничена кривыми. Но в этом случае ее можно разбить на более мелкие фигуры, ограниченные с трех сторон прямыми, пересекающимися под прямыми углами. И только с одной стороны такие фигуры будут иметь неустранимо криволинейную границу.

# Разбиение плоской фигуры на криволинейные трапеции



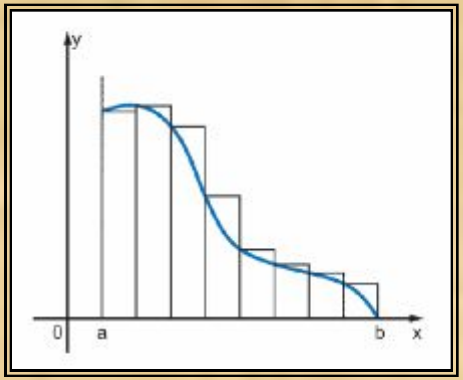
Криволинейная трапеция.

Расположим такую фигуру над осью абсцисс, как это сделано на рисунке.

Получилась так называемая криволинейная трапеция.

Определение. Криволинейной трапецией называется фигура, расположенная в прямоугольной системе координат и ограниченная осью абсцисс, прямых ***x=a*** и ***x=b*** и кривой ***y=f(x)***, причем ***f(x)*** неотрицательна на отрезке [a;b]. Если мы научимся находить площадь любой криволинейной трапеции, то можно считать решенной задачу об отыскании площади любой плоской фигуры.

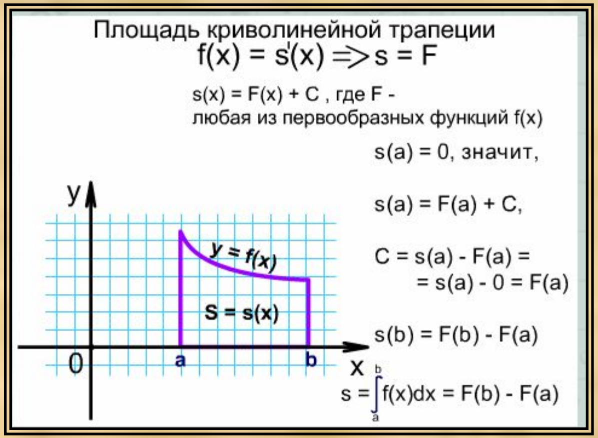
# Площадь криволинейной трапеции




Приближенно площадь криволинейной трапеции можно найти так: разделить отрезок [a;b] оси абсцисс на n равных отрезков, провести через точки деления отрезки, перпендикулярные к оси абсцисс до пересечения с кривой f(x) заменить получившиеся столбики прямоугольниками с основанием $\frac{b-a}{n}$ и высотой, равной значению функцию f в левом конце каждого отрезка, найти сумму площадей этих прямоугольников.

При достаточно большом n можно сделать эту сумму сколь угодно близкой к истинной площади, то есть сделать сколь угодно малой погрешность такого вычисления

# Площадь криволинейной трапеции




Можно найти площадь криволинейной трапеции и совершенно точно, пользуясь результатом, полученным в конце XVII века независимо друг от друга двумя великими учеными ***Ньютоном***

и ***Лейбницем.***

Для доказательства формулы, носящей их имена, докажем, что

площадь криволинейной трапеции равна ***F(b)-F(a),*** где

***F***- любая из первообразных функции ***f***, график которой ограничивает криволинейную трапецию

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Теперь вычисление площади криволинейной трапеции будем записывать так:

1) Найдем любую из первообразных F функции f.

2) Запишем

$$S = \int f(x)dx = F(x)\Big|\frac{b}{a} = F(b) - F(a)$$

Формула $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|\frac{b}{a} = F(b) - F(a)$ и называется формулой Ньютона –Лейбница.

# Закрепление пройденного материала

Класс делится на 3 «семьи», выбирается глава «семьи».

На столе каждой команды лежит «Лист учета знаний», который заполняется по ходу урока.

По итогам каждого гейма подсчитываются очки. В строке напротив фамилии суммируются баллы и можно выставить оценку каждому ребенку на уроке.

