ПРОЕКТ

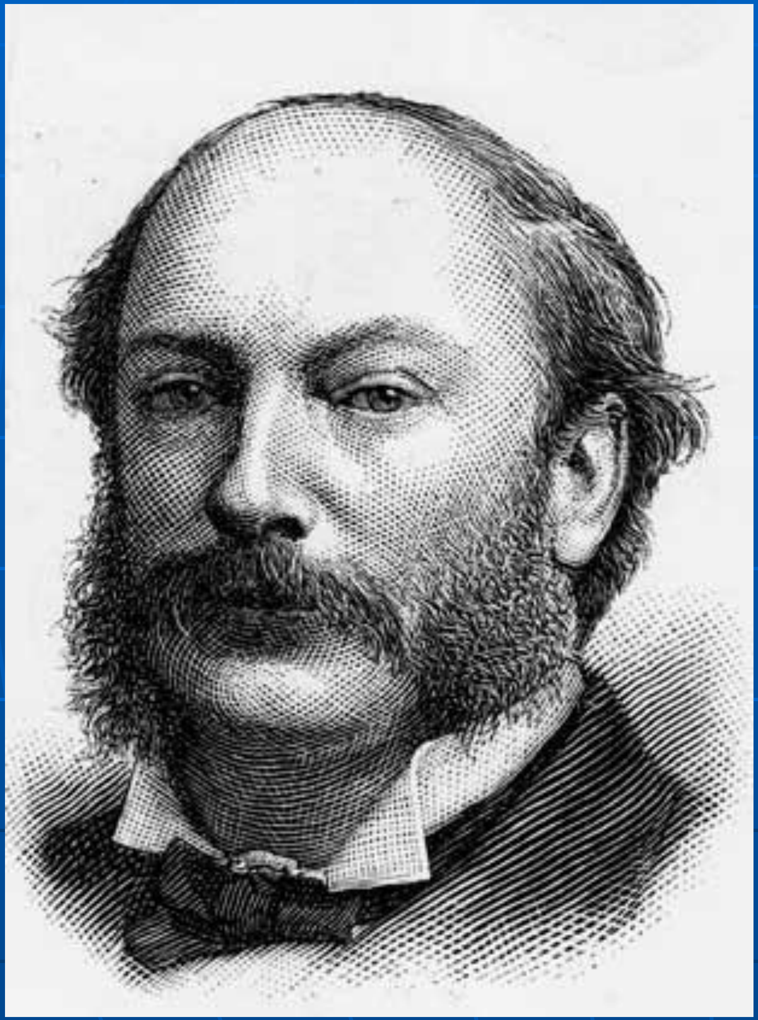
Теория малых колебаний

Руководитель проекта: К.К.Асратян

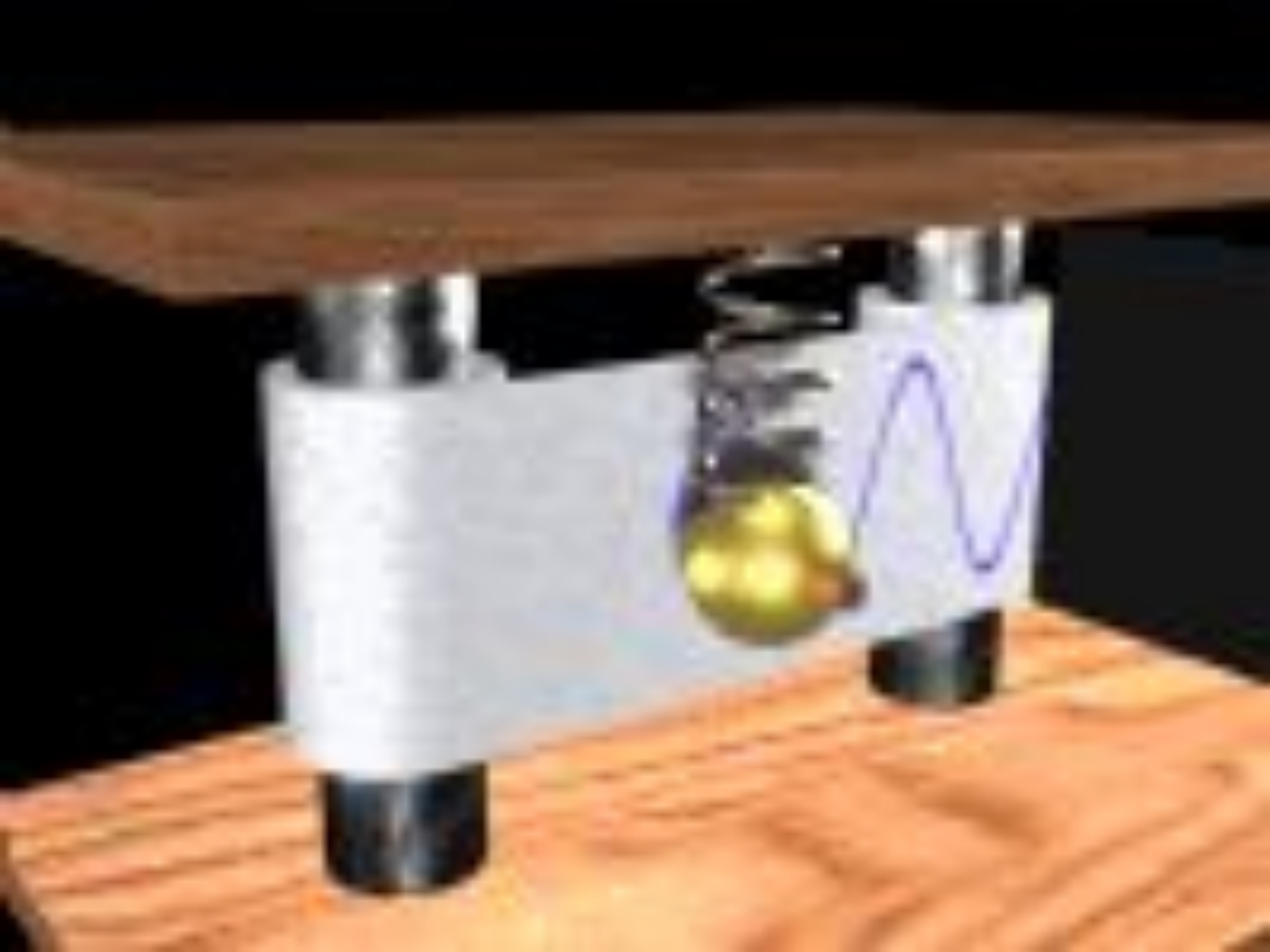
Выполнила: ученица 11 “Б” класса
Приказчикова Мария

I.Физика как наука. Универсальные процессы и явления

Леонид Исаакович Мандельштам
(1879 – 1944)



Джон Уильям Рэлей
(1842 – 1919)



II. Колебания

Колебаниями, или колебательными движениями, называют движения или изменения состояния, точно или приблизительно повторяющиеся во времени.

