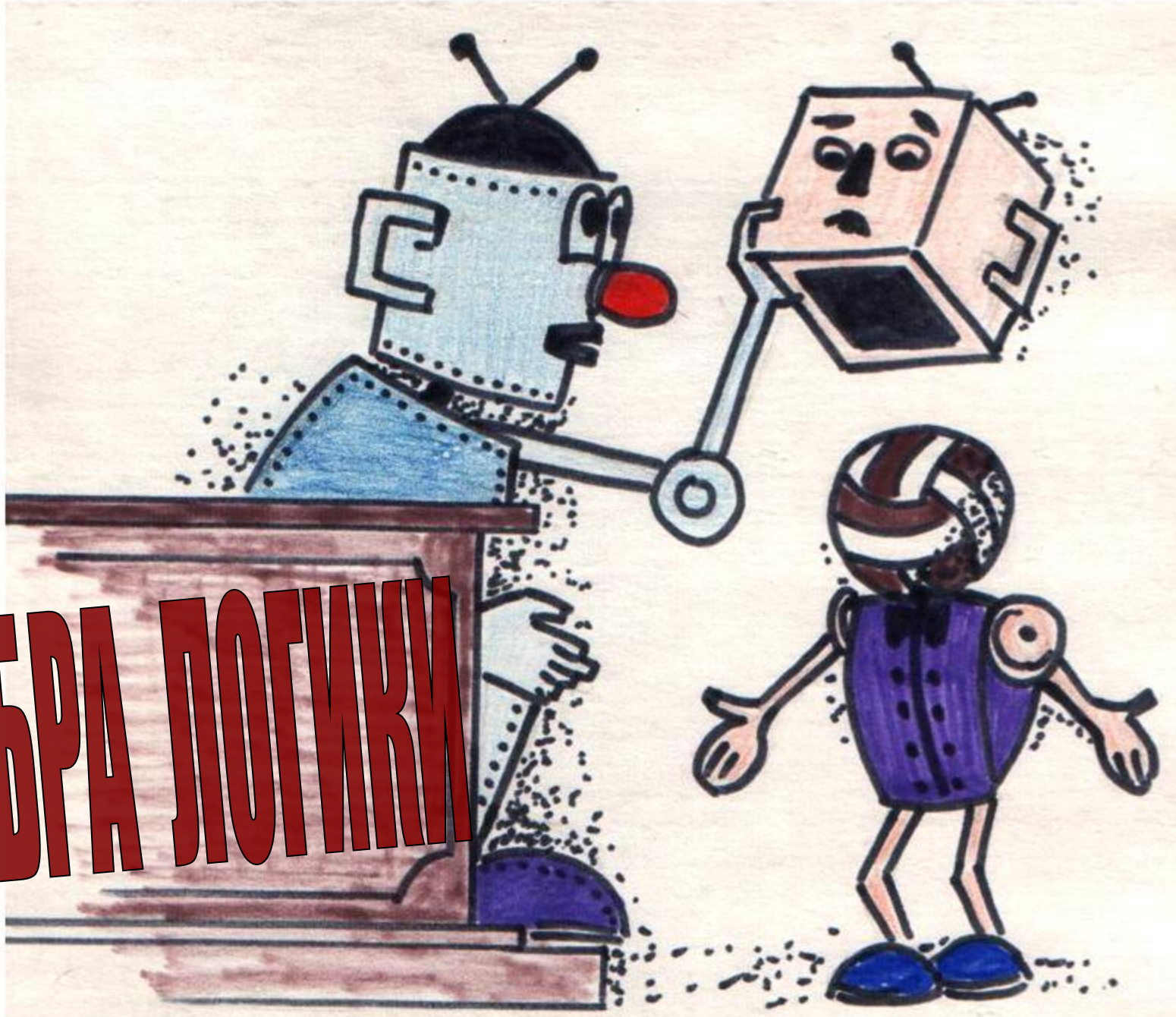
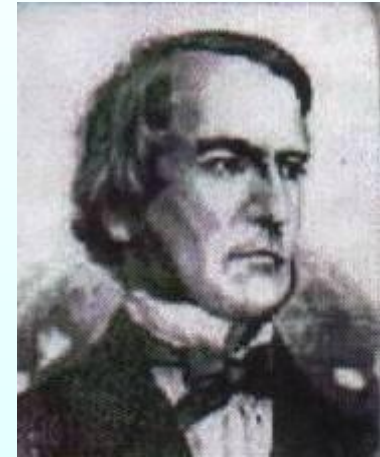


АЛГЕБРА ЛОГИКИ



Алгебра логики (булева алгебра, алгебра высказываний) – это математический аппарат, с помощью которого записывают (кодируют), упрощают, вычисляют и преобразовывают логические высказывания.