***Лист учета знаний***

| № п\п | Ф.И. | г 1 | е 2 | й 3 | м 4 | ы 5 | Сумма плюсов | Оценка на уроке |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

**Первый гейм «Разминка».**

Отгадывание кроссворда. Здесь учащиеся должны показать свои теоретические знания на минимальном уровне. Кроссворд проецируется на экран через проектор. Вопросы задаются устно всем «семьям» по очереди. Если не смогла какая – то «семья» ответить, право на ответ передаётся другой «семье».

В листе учёта знаний ставится знак «+» напротив фамилии учащегося, который дал правильный ответ.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | Ф | | | | | | | | | |
| | | | | П | | | У | | | | | К | | | | |
| | | | Л | Е | Й | Б | Н | И | Ц | | К | О | Р | Е | Н | Ь |
| | | | | Р | | | К | | | | | Н | | | | |
| | | | | В | | | Ц | | | | | Т | | П | | |
| | | | | О | | | И | Н | Т | Е | Г | Р | А | Л | | |
| | | | | О | | | Я | | | Д | | О | | О | | |
| | | | | Б | | | | | | И | | Л | | Щ | | |
| | | | Г | Р | А | Ф | И | К | | Н | | Ь | | А | | |
| П | Р | Я | М | А | Я | | | | | И | | Н | | Д | | |
| | | | | З | А | Ч | Е | Т | | Ц | | А | | Ь | | |
| | | | | Н | | | | | | А | | Я | | | | |
| Д | В | Е | Н | А | Д | Ц | А | Т | Ь | | | | | | | |
| | | | | Я | | | | | | | | | | | | |

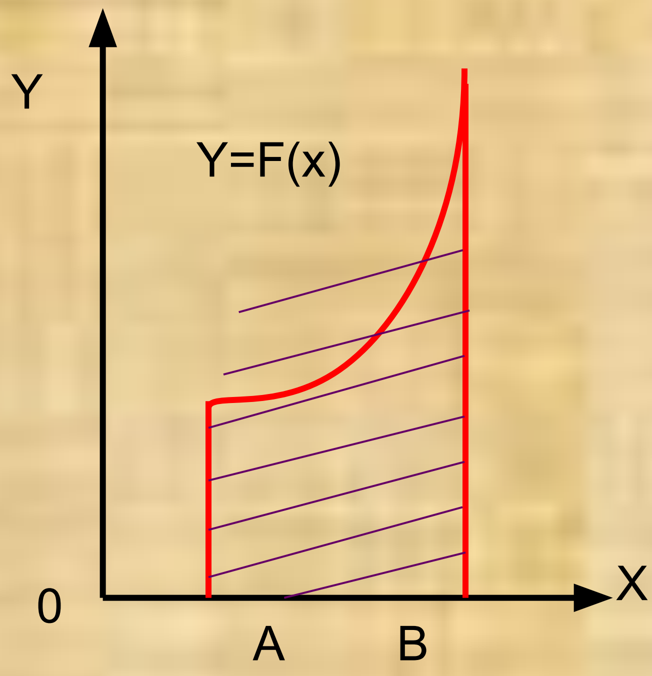
***1.Как называется функция F(x)?***
***2. Что является графиком функции y = ax + b?***
***3. Самая низкая школьная оценка.***
***4. Какой урок проходит обычно перед зачетом?***
***5. Синоним слова «дюжина».***
***6. Есть в каждом слове у растения и может быть у уравнения.***
***7. Что можно вычислить при помощи интеграла?***
***8. Одно из важнейших понятий в математике?***
***9. Форма урока, на котором проводится проверка знаний?***