Минимальный промежуток времени ***T***, через который движение тела полностью повторяется, называется ***периодом колебаний***

Частота колебаний – число колебаний, совершаемых телом за 1 секунду.

$$\nu = \frac{N}{t}, \ (\text{Гц})$$

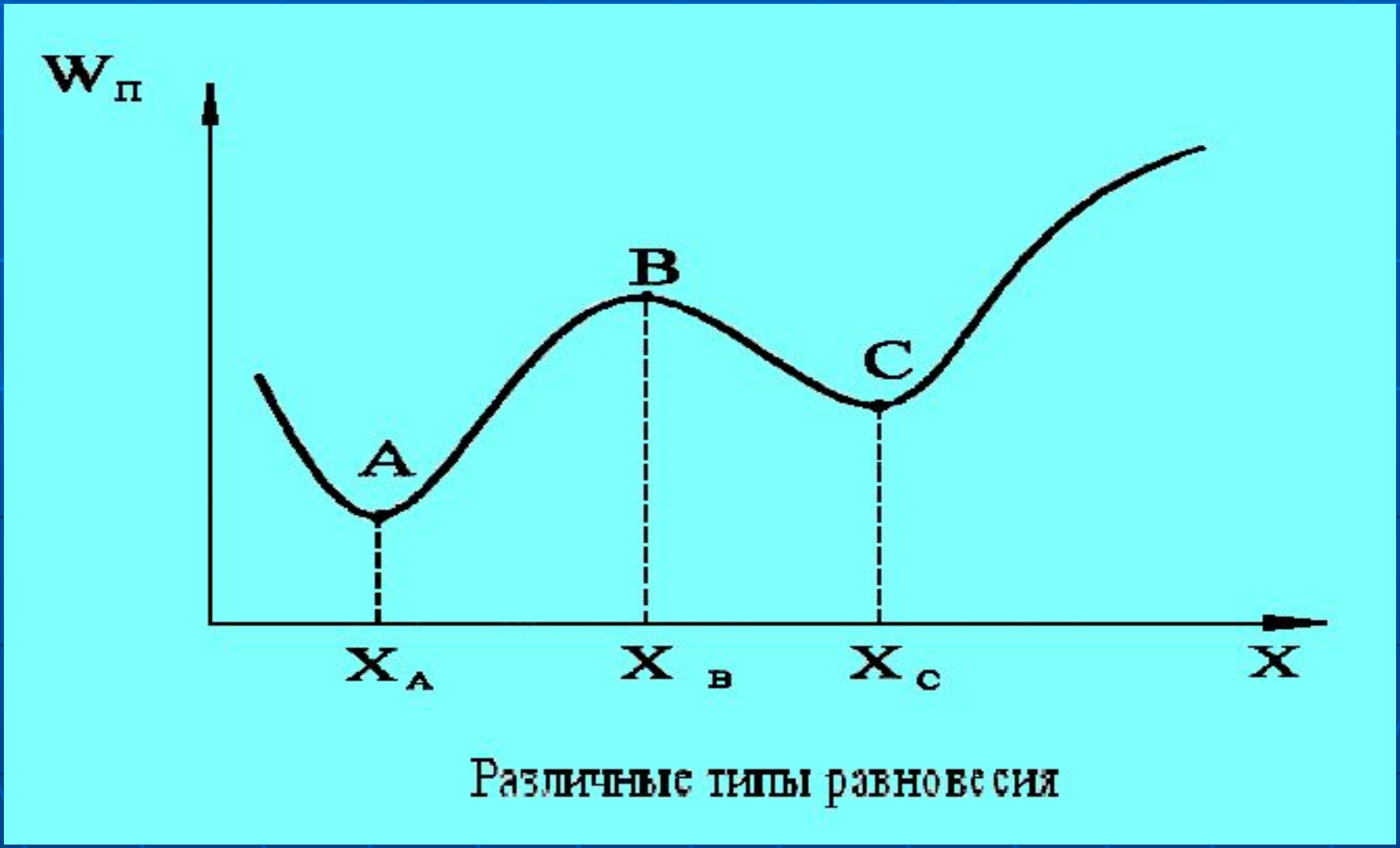
Циклическая частота колебаний ω – это число полных колебаний, происходящих за 2π секунд. Единица циклической частоты – радиан в секунду (рад/с).

