

# ПРОЕКТ

Теория малых колебаний

*Руководитель проекта: К.К.Асратян*

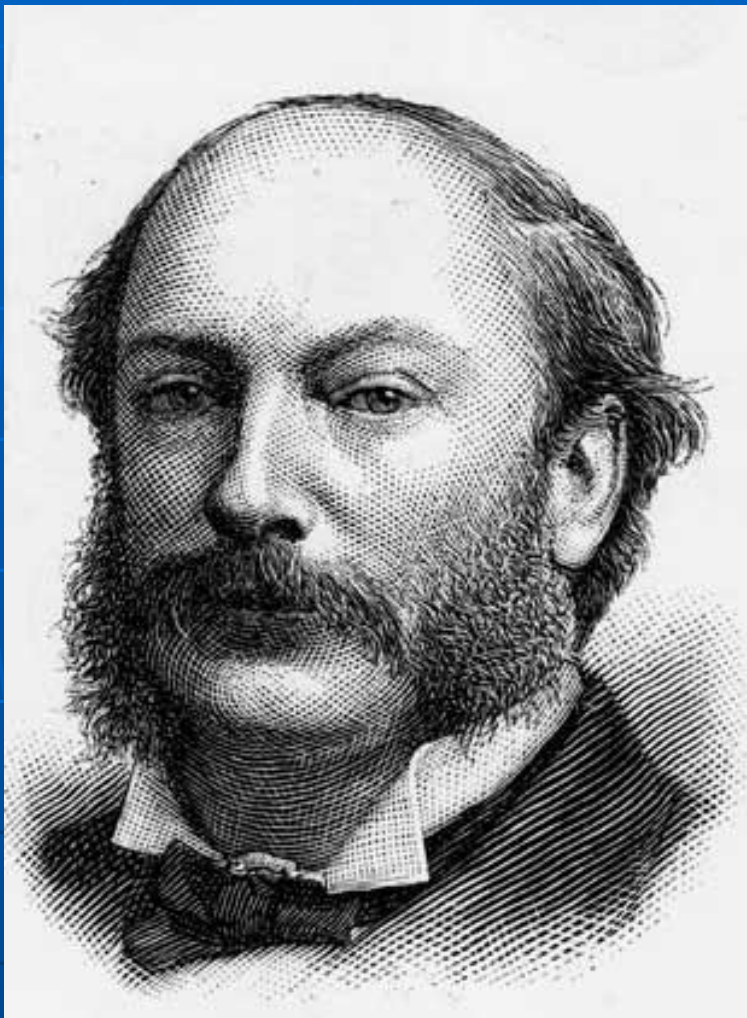
*Выполнила: ученица 11 “Б” класса  
Приказчикова Мария*

