Получение интегральных соотношений для *G*-функций Мейера, связанных с представлениями трехмерной и четырехмерной собственных групп Лоренца

2

Вычисление матричных элементов
переходов между базисами
пространств представления
и вывод соответствующих
интегральных соотношений

ЭТАП

Работа выполняется в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы

- Целью второго этапа исследования было вычисление матричных элементов линейных операторов пространств представления, переводящих некоторый базис в другой базис, а также вывод из полученных матричных элементов новых интегральных соотношений для *G*-функций Мейера.

  В качестве пространства представления использовалось пространство $\mathfrak{D}_\sigma$ бесконечно дифференцируемых функций на конусе $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ или $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ отвечающих условию σ -однородности: $f(\alpha x) = \alpha^\sigma f(x)$. Представление групп Лоренца в пространствах задается по формуле $T_\sigma(g)[f(x)] = f(g^{-1}x)$.

- В случае трехмерной группы Лоренца были выделены следующие три контура на конусе, по одному разу пересекающие каждую образующую (может быть, за исключением одной): окружность γ_1: $x_0 = 1$, парабола γ_2: $x_0 + x_1 = 1$ и гипербола γ_3: $x_0^2 - x_2^2 = 1$. Указанные контуры были параметризованы следующим способом:
$x(\alpha) = (1, \cos\alpha, \sin\alpha)$
$x(y) = \left(\frac{1+y^2}{2}, \frac{1-y^2}{2}, y\right)$,
$x(\xi) = (\operatorname{ch}\xi, \pm 1, \operatorname{sh}\xi)$

- В случае четырехмерной группы были выделены аналогичные контуры: сфера γ_1: $x_0 = 1$, параболоид γ_2 : $x_0 + x_3 = 1$, гиперболоид : γ_3 $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$ и контуры были параметризованы так:

$$x(\alpha, \beta) = (1,\ \sin\alpha \sin\beta,\ \sin\alpha\cos\beta,\ \cos\alpha) \in \gamma_1,$$

$$x(y, z) = \left(\frac{1 + y^2 + z^2}{2},\ y,\ z,\ \frac{1 - y^2 - z^2}{2}\right) \in \gamma_2,$$

$$x(e, \iota) = \left(\frac{1 + e^2}{2},\ e\sin\iota,\ e\cos\iota,\ \frac{1 - e^2}{2}\right) \in \gamma_2,$$

$$x(\xi, \eta) = (\operatorname{ch}\xi,\ \operatorname{sh}\xi\sin\eta,\ \operatorname{sh}\xi\cos\eta,\ \pm 1) \in \gamma_3.$$

- В случае трехмерной группы Лоренца на контурах γ_1, γ_2 и γ_3 введены и продолжены по однородности на весь конус следующие базисы соответственно:

$$\{f_n(x) = x_0^{\sigma-n}\,(x_1 + \mathbf{i}x_2)^n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{f_\lambda(x) = (x_0 + x_1)^\sigma \exp\left(\frac{\mathbf{i}\lambda x_2}{x_0 + x_1}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$\{f_{\rho,\pm}(x) = (x_1)_\pm^{\sigma-\mathbf{i}\rho}\,(x_0 + x_2)^{\mathbf{i}\rho} \mid \rho > 0\}.$$

- Для случая четырехмерной группы Лоренца выполнен аналогичный процесс. Полученные базисы, в отличие от трехмерного случая, уже содержат специальные функции (многочлены Гегенбауэра, функции Бесселя и Лежандра). В частности, их сужения на контуры с учетом указанной выше параметризации имеют вид:

$$f_{n,m}(\alpha,\beta) = C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}}(\cos\alpha)\ \sin^m\alpha\, e^{\mathbf{i}m\beta},$$

$$f_{\lambda,\mu}(y,z) = e^{\mathbf{i}\lambda y}\, e^{\mathbf{i}\mu z},$$

$$f_{d,\varrho}(e,\iota) = 2^{-d}\, e^{\mathbf{i}\iota d}\, J_d(\varrho e)$$

и

$$f_{\rho,s,\pm}(\xi,\eta) = \begin{cases} P^{-s}_{-\frac{1}{2}+\mathbf{i}\rho}(\operatorname{ch}\xi)\operatorname{sh}^s\xi\, e^{\mathbf{i}s\eta}, & x(\xi,\eta)\in\gamma_{3,\pm}, \\ 0, & x(\xi,\eta)\in\gamma_{3,\mp}. \end{cases}$$

- В трехмерном случае из разложения

$$f_\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{\lambda n}\, f_n(x)$$

получается формула

$$c_{\lambda n} = \mathsf{F}_i(f_{-n}, f_\lambda)$$

для матричных элементов перехода между базисами, где F_i — билинейный функционал

$$(\mathfrak{D}_\sigma, \mathfrak{D}_{-\sigma-1}) \longrightarrow \mathbb{C},\ (u,v) \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_i} u(x)\, v(x)\, dx$$

не зависящий от контура γ_1. Аналогично получаются формулы для матричных элементов перехода между другими базисами, а также формулы для четырехмерного случая.