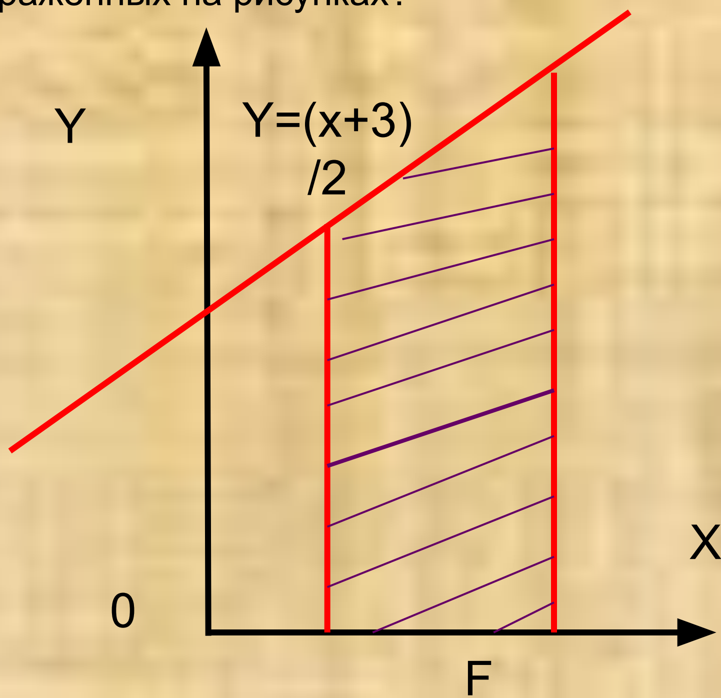
***10. Немецкий ученый, в честь которого названа формула, связывающая площадь криволинейной трапеции и интеграл.***
***11. Конь – лошадь – жеребенок, бык – корова – телёнок, король – королева – принц, граф – графиня - …. .***
***12. Соответствие между множествами X и Y, при котором каждому значению из множества X  поставлено в соответствии единственное значение из множества Y ,***
***носит название ……..?***

## Второй гейм «Дальше, дальше…»

Этот гейм индивидуальный, т.е. каждый учащийся пишет ответы в своей тетради
(ответы должны дать за 15 минут).

1) Что называются интегралом ?
2) Что называется первообразной ?
3) Как читается основное свойство первообразной ?
4) Верно ли, что интеграл от любой степенной функции будет снова степенной функцией?
5) ***F'(x)=f(x)*** - как это можно прочесть?
6) Как можно вычислить площадь криволинейной трапеции при помощи интеграла?
7) Запишите с помощи интегралов площадь фигур, изображенных на рисунках?



8. Найти первообразные для функций:

а) $10x$ б). $x^2$ в). $\sin x^2$ г). $\cos x$ д) $x^4$ е) $3x^2$

9. Истинны ли равенства:

а) $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$, б) $\int_0^5 x^2 dx = 2\frac{1}{3}$, в) $\int_2^4 x^2 dx = 2x$, г) $\int_0^3 5dx = \frac{5x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{5}{2}(3^2 - 0^2) = \frac{45}{2}$,

д) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$, е) $\int_1^4 (3-2x)dx = (\frac{3x^2}{2} - 2x)$

Ответы зачитываются сразу же. Правильный ответ учащиеся обводят в кружок и подсчитывают

Количество баллов и заносят в «Лист учета знаний»

## Третий гейм «Спешите видеть»

Каждая команда за 5 минут должна изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:

а) графиком функции ***y=(x+1)²***, осью ***OX*** и прямой ***y=1-x***

б) графиком функции ***y=4x-x²***, с осью ***OX*** и прямой ***y=4-x***

в) графиком функции ***y=4-x²***, с осью ***OX*** и прямой ***y=4-x***

За верное построение команды получают баллы

19)

## Четвертый гейм «Составь фразу»

Вычислите интеграл:

1) $\int_2^3 (1-x)^4 dx = 6\frac{1}{5}$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x)dx = 6$

3) $\int_1^2 (2x-5)dx = -2$

4) $\int_0^1 (x+1)^5 dx = 10{,}5$

5) $\int_0^3 x^2 dx = 9$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = 6$

7) $\int_0^1 (x^2-2x+1)dx = 1{,}5$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^2 x} dx = 4$

9) $\int_0^1 (x^2-4x-1)dx = -2\frac{2}{3}$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (108\sin 6x)dx = 18$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\cos 2x)dx = 2$