I. Физика как наука.  
Универсальные процессы и  
явления

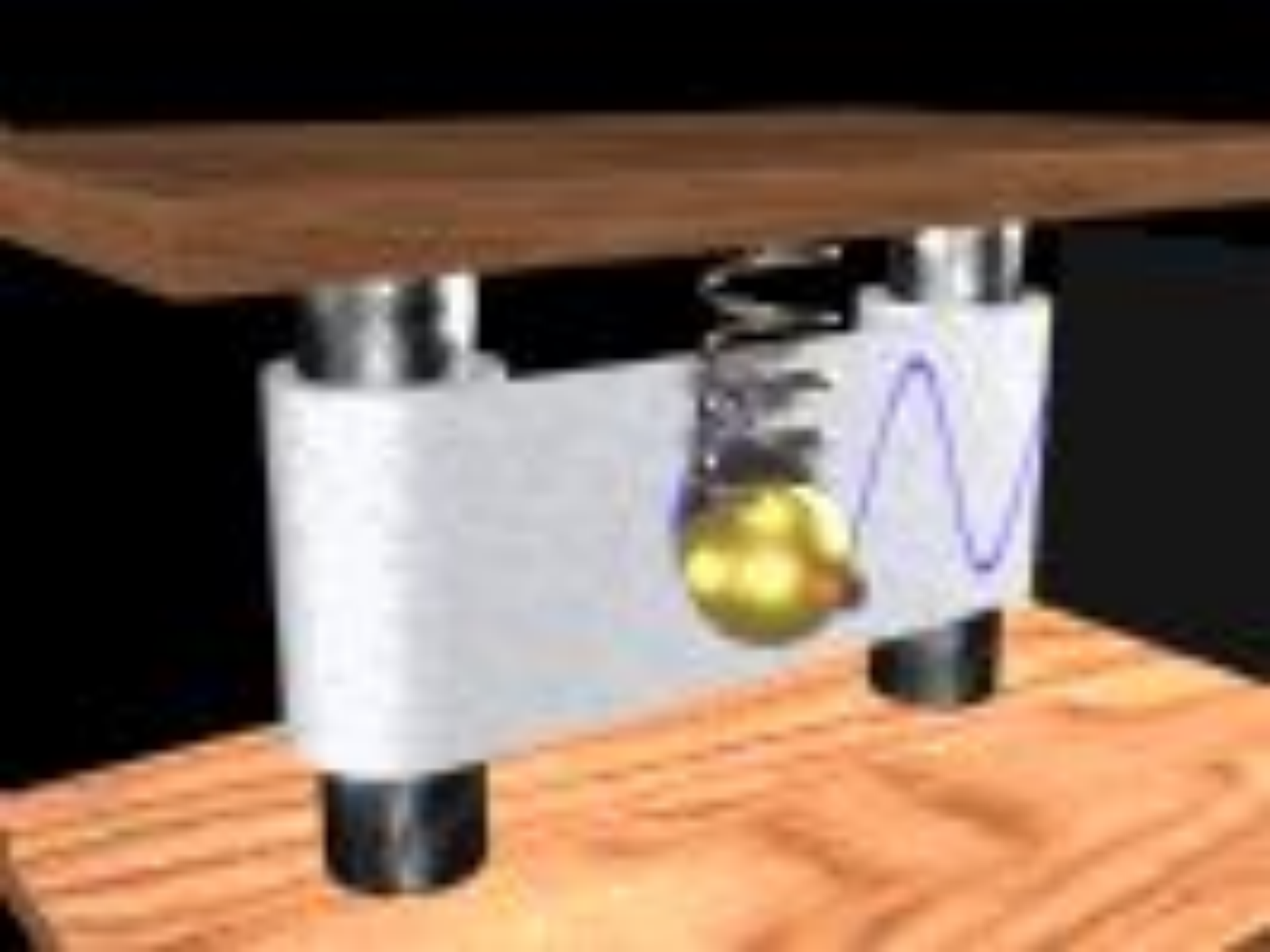




Леонид Исаакович  
Мандельштам  
(1879 – 1944)



Джон Уильям Рэлей  
(1842 – 1919)



# II. Колебания

*Колебаниями, или  
колебательными движениями,*  
называют движения или  
изменения состояния, точно или  
приблизительно повторяющиеся  
во времени.



Минимальный промежуток времени  $T$ , через который движение тела полностью повторяется, называется *периодом колебаний*

**Частота колебаний** –  
число колебаний,  
совершаемых телом за  
секунду.

1

$$\nu = \frac{N}{t}, \quad ( \Gamma 4 )$$

**Циклическая частота колебаний  $\omega$**  – это число полных колебаний, происходящих за  $2\pi$  секунд. Единица циклической частоты – радиан в секунду (рад/с).

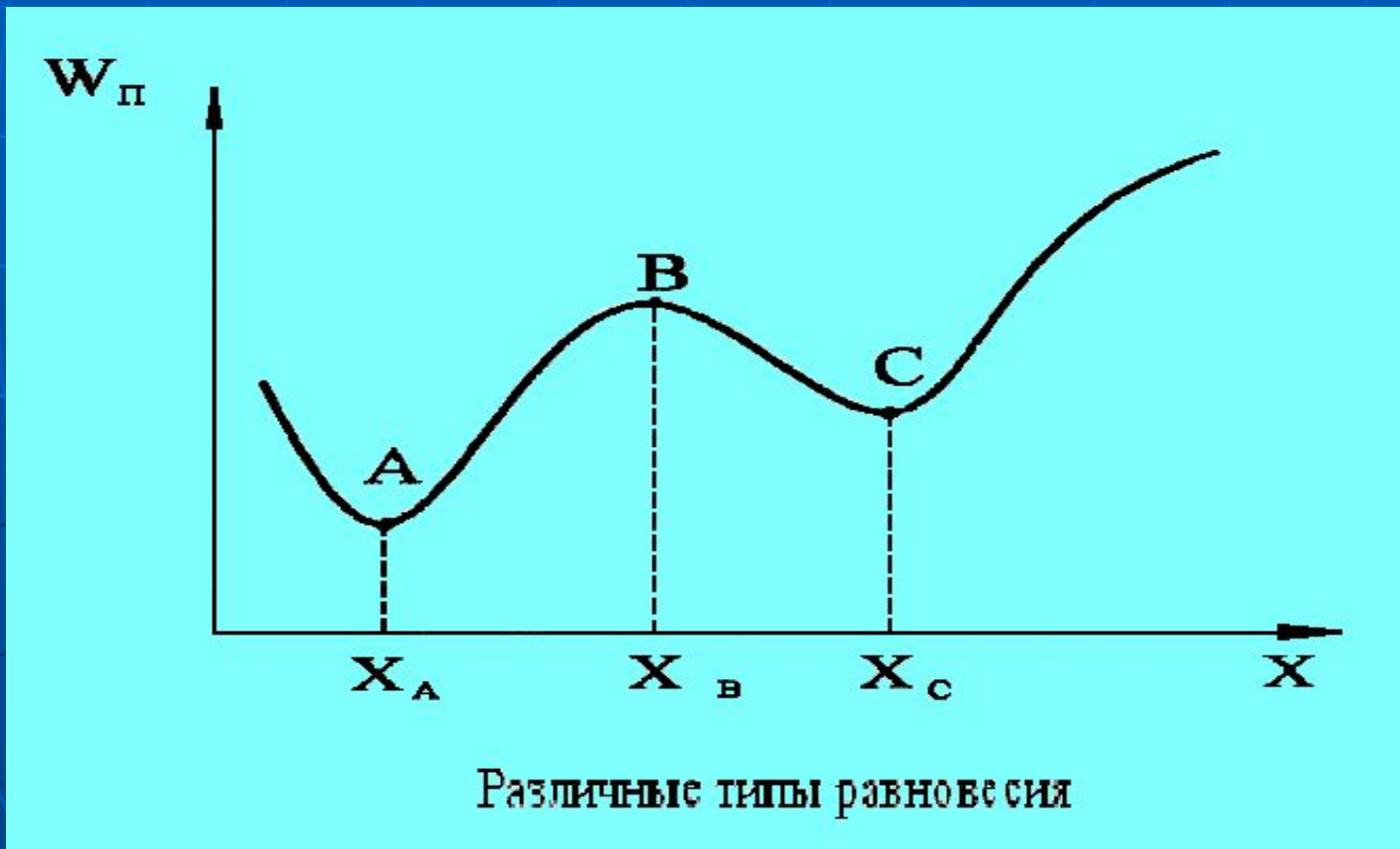
Циклическая частота  $\omega$   
связана с частотой  $\nu$  и  
периодом колебаний  $T$   
соотношениями:

$$\omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{T}$$

# Свободные колебания

Положение, в котором векторная сумма сил, действующих на тело, равна нулю, называется

***положением равновесия.***



**Свободными (или собственными) колебаниями** называют колебания, возникающие в системе под действием внутренних сил, после того как система была выведена из положения равновесия

# Условия возникновения свободных механических колебаний :

1. При выведении тела из положения равновесия в системе должна возникнуть сила, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия, и, следовательно, равнодействующая всех сил должна быть отлична от нуля и направлена к положению равновесия.
2. Силы трения в системе должны быть достаточно малы. (При большом трении в системе колебания могут вообще не возникнуть или быстро затухнуть.)



# Гармонические колебания

Периодические изменения физической величины в зависимости от времени, происходящие по закону косинуса или синуса, называются **гармоническими колебаниями**

# Уравнение гармонического колебания:

$$x = A \cos (\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A \sin (\omega t + \varphi_0),$$

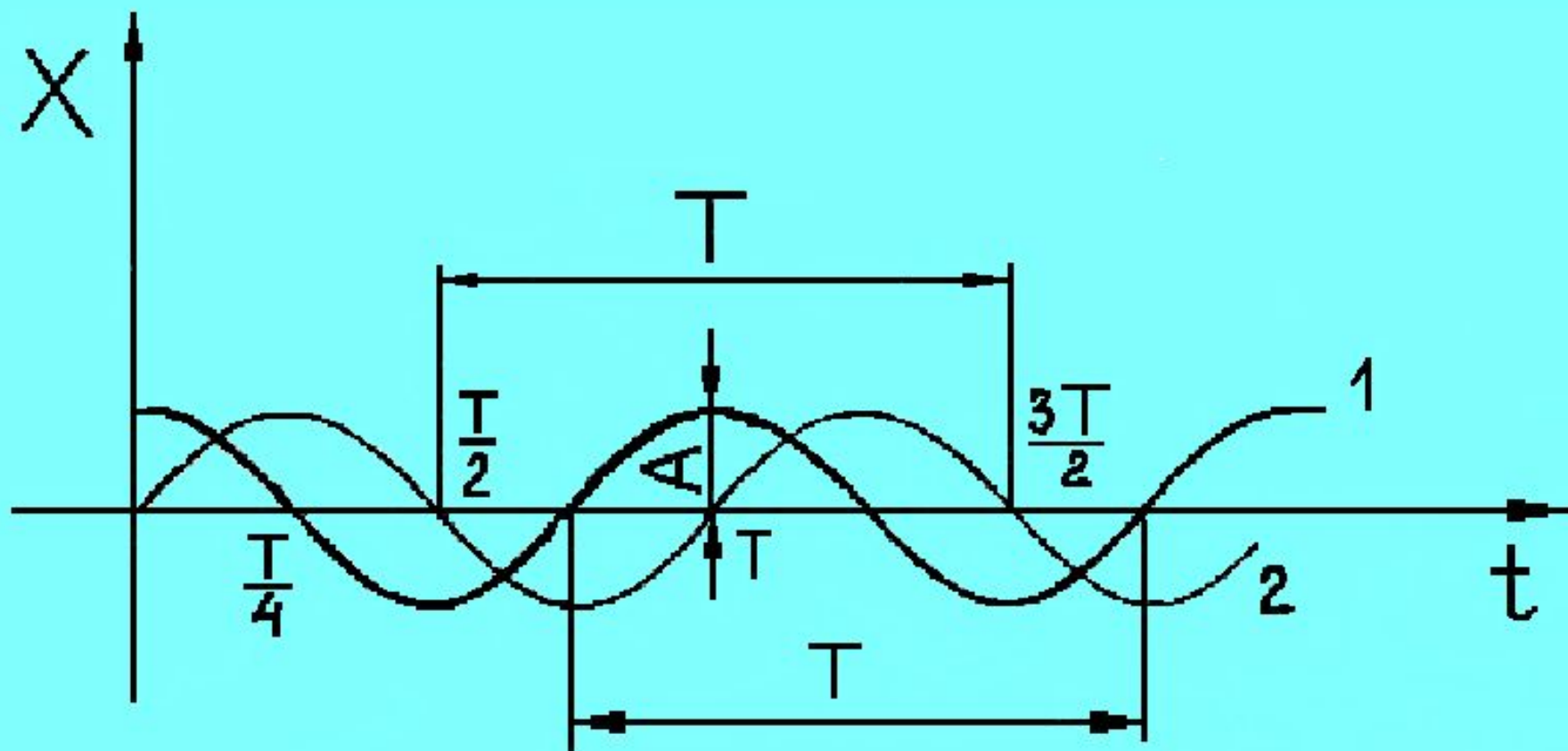
где  $x$  – смещение тела от положения равновесия  
в данный момент времени;

