

# Получение интегральных соотношений для $G$ -функций Мейера, связанных с представлениями трехмерной и четырехмерной собственных групп Лоренца

# 2

Вычисление матричных элементов

переходов между базисами пространств представления и вывод соответствующих интегральных соотношений

# ЭТАП

Работа выполняется в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы

(С) МГГУ им. М. А. Шолохова, 2010



- 
- Целью второго этапа исследования было вычисление матричных элементов линейных операторов пространств представления, переводящих некоторый базис в другой базис, а также вывод из полученных матричных элементов новых интегральных соотношений для  $G$ -функций Мейера.

В качестве пространства представления использовалось пространство  $\mathcal{D}_\sigma$  бесконечно дифференцируемых функций на конусе  $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$  или  $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$  отвечающих условию  $\sigma$ -однородности:  $f(\alpha x) = \alpha^\sigma f(x)$ . Представление групп Лоренца в пространствах задается по формуле  $T_\sigma(g)[f(x)] = f(g^{-1}x)$ .

- 
- В случае трехмерной группы Лоренца были выделены следующие три контура на конусе, по одному разу пересекающие каждую образующую (может быть, за исключением одной): окружность  $\gamma_1: x_0 = 1$ , парабола  $\gamma_2: x_0 + x_1 = 1$  и гипербола  $\gamma_3: x_0^2 - x_2^2 = 1$ . Указанные контуры были параметризованы следующим способом:

$$x(\alpha) = (1, \cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$x(y) = \left( \frac{1+y^2}{2}, \frac{1-y^2}{2}, y \right),$$

$$x(\xi) = (\operatorname{ch} \xi, \pm 1, \operatorname{sh} \xi)$$

- В случае четырехмерной группы были выделены аналогичные контуры: сфера  $\gamma_1: x_0 = 1$ , параболоид  $\gamma_2: x_0 + x_3 = 1$  и гиперболоид  $\gamma_3: x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$  и контуры были параметризованы так:

$$x(\alpha, \beta) = (1, \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha) \in \gamma_1,$$

$$x(y, z) = \left( \frac{1 + y^2 + z^2}{2}, y, z, \frac{1 - y^2 - z^2}{2} \right) \in \gamma_2,$$

$$x(e, \iota) = \left( \frac{1 + e^2}{2}, e \sin \iota, e \cos \iota, \frac{1 - e^2}{2} \right) \in \gamma_2,$$

$$x(\xi, \eta) = (\operatorname{ch} \xi, \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \operatorname{sh} \xi \cos \eta, \pm 1) \in \gamma_3.$$

- 
- В случае трехмерной группы Лоренца на контурах  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  введены и продолжены по однородности на весь конус следующие базисы соответственно:

$$\{f_n(x) = x_0^{\sigma-n} (x_1 + \mathbf{i}x_2)^n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{f_\lambda(x) = (x_0 + x_1)^\sigma \exp\left(\frac{\mathbf{i}\lambda x_2}{x_0 + x_1}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$\{f_{\rho,\pm}(x) = (x_1)_\pm^{\sigma-\mathbf{i}\rho} (x_0 + x_2)^{\mathbf{i}\rho} \mid \rho > 0\}.$$

---

- Для случая четырехмерной группы Лоренца выполнен аналогичный процесс. Полученные базисы, в отличие от трехмерного случая, уже содержат специальные функции (многочлены Гегенбауэра, функции Бесселя и Лежандра). В частности, их сужения на контуры с учетом указанной выше параметризации имеют вид:

$$f_{n,m}(\alpha, \beta) = C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}}(\cos \alpha) \sin^m \alpha e^{im\beta},$$

$$f_{\lambda,\mu}(y, z) = e^{i\lambda y} e^{i\mu z},$$

$$f_{d,\varrho}(e, \iota) = 2^{-d} e^{i\iota d} J_d(\varrho e)$$

и

$$f_{\rho,s,\pm}(\xi, \eta) = \begin{cases} P_{-\frac{1}{2}+i\rho}^{-s}(\operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh}^s \xi e^{is\eta}, & x(\xi, \eta) \in \gamma_{3,\pm}, \\ 0, & x(\xi, \eta) \in \gamma_{3,\mp}. \end{cases}$$

- 
- В трехмерном случае из разложения

$$f_\lambda(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{\lambda n} f_n(x)$$

получается формула

$$c_{\lambda n} = F_i(f_{-n}, f_\lambda)$$

для матричных элементов перехода между базисами, где  $F_i$  — билинейный функционал

$$(\mathcal{D}_\sigma, \mathcal{D}_{-\sigma-1}) \longrightarrow \mathbb{C}, (u, v) \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int u(x) v(x) dx$$

не зависящий от контура  $\gamma_1$ . Аналогично получаются формулы для матричных элементов перехода между другими базисами, а также формулы для четырехмерного случая.