- Вычисляя таким образом матричные элементы, мы можем выразить их через функции Мейера. Например, при $\lambda \neq 0$ и $-1 < \operatorname{re}\sigma < 0$

$$c_{n\lambda} = 2^{2\sigma+1}\, e^{-|\lambda|} \operatorname{sign}\lambda\, \Gamma^{-1}(-\sigma - n \operatorname{sign}\lambda) \times$$
$$\times\ \Gamma^{-1}(\sigma + n \operatorname{sign}\lambda + 1)\, \Gamma^{-1}(n \operatorname{sign}\lambda - \sigma - 1)\, G^{21}_{12}\left(2|\lambda| \;\middle|\; \begin{matrix} -\sigma - n \operatorname{sign}\lambda \\ 0,\ -2\sigma - 1 \end{matrix}\right),$$

$$c_{\rho,+,\lambda} = (2\pi)^{-1}\, (\mathbf{i}\lambda)^{-\sigma-1}\, e^{\mathbf{i}\lambda}\, \Gamma^2(\sigma + 1 + \mathbf{i}\rho) \times$$
$$\times\ \Gamma(\sigma + 1 - \mathbf{i}\rho)\, \Gamma^{-2}(2\sigma + 2)\, G^{11}_{12}\left(2\lambda\mathbf{i} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 + \mathbf{i}\rho \\ \sigma + 1,\ -\sigma \end{matrix}\right),$$

$$c_{\rho,s,+,-s,\varrho} = 2^{-\sigma+s-2}\pi^{-1}\, \mathbf{i}^s\, \varrho^{-s}\, \sqrt{\rho \operatorname{ch}(\pi\rho)} \times$$
$$\times\ \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mathbf{i}\rho\right)\right| \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} - \mathbf{i}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\right) \times$$
$$\times\ \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l\, (l!)^{-1}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + l - \mathbf{i}\rho\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + l + \mathbf{i}\rho\right) \times$$
$$\times\ \Gamma(\sigma - s - l + 1)\, \Gamma^{-1}(s + l + 1)\, G^{11}_{13}\left(\frac{\varrho^2}{4} \;\middle|\; \begin{matrix} -l \\ -s,\ 0,\ -\sigma - 1 \end{matrix}\right).$$

- Из формул для матричных элементов композиции двух переходов между базисами получаются интегральные соотношения. Например, формула

$$c_{0,\rho,+} = \int^{+\infty} c_{\rho,+,\lambda}\, c_{0,\lambda}\, d\lambda$$

водит к соотношению

- Пусть $\hat{q}(x,\tilde{x}) := x_0\tilde{x}_0 - x_1\tilde{x}_1 - x_2\tilde{x}_2$ ия $\hat{q}^{-\sigma-1}(x,\tilde{x})$ как функция от $x \in C$ является σ-однородной и, следовательно, $\hat{q}^{-\sigma-1}(x,\tilde{x}) \in \mathfrak{D}_{-\sigma-1}$. Уравнения вида $H(r) := \{x \mid q(x) = r^2\}$ сех о $r > 0$ ывают двуполостные гиперболоиды в пространстве $\mathbb{R}^3$. Если $x \in C$ и $\tilde{x} \in H(1)$, то интегральный оператор

$$\Pi(f)(\tilde{x}) := \mathsf{F}_\gamma(\hat{q}^{-\sigma-1}(\tilde{x},x), f)$$

назовется преобразованием Пуассона. Аналогично определяется преобразование Пуассона для четырехмерного случая. Оно не зависит от контура γ на конусе.

- Преобразование Пуассона, примененное, например, к обеим частям разложения $f_\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{\lambda n}\, f_n(x)$,

  приводит к еще одному интегральному соотношению:

$$G_{02}^{20}\left((l\lambda)^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \\ \frac{\sigma}{2}+\frac{1}{4},\ -\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{4} \end{matrix}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{l}}\, e^{-2\mathbf{i}l\,\operatorname{sh}p\sin q} \times$$
$$\times \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-\mathbf{i}\,\operatorname{sign}\lambda)^n\, e^{|\lambda|} \left(\frac{1-\operatorname{ch}p}{2}\right)_+^{\frac{n}{2}} \times$$
$$\times\ G_{22}^{20}\left(\frac{\operatorname{ch}p-1}{2} \,\middle|\, \begin{matrix} \sigma+1-\frac{n}{2},\ -\sigma-\frac{n}{2} \\ \frac{n}{2},\ -\frac{n}{2} \end{matrix}\right) G_{12}^{20}\left(2|\lambda| \,\middle|\, \begin{matrix} 1+n\,\operatorname{sign}\lambda \\ \sigma+1,\ -\sigma \end{matrix}\right),$$

  где $l = \frac{1}{2(\operatorname{ch}p+\operatorname{sh}p\cos q)}$, $\lambda \neq 0$ и $-1 < \operatorname{re}\sigma < 0$.

- Аналогично получаются соотношения для любой другой пары базисов в трехмерном и четырехмерном случаях. В некоторых частных случаях получаются соотношения для других функций: например, интегральное представление функции Лежандра

- а также частный случай преобразования Меллина квадрата функции Макдональда

$$\int\limits_0^{+\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} \left[K_\tau(\lambda)\right]^2 d\lambda = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sin^{-1}\left[\pi\left(\tau + \frac{1}{2}\right)\right]$$

и функции Мейера

$$\int\limits_0^{+\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} G_{13}^{30}\left(\lambda^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0,\ \tau,\ -\tau \end{matrix}\right) d\lambda = \sqrt{2}\,\pi \sin^{-1}\left[\pi\left(\tau + \frac{1}{2}\right)\right].$$