Циклическая частота ω связана с частотой υ и периодом колебаний T соотношениями:

$$\omega = 2\pi\upsilon = \frac{2\pi}{T}$$

Свободные колебания

Положение, в котором векторная сумма сил, действующих на тело, равна нулю, называется ***положением равновесия.***



Свободными (или собственными) колебаниями называют колебания, возникающие в системе под действием внутренних сил, после того как система была выведена из положения равновесия

Условия возникновения свободных механических колебаний :

1. При выведении тела из положения равновесия в системе должна возникнуть сила, стремящаяся возвратить тело в положение равновесия, и, следовательно, равнодействующая всех сил должна быть отлична от нуля и направлена к положению равновесия.
2. Силы трения в системе должны быть достаточно малы. (При большом трении в системе колебания могут вообще не возникнуть или быстро затухнуть.)

Гармонические колебания

Периодические изменения физической величины в зависимости от времени, происходящие по закону косинуса или синуса, называются **гармоническими колебаниями**

Уравнение гармонического колебания:

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ или $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$,

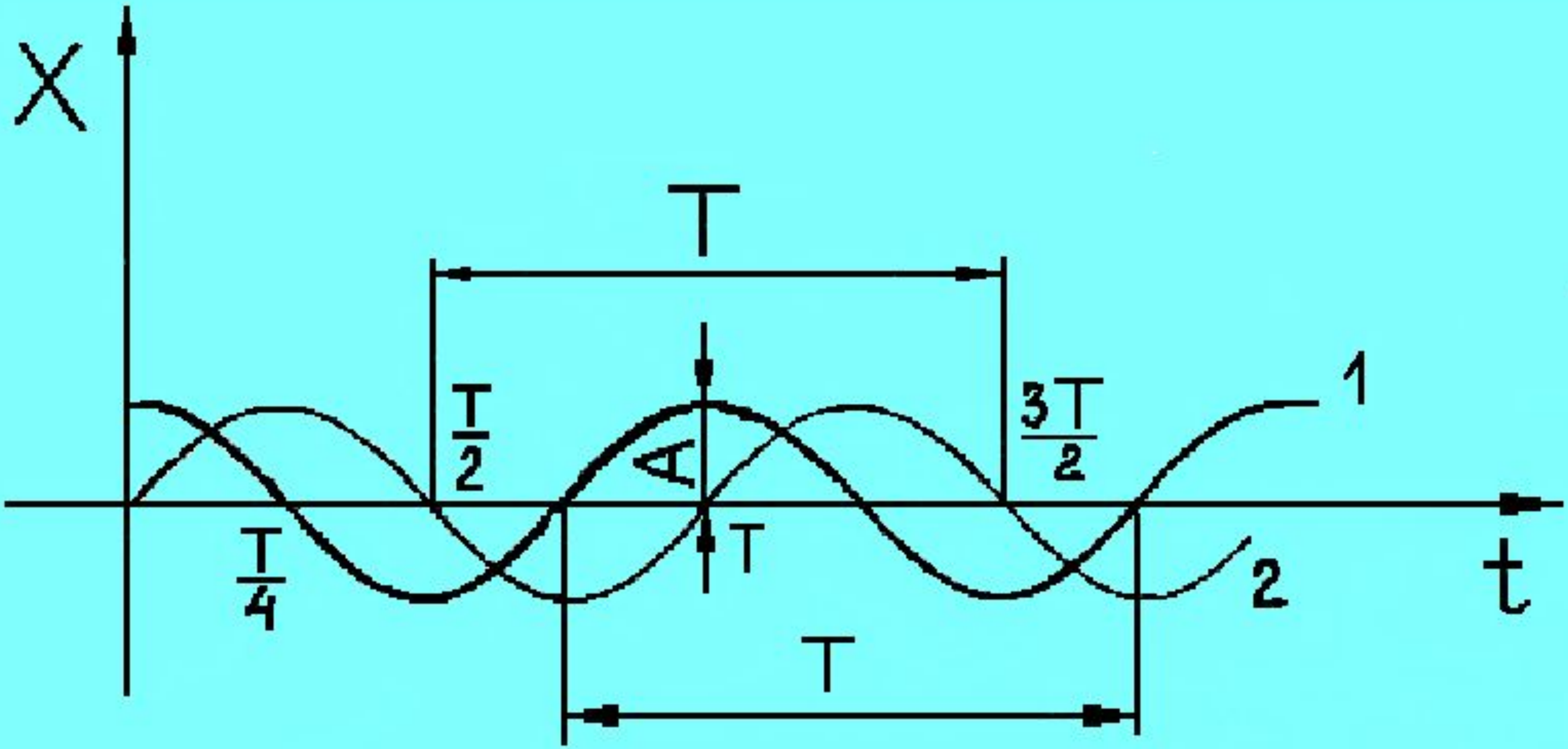
где x – смещение тела от положения равновесия в данный момент времени;

A – амплитуда колебаний;

$\omega t + \varphi_0 = \varphi$ – фаза колебаний;

φ_0 – начальная фаза колебаний;

ω – круговая или циклическая частота



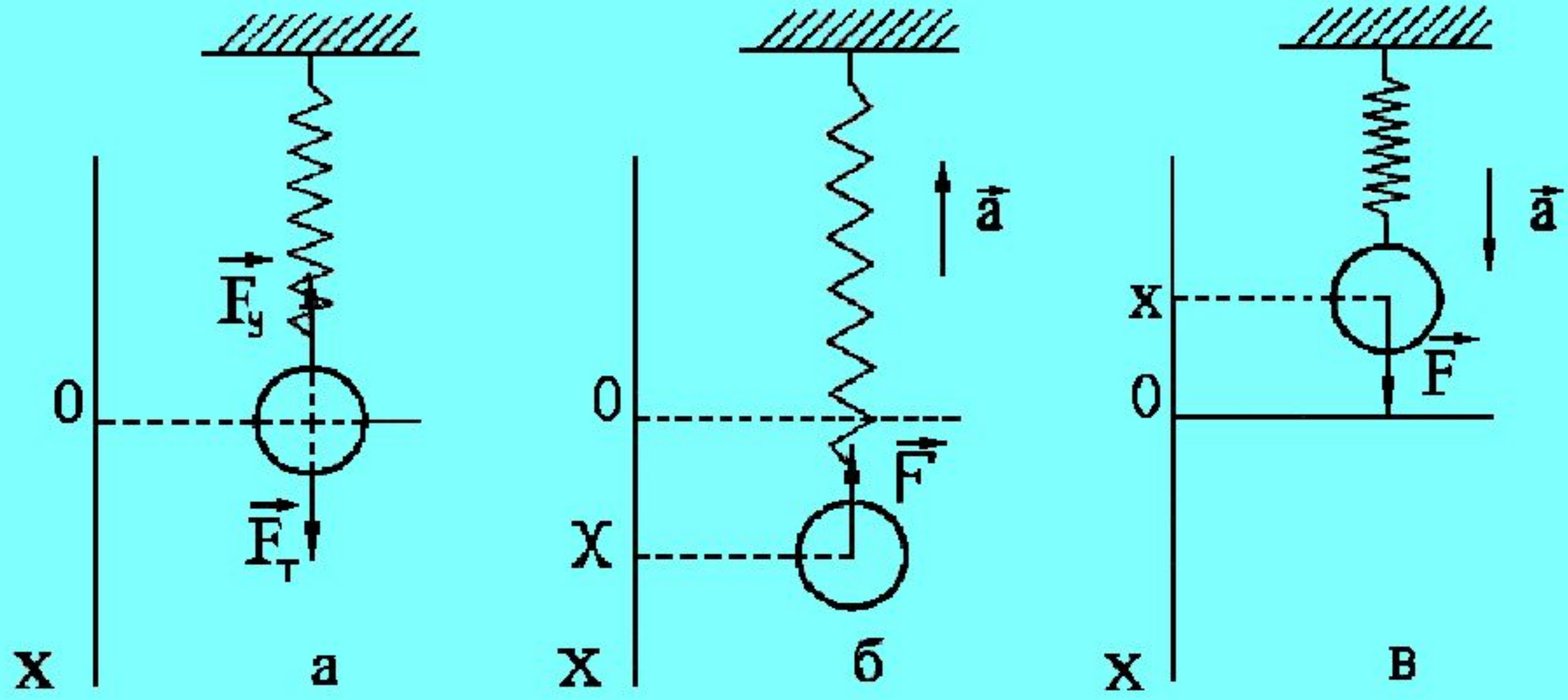
Графики гармонических колебаний:

1 – по закону косинуса; 2 – по закону синуса

Амплитуда колебаний – это наибольшее по модулю смещение колеблющегося тела от положения равновесия.

Величину, стоящую под знаком синуса или косинуса, называют **фазой колебаний**, описываемых этими функциями.

Колебания пружинного маятника



Пружинный маятник:

а – в положении равновесия;

б, в – при движении к положению равновесия

$$W = W_к + W_п = const$$

$$W_п = \frac{к \cdot x^2}{2}$$

$$W_к = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

где m – масса колеблющегося тела;

k – жесткость пружины;

x – абсолютное смещение маятника из положения равновесия;

v – скорость маятника

$$W = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{к \cdot x^2}{2} = const$$

$$\frac{dW}{dt} = m v v' + \kappa x x' = 0$$

$$x' = v; \quad v' = \frac{d^2x}{dt^2}$$

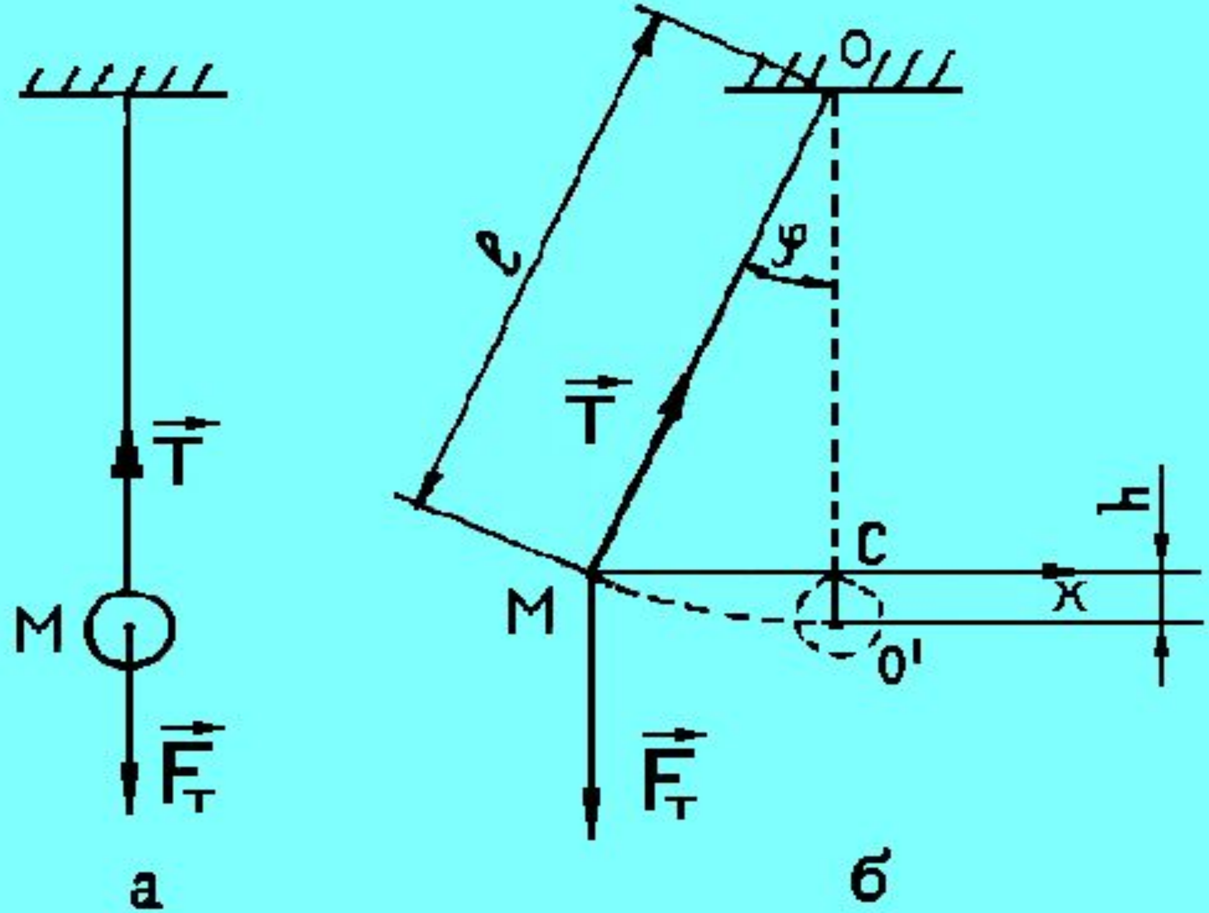
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\kappa}{m} x = 0$$