$A$  – амплитуда колебаний;

$\omega t + \varphi_0 = \varphi$  – фаза колебаний;

$\varphi_0$  – начальная фаза колебаний;

$\omega$  – круговая или циклическая частота



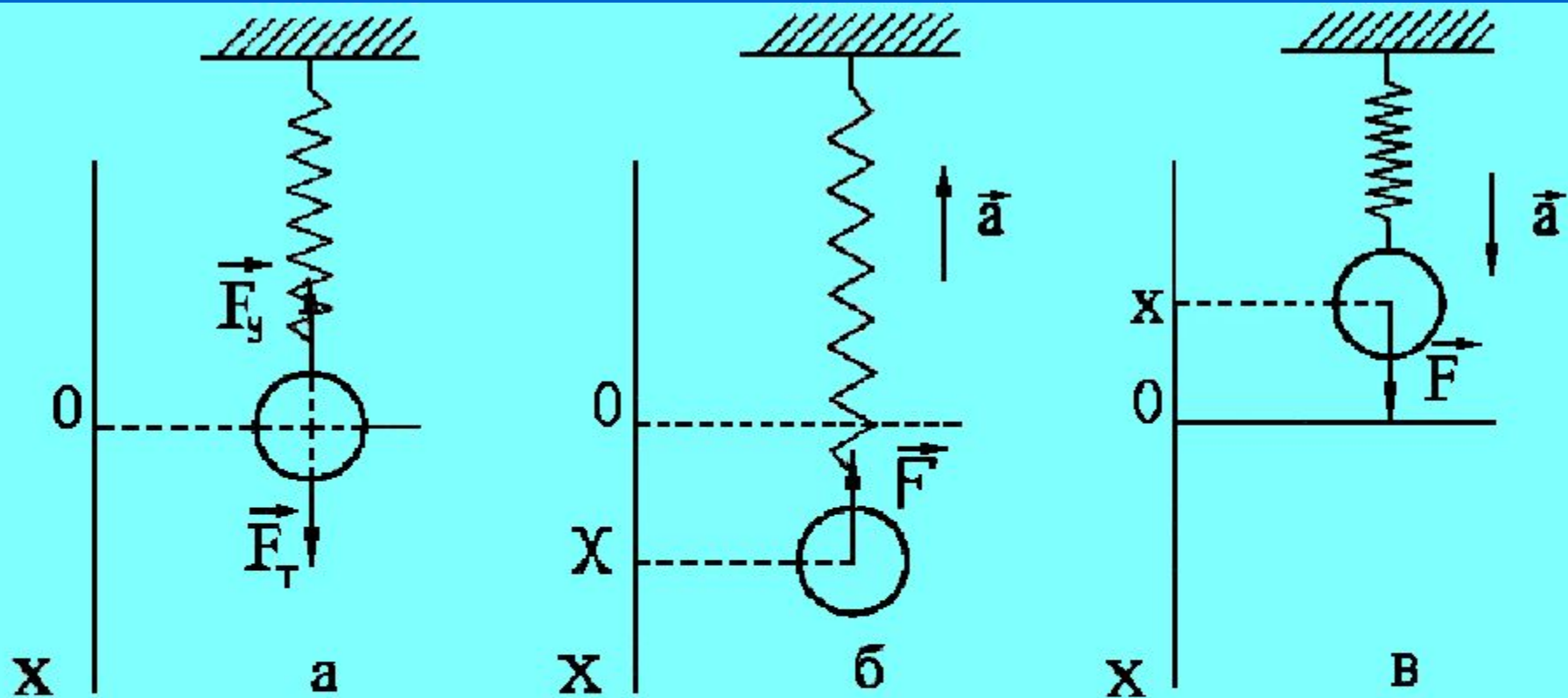
Графіки гармонічних коливань:

1 – по закону косинуса; 2 – по закону синуса

**Амплитуда колебаний** – это наибольшее по модулю смещение колеблющегося тела от положения равновесия.

Величину, стоящую под знаком синуса или косинуса, называют **фазой колебаний**, описываемых этими функциями.

# Колебания пружинного маятника



Пружинный маятник:

а – в положении равновесия;

б, в – при движении к положению равновесия

$$W = W_{\kappa} + W_{\Pi} = \text{const}$$

$$W_{\Pi} = \frac{\kappa \cdot x^2}{2}$$

$$W_{\kappa} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

где  $m$  – масса колеблющегося тела;  
 $\kappa$  – жесткость пружины;  
 $x$  – абсолютное смещение маятника из  
положения равновесия;  
 $v$  – скорость маятника

$$W = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{\kappa \cdot x^2}{2} = \text{const}$$



$$\frac{dW}{dt} = m v v' + \kappa x x' = 0$$

$$x' = v; \quad v' = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \kappa x = 0 \quad \text{ИЛИ} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\kappa}{m} x = 0$$

Уравнение движения пружинного маятника:

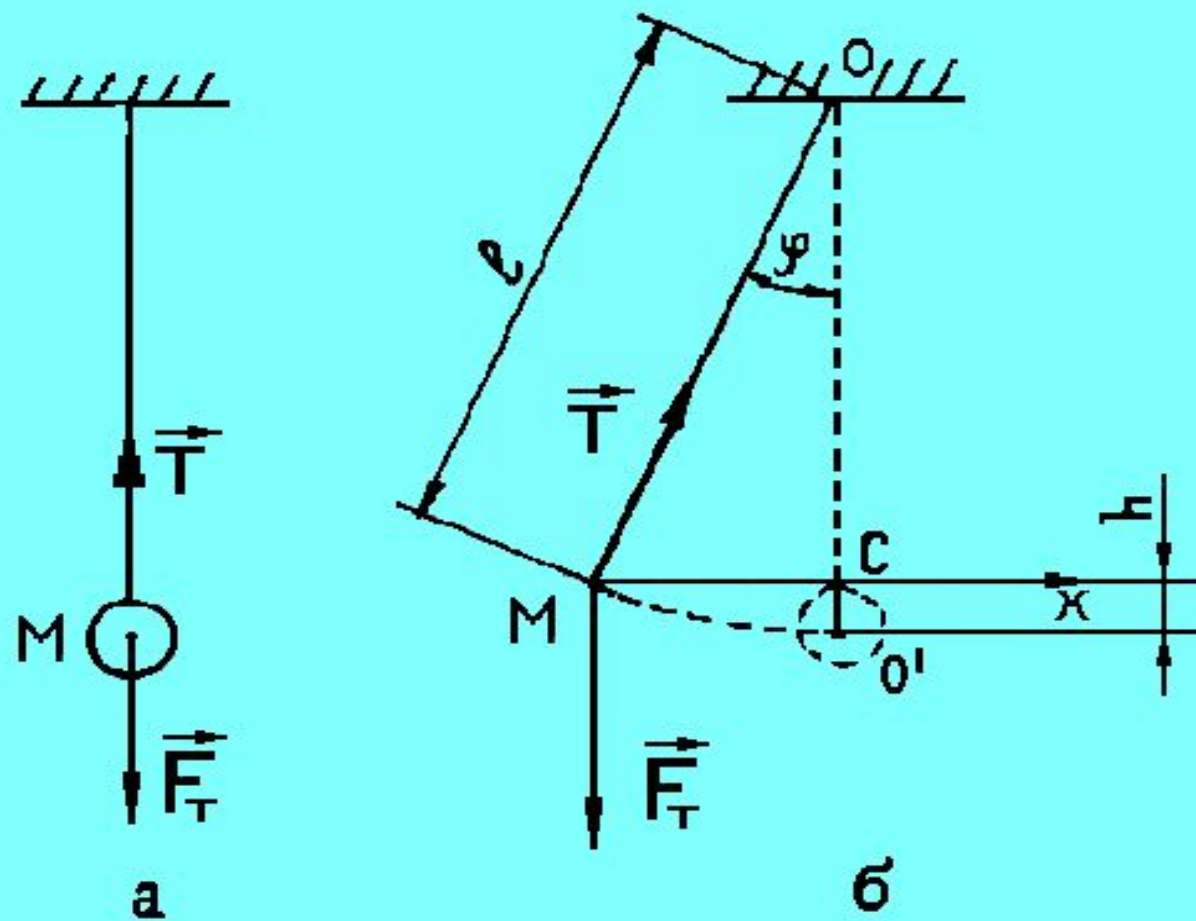
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

- собственная циклическая частота свободных колебаний

# Колебания математического маятника



### Математический маятник

а – в положении равновесия,

б – при движении к положению равновесия

Кинетическая энергия маятника равна :

$$W_{\text{к}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$\overset{\text{O}}{\text{M}} = x = l \cdot \varphi,$$

где  $l$  – длина маятника

$$v = (x)' = l \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$W_{\text{к}} = \frac{m \cdot l^2}{2} \cdot \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

Потенциальная энергия маятника равна :

$$W_{\pi} = m \cdot g \cdot h$$

$$h = l \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$W_{\pi} = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\varphi \ll 1 \quad \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$W_{\pi} = m \cdot g \cdot l \cdot \frac{\varphi^2}{2}$$

$$W = W_K + W_{\Pi} = \text{const}$$

$$W = \frac{m \cdot l^2}{2} \cdot \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + m \cdot g \cdot l \cdot \frac{\varphi^2}{2} = \text{const}$$

$$\frac{dW}{dt} = m \cdot l^2 \cdot \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \left( \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) + m \cdot g \cdot l \cdot \varphi \cdot \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0$$

Т.к.  $\left( \frac{d\varphi}{dt} \right) \neq 0$ , получаем:

$$m \cdot l^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m \cdot g \cdot l \cdot \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

# Уравнение движения математического маятника:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  - собственная циклическая частота свободных колебаний