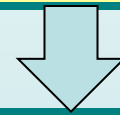
Система обозначений и правил, применяемая ко всевозможным объектам, от чисел до предложений, и позволяющая закодировать высказывания с помощью символов своего языка, а затем манипулировать ими.



**Джордж Буль
(1815-1864)**

ВЫСКАЗЫВАНИЕ

это форма мышления, выраженная повествовательным предложением, в которой что-либо утверждается или отрицается о предметах, их свойствах или отношениях



ПРОСТОЕ высказывание (логическая переменная) - ни одна его часть сама не является высказыванием

СЛОЖНОЕ высказывание (логическая функция)
Состоит из нескольких простых, соединенных между собой с помощью логических операций

Основные операции булевой алгебры

- Конъюнкция – И, логическое умножение
- Дизъюнкция – ИЛИ, логическое сложение
- Отрицание - НЕ

Любое сложное высказывание можно записать с помощью основных логических операций **И, ИЛИ, НЕ**

С помощью логических схем И, ИЛИ, НЕ можно реализовать любую логическую функцию, описывающую работу различных устройств компьютера.

Логическое отрицание (инверсия)

- Соответствует частице **НЕ**, словосочетанию **НЕВЕРНО, ЧТО**
- Обозначение: **неА, $\neg A$, \bar{A}**

$$F(A) = \neg A$$

A	$\neg A$
0	1
1	0

Инверсия логической переменной истинна, если сама переменная ложна, и, наоборот, инверсия ложна, если переменная истинна.

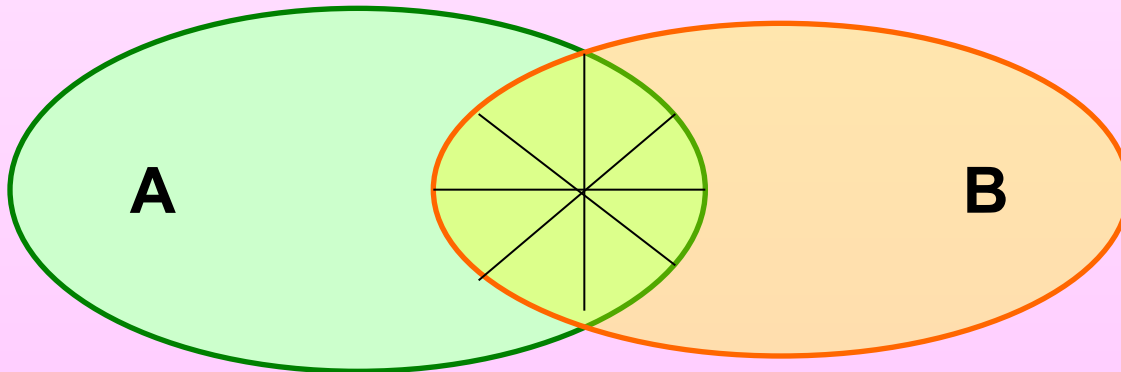
Логическое умножение (конъюнкция)

- Соответствует союзу И
(в естественном языке: **и А, и В**
Как А, так и В; А вместе с В и др.)
- Обозначение: **&, ·, x, И, AND, ∧**

Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны

$$F(A,B)=A\&B$$

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



**Пересечение
A∩B**

Логическое сложение (дизъюнкция)