---

- Вычисляя таким образом матричные элементы, мы можем выразить их через функции Мейера. Например, при  $\lambda \neq 0$  и  $-1 < \operatorname{re} \sigma < 0$

$$c_{n\lambda} = 2^{2\sigma+1} e^{-|\lambda|} \operatorname{sign} \lambda \Gamma^{-1}(-\sigma - n \operatorname{sign} \lambda) \times \\ \times \Gamma^{-1}(\sigma + n \operatorname{sign} \lambda + 1) \Gamma^{-1}(n \operatorname{sign} \lambda - \sigma - 1) G_{12}^{21} \left( 2|\lambda| \left| \begin{array}{l} -\sigma - n \operatorname{sign} \lambda \\ 0, -2\sigma - 1 \end{array} \right. \right),$$

$$c_{\rho,+,\lambda} = (2\pi)^{-1} (\mathbf{i}\lambda)^{-\sigma-1} e^{\mathbf{i}\lambda} \Gamma^2(\sigma + 1 + \mathbf{i}\rho) \times \\ \times \Gamma(\sigma + 1 - \mathbf{i}\rho) \Gamma^{-2}(2\sigma + 2) G_{12}^{11} \left( 2\lambda\mathbf{i} \left| \begin{array}{l} 1 + \mathbf{i}\rho \\ \sigma + 1, -\sigma \end{array} \right. \right),$$

$$c_{\rho,s,+,-s,\varrho} = 2^{-\sigma+s-2} \pi^{-1} \mathbf{i}^s \varrho^{-s} \sqrt{\rho \operatorname{ch}(\pi\rho)} \times \\ \times \left| \Gamma \left( \frac{1}{2} + s + \mathbf{i}\rho \right) \right| \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{2} - \mathbf{i} \right) \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{2} + \mathbf{i} \right) \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (l!)^{-1} \Gamma \left( \frac{1}{2} + l - \mathbf{i}\rho \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} + l + \mathbf{i}\rho \right) \times \\ \times \Gamma(\sigma - s - l + 1) \Gamma^{-1}(s + l + 1) G_{13}^{11} \left( \frac{\varrho^2}{4} \left| \begin{array}{l} -l \\ -s, 0, -\sigma - 1 \end{array} \right. \right).$$



- 
- Из формул для матричных элементов композиции двух переходов между базисами получаются интегральные соотношения. Например, формула

$$c_{0,\rho,+} = \int_{-\infty}^{+\infty} c_{\rho,+,\lambda} c_{0,\lambda} d\lambda$$

Водит к соотношению

- 
- Пусть  $\hat{q}(x, \tilde{x}) := x_0\tilde{x}_0 - x_1\tilde{x}_1 - x_2\tilde{x}_2$  и  $\hat{q}^{-\sigma-1}(x, \tilde{x})$  как функция от  $x \in C$  является  $\sigma$ -однородной и, следовательно,  $\hat{q}^{-\sigma-1}(x, \tilde{x}) \in \mathfrak{D}_{-\sigma-1}$ . Уравнения вида  $H(r) := \{x \mid q(x) = r^2\}$  с  $r > 0$  являются двуполостными гиперboloидами в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Если  $x \in C$  и  $\tilde{x} \in H(1)$ , то интегральный оператор

$$\Pi(f)(\tilde{x}) := F_\gamma(\hat{q}^{-\sigma-1}(\tilde{x}, x), f)$$

называется преобразованием Пуассона. Аналогично определяется преобразование Пуассона для четырехмерного случая. Оно не зависит от контура  $\gamma$  на конусе.

---

- Преобразование Пуассона, примененное, например, к обеим частям разложения  $f_\lambda(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{\lambda n} f_n(x)$ ,

приводит к еще одному интегральному соотношению:

$$G_{02}^{20} \left( (l\lambda)^2 \mid \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4}, -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{4} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{l}} e^{-2il \operatorname{sh} p \sin q} \times$$

$$\times \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-i \operatorname{sign} \lambda)^n e^{|\lambda|} \left( \frac{1 - \operatorname{ch} p}{2} \right)_+^{\frac{n}{2}} \times$$

$$\times G_{22}^{20} \left( \frac{\operatorname{ch} p - 1}{2} \mid \frac{\sigma + 1 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}, -\sigma - \frac{n}{2} \right) G_{12}^{20} \left( 2|\lambda| \mid \frac{1 + n \operatorname{sign} \lambda}{\sigma + 1}, -\sigma \right),$$

где  $l = \frac{1}{2(\operatorname{ch} p + \operatorname{sh} p \cos q)}$ ,  $\lambda \neq 0$  и  $-1 < \operatorname{re} \sigma < 0$ .

- 
- Аналогично получаются соотношения для любой другой пары базисов в трехмерном и четырехмерном случаях. В некоторых частных случаях получаются соотношения для других функций: например, интегральное представление функции Лежандра

- 
- а также частный случай преобразования Меллина квадрата функции Макдональда

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} [K_\tau(\lambda)]^2 d\lambda = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sin^{-1} \left[ \pi \left( \tau + \frac{1}{2} \right) \right]$$

и функции Мейера

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} G_{13}^{30} \left( \lambda^2 \mid \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0, \tau, -\tau \end{matrix} \right) d\lambda = \sqrt{2} \pi \sin^{-1} \left[ \pi \left( \tau + \frac{1}{2} \right) \right].$$

---