Уравнение движения пружинного маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ - собственная циклическая частота свободных колебаний

Колебания математического маятника



Математический маятник

а – в положении равновесия;

б – при движении к положению равновесия

Кинетическая энергия маятника равна :

$$W_к = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$\overset{\smile}{O'M} = x = l \cdot \varphi,$

где l – длина маятника

$$v = (x)' = l \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$W_к = \frac{m \cdot l^2}{2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Потенциальная энергия маятника равна :

$$W_п = m \cdot g \cdot h$$

$$h = l \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$W_п = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\varphi \ll 1 \qquad \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$W_п = m \cdot g \cdot l \cdot \frac{\varphi^2}{2}$$

$$W = W_к + W_п = const$$

$$W = \frac{m \cdot l^2}{2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + m \cdot g \cdot l \cdot \frac{\varphi^2}{2} = const$$

$$\frac{dW}{dt} = m \cdot l^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + m \cdot g \cdot l \cdot \varphi \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

Т.к. $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \neq 0$, получаем:

$$m \cdot l^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m \cdot g \cdot l \cdot \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Уравнение движения математического маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ - собственная циклическая частота свободных колебаний

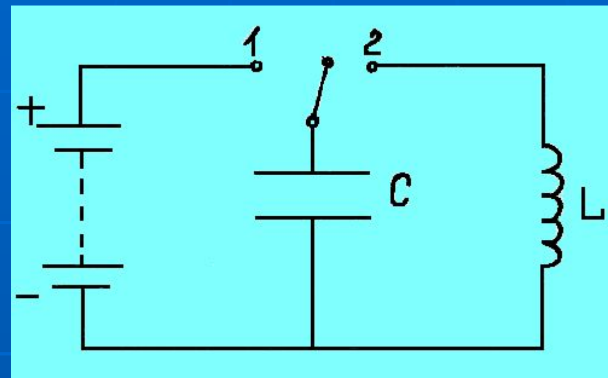
Электромагнитные колебания

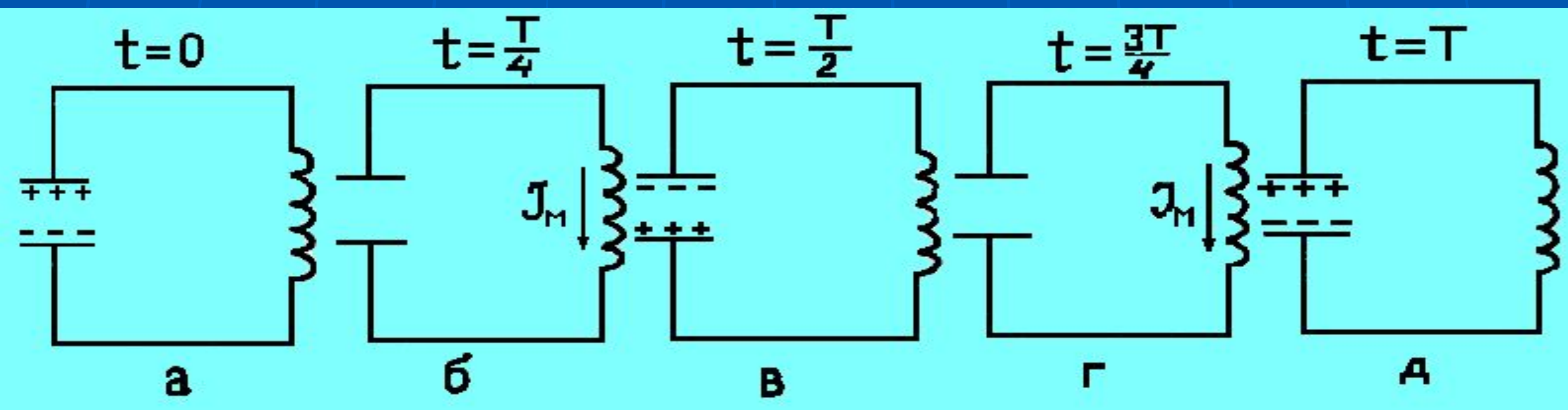
Электромагнитными колебаниями называют состояние электромагнитного поля, при котором электрическое и магнитное поля изменяются во времени по гармоническому закону