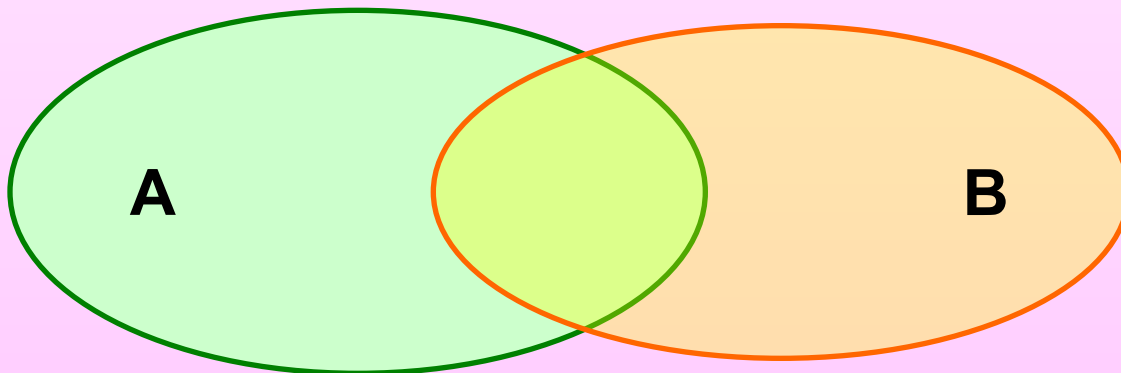
- Соответствует союзу **ИЛИ**

Обозначение: **+, ИЛИ, OR, \vee**

Дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны

$$F(A,B)=A \vee B$$

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



**Объединение
 $A \cup B$**

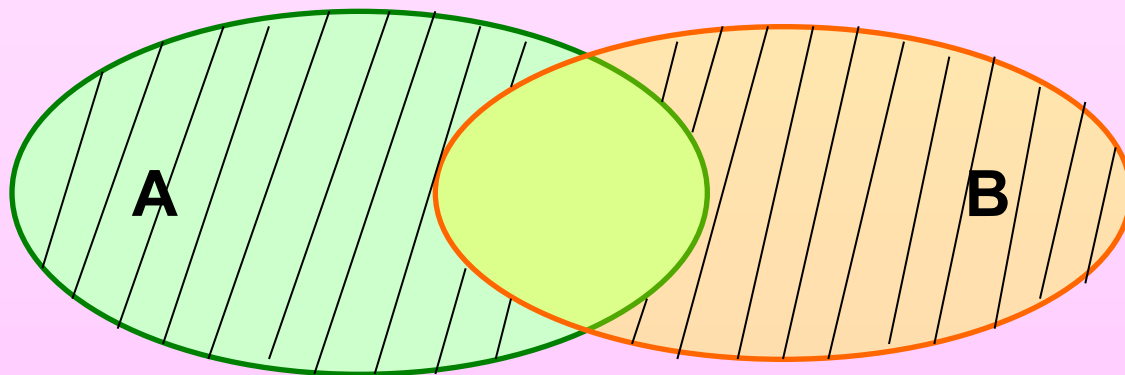
Исключающее ИЛИ (строгая дизъюнкция)

- Соответствует разделяющему **ИЛИ**
(в естественном языке: **ЛИБО**)
- Обозначение: **XOR**

$$F(A,B)=A \vee B$$

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно ложны или истинны



$$A \setminus B \cup B \setminus A$$

Логическое следование (импликация)

- Соответствует речевому обороту

ЕСЛИ... ТО

(в естественном языке: **если А, то В;**

В, если А;

В необходимо для А;

А достаточно для В;

Все А есть В и др.

- Обозначение:

\rightarrow , \Rightarrow

$$F(A,B)=A\Rightarrow B$$

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация истинна всегда, за исключением случая, когда А истинно, а В ложно

Логическое тождество (эквиваленция)

- Соответствует речевым оборотам
ЭКВИВАЛЕНТНО;
РАВНОЗНАЧНО,
НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО ДЛЯ;
ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА
- Обозначение: \longleftrightarrow ; \equiv ; \Leftrightarrow

$$F(A,B)=A\Rightarrow B$$

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция истинна тогда и только тогда, когда
оба высказывания одновременно истинны,
либо ложны.

Таблица истинности

Это - таблица, в которой перечислены все возможные значения входящих логических переменных и соответствующие им значения функции.