# Электромагнитные колебания



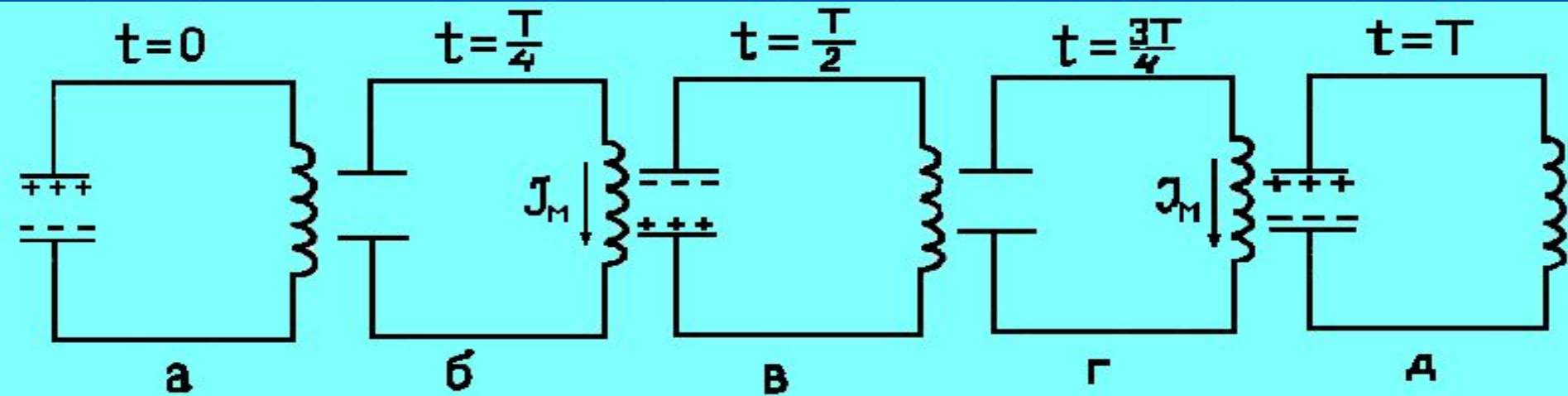
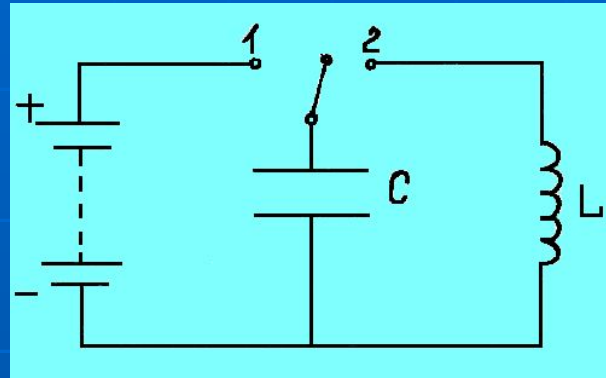
**Электромагнитными колебаниями** называют состояние электромагнитного поля, при котором электрическое и магнитное поля изменяются во времени по гармоническому закону

# Колебательным контуром

называется замкнутая электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивности  $L$ , конденсатора емкости  $C$  и электрического сопротивления  $R$ . В простейшем идеализированном случае электрическим сопротивлением пренебрегают ( $R \rightarrow 0$ ).

**Свободными электромагнитными колебаниями** называются периодически повторяющиеся изменения электромагнитных величин (электрического заряда  $q$ , силы тока  $I$ , разности потенциалов  $U$ ), происходящие без потребления энергии от внешних источников

# Электромагнитные колебания в контуре



$$\begin{aligned}
 q &= q_m \\
 U &= U_m \\
 I &= 0 \\
 W_E &= \frac{q_m^2}{2 \cdot C}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q &= 0 \\
 U &= 0 \\
 I &= I_m \\
 W_M &= \frac{L \cdot I_m^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q &= q_m \\
 U &= U_m \\
 I &= 0 \\
 W_E &= \frac{q_m^2}{2 \cdot C}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q &= 0 \\
 U &= 0 \\
 I &= I_m \\
 W_M &= \frac{L \cdot I_m^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q &= q_m \\
 U &= U_m \\
 I &= 0 \\
 W_E &= \frac{q_m^2}{2 \cdot C}
 \end{aligned}$$

# Полная энергия колебательной системы:

$$W = W_E + W_M = \text{const}$$

Энергия электрического поля:

$$W_E = \frac{q^2}{2 \cdot C},$$

где  $q$  – заряд конденсатора;

$C$  – емкость конденсатора

Энергия магнитного поля:

$$W_M = \frac{L \cdot i^2}{2},$$

где  $L$  – индуктивность катушки;

$i$  – сила тока

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$W_M = \frac{L \cdot \left( \frac{dq}{dt} \right)^2}{2}$$

$$W = \frac{q^2}{2 \cdot C} + \frac{L \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right)^2}{2} = \text{const}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{C} \cdot q \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right) + L \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) = 0$$

Т.к.  $\frac{dq}{dt} \neq 0$ , получаем:

$$\frac{1}{C} \cdot q + L \cdot \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) = 0 \quad \text{ИЛИ} \quad \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot q = 0$$

# Уравнение свободных электромагнитных колебаний:

$$\left( \frac{d^2 q}{dt^2} \right) + \omega_0^2 q = 0,$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

- собственная циклическая частота свободных колебаний

Линейные колебания в  
популяционной модели  
«хищник – жертва» -  
«экологический маятник»





Вито Вольтерра  
(1860 – 1940)

# Модель «хищник – жертва»

Жертва

$N_1(t)$  - число жертв

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1,$$

где  $\alpha_1$  – постоянный положительный коэффициент прироста

1-ое уравнение - изменение числа жертв:

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2,$$

где  $\beta_1$  – положительный коэффициент, характеризующий гибель жертв из-за встречи с хищниками.