Колебательным контуром называется замкнутая электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивности L, конденсатора емкости C и электрического сопротивления R. В простейшем идеализированном случае электрическим сопротивлением пренебрегают ($R \to 0$).

Свободными электромагнитными колебаниями называются периодически повторяющиеся изменения электромагнитных величин (электрического заряда q, силы тока I, разности потенциалов U), происходящие без потребления энергии от внешних источников

Электромагнитные колебания в контуре





а

$$q = q_m$$
$$U = U_m$$
$$I = 0$$
$$W_E = \frac{q_m^2}{2 \cdot C}$$

б

$$q = 0$$
$$U = 0$$
$$I = I_m$$
$$W_M = \frac{L \cdot I_m^2}{2}$$

в

$$q = q_m$$
$$U = U_m$$
$$I = 0$$
$$W_E = \frac{q_m^2}{2 \cdot C}$$

г

$$q = 0$$
$$U = 0$$
$$I = I_m$$
$$W_M = \frac{L \cdot I_m^2}{2}$$

д

$$q = q_m$$
$$U = U_m$$
$$I = 0$$
$$W_E = \frac{q_m^2}{2 \cdot C}$$

Полная энергия колебательной системы:

$$W = W_E + W_M = const$$

Энергия электрического поля:

$$W_E = \frac{q^2}{2 \cdot C},$$

где q – заряд конденсатора;

C – емкость конденсатора

Энергия магнитного поля:

$$W_M = \frac{L \cdot i^2}{2},$$

где L – индуктивность катушки;

i – сила тока

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$W_M = \frac{L \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right)^2}{2}$$

$$W = \frac{q^2}{2 \cdot C} + \frac{L \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right)^2}{2} = \mathrm{const}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{C} \cdot q \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right) + L \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) = 0$$

Т.к. $\frac{dq}{dt} \neq 0$, **получаем:**

$$\frac{1}{C} \cdot q + L \cdot \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) = 0 \quad \textbf{или} \quad \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot q = 0$$

Уравнение свободных электромагнитных колебаний:

$$\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + \omega_o{}^2\, q = 0,$$

где $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ - собственная циклическая частота свободных колебаний

Линейные колебания в популяционной модели «хищник – жертва» - «экологический маятник»

Вито Вольтерра
(1860 – 1940)

Модель «хищник – жертва»

Жертва

$N_1(t)$ - число жертв

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1,$$

где α_1 – постоянный положительный коэффициент прироста

1-ое уравнение - изменение числа жертв:

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2,$$

где β_1 – положительный коэффициент, характеризующий гибель жертв из-за встречи с хищниками.

Хищник

$N_2(t)$ - число хищников

$$\frac{dN_2}{dt} = - \alpha_2 N_1,$$

где α_2 - постоянный положительный коэффициент вымирания

2-ое уравнение - изменение числа хищников:

$$\frac{dN_2}{dt} = - \alpha_2 N_2 + \beta_2 N_1 N_2,$$

где β_2 – положительный коэффициент, характеризующий размножение хищников

При равновесном состоянии системы, т.е при $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$,

численность видов имеет равновесные значения:

$$N_2^0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \qquad N_1^0 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

$$N_1 = N_1^0 + n_1(t) \quad \text{и} \quad N_2 = N_2^0 + n_2(t),$$

причём $n_1 \ll N_1^0$ и $n_2 \ll N_2^0$

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dn_1}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dN_2}{dt} = \frac{dn_2}{dt}$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\beta_2} n_2 \qquad \frac{dn_2}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\beta_1} n_1$$