A	B	A и B	A или B	Не A
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Построение таблиц истинности по булеву выражению:

- 1) Определить число переменных n .
- 2) Определить число строк по формуле $q=2^n$.
- 3) Записать все возможные значения переменных
- 4) Определить количество логических операций и их порядок.
- 5) Количество столбцов в таблице истинности равно числу переменных n плюс количество логических операций.
- 6) Записать логические операции в таблицу истинности и определить для каждой значение.

Порядок выполнения логических операций

- 1) операция в скобках;
- 2) отрицание;
- 3) логическое умножение;
- 4) логическое сложение;
- 5) импликация;
- 6) эквиваленция.

Законы и тождества алгебры логики

ТОЖДЕСТВА

- Логического сложения

- 1) $A+0=A$
- 2) $A+1=1$
- 3) $A+A=A$
- 4) $A+\neg A=1$

(из двух противоречивых высказываний хотя бы одно истинно)

- Логического умножения

- 1) $A\cdot 0=0$
- 2) $A\cdot 1=A$
- 3) $A\cdot A=A$
- 4) $A\cdot \neg A=0$

(невозможно, чтобы одновременно два противоположных высказывания были истинны)

5) $\neg(\neg A) = A$

(Двойное отрицание исключает отрицание)

Законы алгебры логики

Переместительный закон

$$1) A+B=B+A$$

$$1) A \cdot B=B \cdot A$$

Сочетательный закон

$$2) (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$2) (A \cdot B) \cdot C=A \cdot (B \cdot C)$$

Распределительный закон

$$3) (A+B) \cdot C=AC+BC$$

$$3) AB+C=(A+C)(B+C)$$

Закон де Моргана (закон отрицания)

$$4) \neg(A+B)=\neg A \cdot \neg B$$

$$4) \neg(AB)=\neg A + \neg B$$

$$5) A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A = \neg A + B$$

$$6) A \Leftrightarrow B = AB + \neg(AB) = (\neg A + B)(A + \neg B)$$

Упростите выражения:

1) $1 + A \cdot 0$

2) $X \cdot X \cdot 1$

3) A или $(\text{не}A$ и $B)$

4) $F = \text{не}X$ и $(\text{не}(\text{не}Y$ или $X))$

5) $F = \text{не}(X$ и $(\text{не}X$ и $\text{не}Y))$

6) A и $(A$ или $B)$ и $(B$ или $\text{не}B)$

7) $(A$ или $B)$ и $(\text{не}B$ или $A)$ и $(\text{не}C$ или $B)$

[Проверь себя](#)

Задача. Даны 3 посылки:

- 1) Если Иван – брат Марьи или Иван – сын Марьи, то Иван и Марья – родственники.
- 2) Иван и Марья – родственники.
- 3) Иван – не сын Марьи.

Можно ли вывести следствие, что «Иван – брат Марьи»?

- Вводим обозначения:

A – Иван – брат Марьи.

B – Иван – сын Марьи.

C – Иван и Марья – родственники.

- Запишем символически:

1) $A \text{ xor } B \rightarrow C$

2) C

3) $\neg B$

- Общая формула:

$((A \text{ xor } B) \rightarrow C) \text{ and } C \text{ and } \neg B \rightarrow A$



Решаем задачу с помощью таблицы истинности. Число строк равно: $2^3 + 1$ (титул), число столбцов равно: $3 + 6$ (число операций)

A	B	C	$\neg B$	A xor B	$(A \text{ xor } B) \rightarrow C$	$((A \text{ xor } B) \rightarrow C) \text{ and } C$	$((A \text{ xor } B) \rightarrow C) \text{ and } C \text{ and } \neg B$	$D \rightarrow A$
0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1

Формула называется тождественно-истинной, если при любых комбинациях значений для входящих в нее переменных принимает значение «истина».

- Вывод. Из данных 3-х посылок не следует с необходимостью заключение, что «Иван – брат Марьи». Иван может быть племянником или отцом Марьи, или дядей и т.п.

Проверь себя

1. 1
2. X
3. A+B
4. $\neg XY$
5. 1
6. A
7. $A(\neg C + B)$

[Назад](#)