12) $\int_0^{\pi} (3\sin\frac{1}{2}x)dx = 6$

13) $\int_1^2 (4x^3-2x)dx = 18$

14) $\int_{-1}^1 (6x^3-5x)dx = 0$

15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx = 2$

16) $\int_{-2}^2 (4-x^2)dx = 10\frac{2}{3}$

17) $\int_1^4 x^3 dx = 63{,}75$

18) $\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} (3x^3-2x)dx = 0$

20) $\int_{-3\pi}^0 \cos 3x dx = 0$

21) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3} dx = 4$

$\int_1^4 (x^2-9)dx = 48$

22) $\int_{-1}^2 3x^2 dx = 9$

23) $\int_{-1}^0 (1-2x)^4 dx = 24{,}5$

$\int_1^3 2dx = 4$

24) $\int_0^2 (x^3-x)dx = 2$

25) $\int_2^3 x^2 dx = 6\frac{1}{3}$

26) $\int_1^3 (3-2x)dx = -2$

27)

# Ответы:

$(2\frac{2}{3}) - A;$ (-2) – З; 0 – Т; 1,5 – Д; 2 – Р; 4 – О; $6\frac{1}{3} - A$ 6 – И; 6,2 – Ж; 9 – Ь;

10,5 – Н; $10\frac{2}{3} - Я$ 18 – Е; 24,2 – К; 48 – Л; 63,75 - Ю

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *ж* | *и* | *з* | *н* | *ь* | *и* | *д* | *о* | *в* | *е* | *р* | *и* | *е* | *т* | *е* | *р* | *я* | *ю* |

| ***19*** | ***20*** | ***21*** | ***22*** | ***23*** | ***24*** | ***25*** | ***26*** | ***27*** | ***28*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *т* | *т* | *о* | *л* | *ь* | *к* | *о* | *р* | *а* | *з* |

## Пятый гейм «Гонка за лидером»

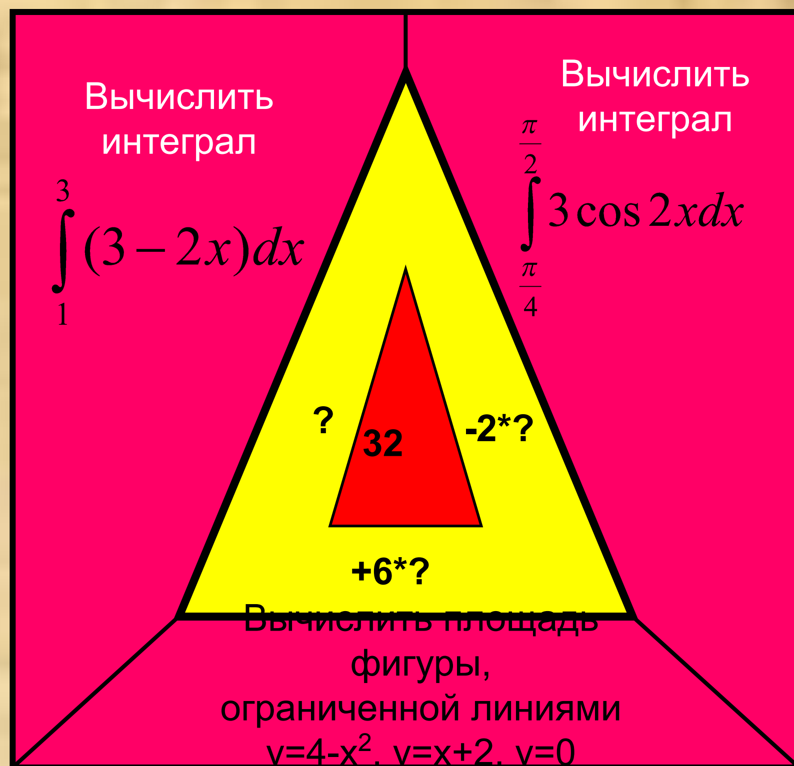
Каждая»Семья» получает карточку. В каждой карточке по два задания: одно – в форме теста,
другое – своеобразный кроссворд.
За верно решенные задания в карточке «семья» получает 2 балла.

**Карточка 1.**

*Задание 1.* Для функции ***f(x)=e****$^x$* найти первообразную, график которой проходит через точку М (0;2).