Хищник

$N_2(t)$  - число хищников

$$\frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2,$$

где  $\alpha_2$  - постоянный положительный коэффициент вымирания

2-ое уравнение - изменение числа хищников:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 + \beta_2 N_1 N_2,$$

где  $\beta_2$  – положительный коэффициент, характеризующий размножение хищников

При равновесном состоянии системы, т.е. при  $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$ ,

численность видов имеет равновесные значения:

$$N_2^0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad N_1^0 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

$$N_1 = N_1^0 + n_1(t) \quad \text{и} \quad N_2 = N_2^0 + n_2(t),$$

причём  $n_1 \ll N_1^0$     и     $n_2 \ll N_2^0$

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dn_1}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dN_2}{dt} = \frac{dn_2}{dt}$$

$$\frac{dn_1}{dt} = - \frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\beta_2} n_2$$

$$\frac{dn_2}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\beta_1} n_1$$

$$\frac{d^2 n_1}{dt^2} = - \frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\beta_2} \frac{dn_2}{dt} = - \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\beta_1} \frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\beta_2} n_1 = - \alpha_1 \alpha_2 n_1$$

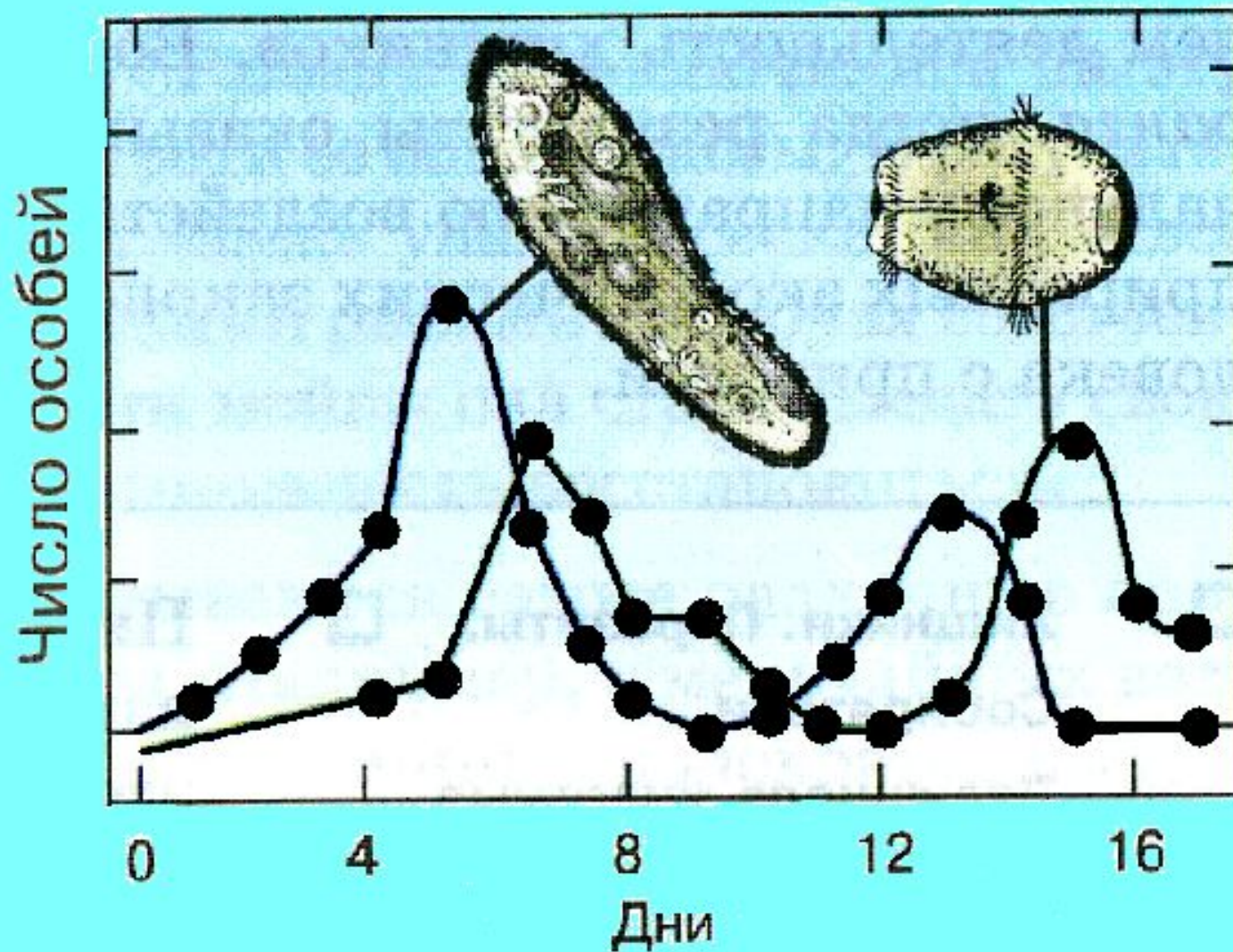
$$\frac{d^2 n_2}{dt^2} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\beta_1} \frac{dn_1}{dt} = - \frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\beta_2} \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\beta_1} n_2 = - \alpha_1 \alpha_2 n_2$$

$$\frac{d^2 n_1}{dt^2} + \alpha_1 \alpha_2 n_1 = 0 \quad \text{ИЛИ} \quad \frac{d^2 n_1}{dt^2} + \omega_0^2 n_1 = 0$$

$$\frac{d^2 n_2}{dt^2} + \alpha_1 \alpha_2 n_2 = 0 \quad \text{ИЛИ} \quad \frac{d^2 n_2}{dt^2} + \omega_0^2 n_2 = 0$$