а) ***F(x) = e+3***;   б) ***F(x) = e****$^x$*;   в) ***F(x) = e****$^x$****+1***;   г) ***F(x)=e****$^x$****-1***   ***Ответ: В***

*Задание 2.*



## Карточка 2.

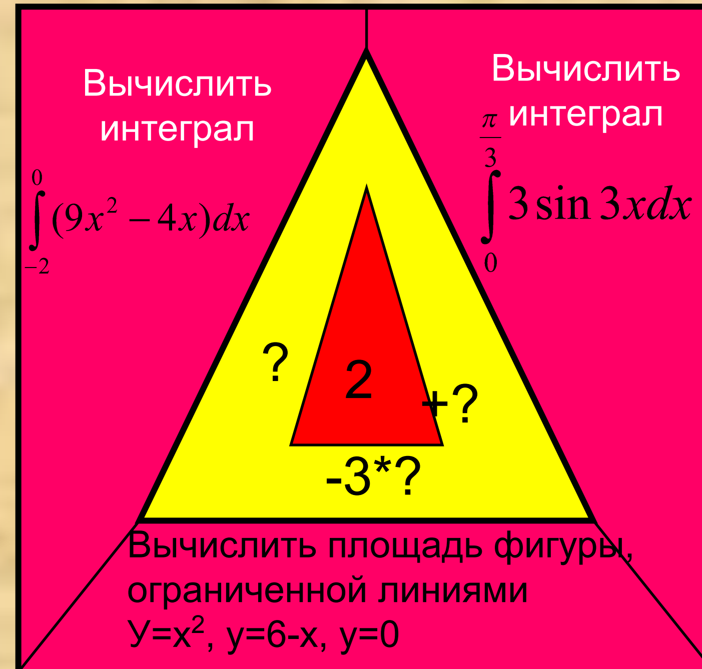
*Задание 1*. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ найти первообразную, график которой проходит через точку М (4;5)

а) F(x) = √x+3; б) F(x)=2√x;

в) F(x)=2√x+3; г) F(x) = √x+5.

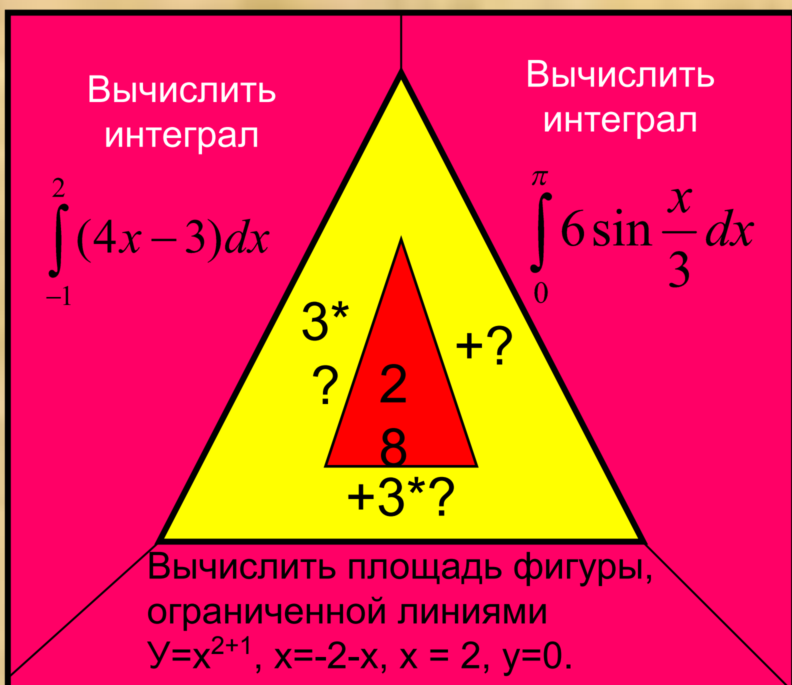
Ответ: Б

*Задание 2.*




## Карточка 3.

*Задание 2.*




*Задание 1.* Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ найти первообразную, график которой проходит через точку М (1;3)

а) $F(x)=4+\dfrac{1}{x}$ б) $F(x)=\dfrac{1}{x^3}-5$

в) $F(x)=-\dfrac{1}{x}+4$ г) $F(x)=x^3-4$

Ответ: В

# Подведение итогов

На табло подсчитываются баллы, полученные каждой «семьей»

и распределяются места.

В «Листе учета знаний» суммируются все плюсы числа «семьи» и

выводятся оценка за урок (из общей суммы исключаются плюсы

за

гейм «Дальше, дальше…»).

Учащиеся отвечают на вопрос «Чему вы научились при изучении

данной темы?»