Таким образом, численность хищников и жертв в модели «экологического маятника» изменяется колебательным образом с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$$



Ход численности инфузории-туфельки и хищной инфузории

# Основное уравнение теории малых колебаний

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = 0,$$

где  $\xi$  – обобщенная координата рассматриваемого нами процесса;  
 $\omega_0$  – циклическая частота, зависящая от параметров  
рассматриваемого процесса

## Решение уравнения

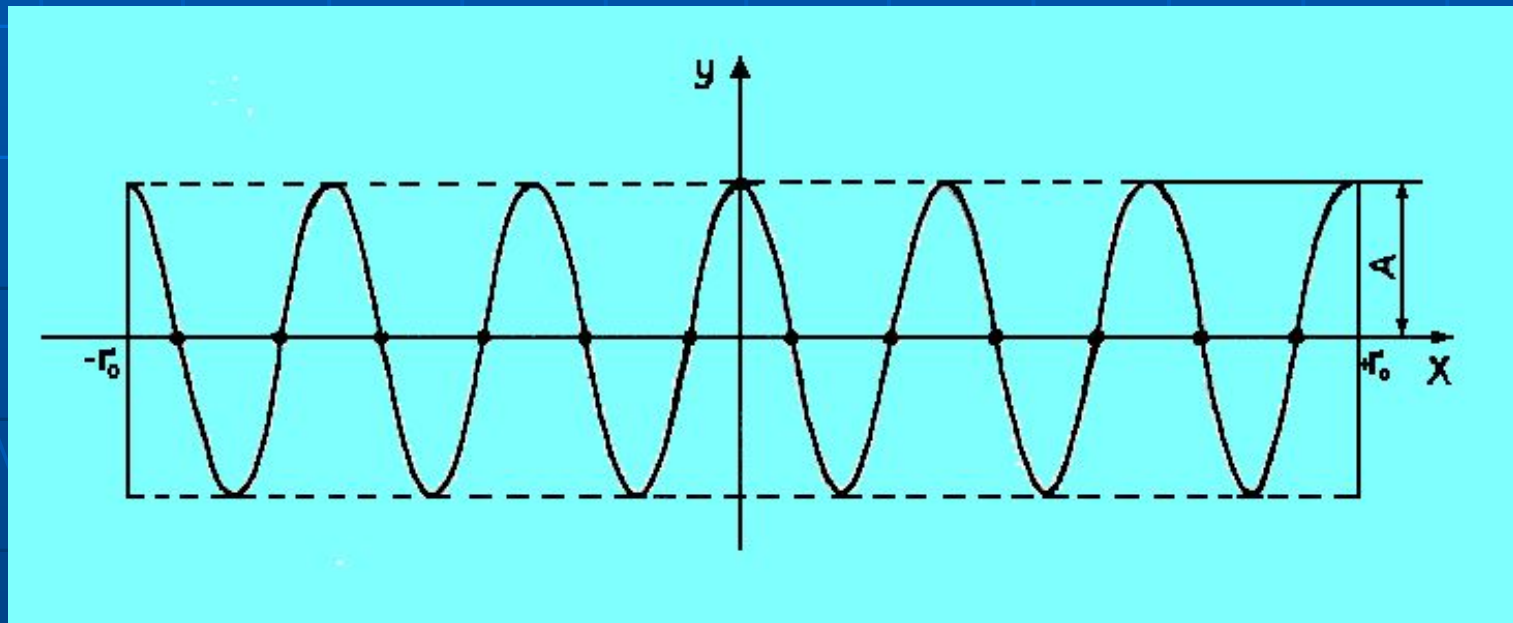
$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad \xi(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

# Квантовый осциллятор

# Уравнение стоячей волны:

$$y(x,t) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega_0 t$$

График уравнения стоячей волны:





$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} X = 0 \quad \text{ИЛИ} \quad X_n = \pm \frac{\lambda}{2} \cdot \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  номера узлов в интервале  $2r_0$

Число узлов на всем интервале:

$$2r_0 = \pm \frac{\lambda}{2} \cdot \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Длина волны подчиняется условию де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

где  $h$  – постоянная Планка;

$m$  – масса атома;

$v$  – скорость волны

Скорость волны равна:

$$v = \frac{h}{4mr_0} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Полная энергия колебания равна:

$$W = W_k + W_{\pi} = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot r_0}{2}$$

$$W = \frac{h^2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{32 \cdot r_0^2 \cdot m} + \frac{k \cdot r_0^2}{2}$$

Устойчивое состояние соответствует условию:

$$\frac{dW}{dr_0} = 0$$

$$(r_0^2)_{\min} = \frac{h \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}{4 \cdot \sqrt{m \cdot k}}$$

Минимальное значение энергии равно:

$$W_n = \frac{1}{4} \cdot h \cdot \omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \hbar \omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  - собственная частота колебаний атома, т.е. атом

колеблется «порождая» квазичастицы с энергией  $\hbar \omega_0$  ( $\hbar = \frac{h}{2 \cdot \pi}$ ).

Невозбужденный атом ( $n=0$ ), колеблется с минимальной энергией:

$$W_{\min} = \frac{\pi}{2} \cdot \hbar \omega_0$$

# III. Применение колебаний



Христиан Гюйгенс  
(1629 – 1695)