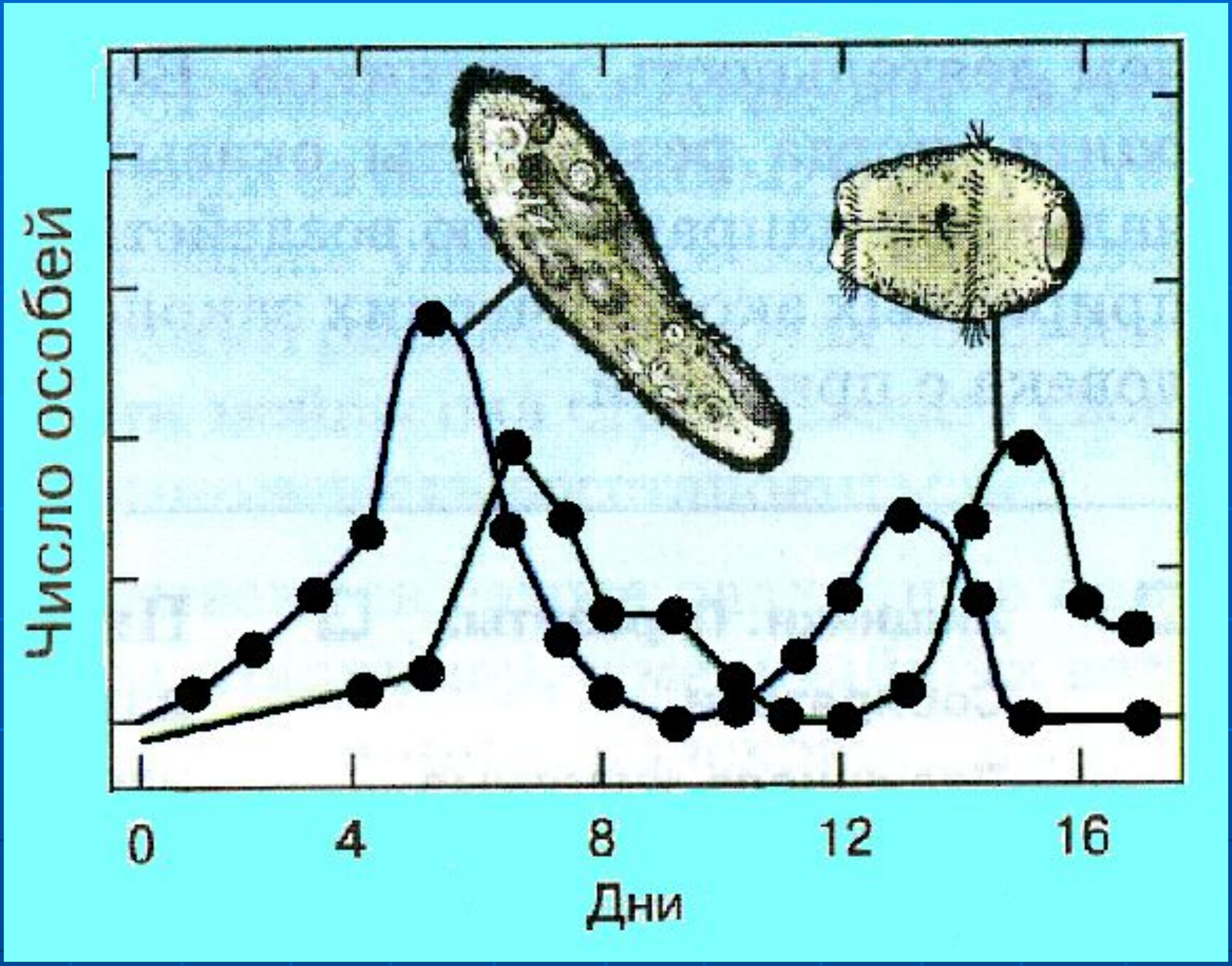
$$\frac{d^2 n_1}{dt^2} = -\frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\beta_2}\frac{dn_2}{dt} = -\frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\beta_1}\frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\beta_2} n_1 = -\alpha_1\ \alpha_2\ n_1$$

$$\frac{d^2 n_2}{dt^2} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\beta_1}\frac{dn_1}{dt} = -\frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\beta_2}\frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\beta_1} n_2 = -\alpha_1\ \alpha_2\ n_2$$

$$\frac{d^2 n_1}{dt^2} + \alpha_1\ \alpha_2\ n_1 = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2 n_1}{dt^2} + \omega_0^2\ n_1 = 0$$

$$\frac{d^2 n_2}{dt^2} + \alpha_1\ \alpha_2\ n_2 = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2 n_2}{dt^2} + \omega_0^2\ n_2 = 0$$

Таким образом, численность хищников и жертв в модели «экологического маятника» изменяется колебательным образом с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$



Ход численности инфузории-туфельки и хищной инфузории

Основное уравнение теории малых колебаний

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0{}^2\,\xi = 0,$$

где ξ – обобщенная координата рассматриваемого нами процесса;

ω_0 – циклическая частота, зависящая от параметров рассматриваемого процесса

Решение уравнения

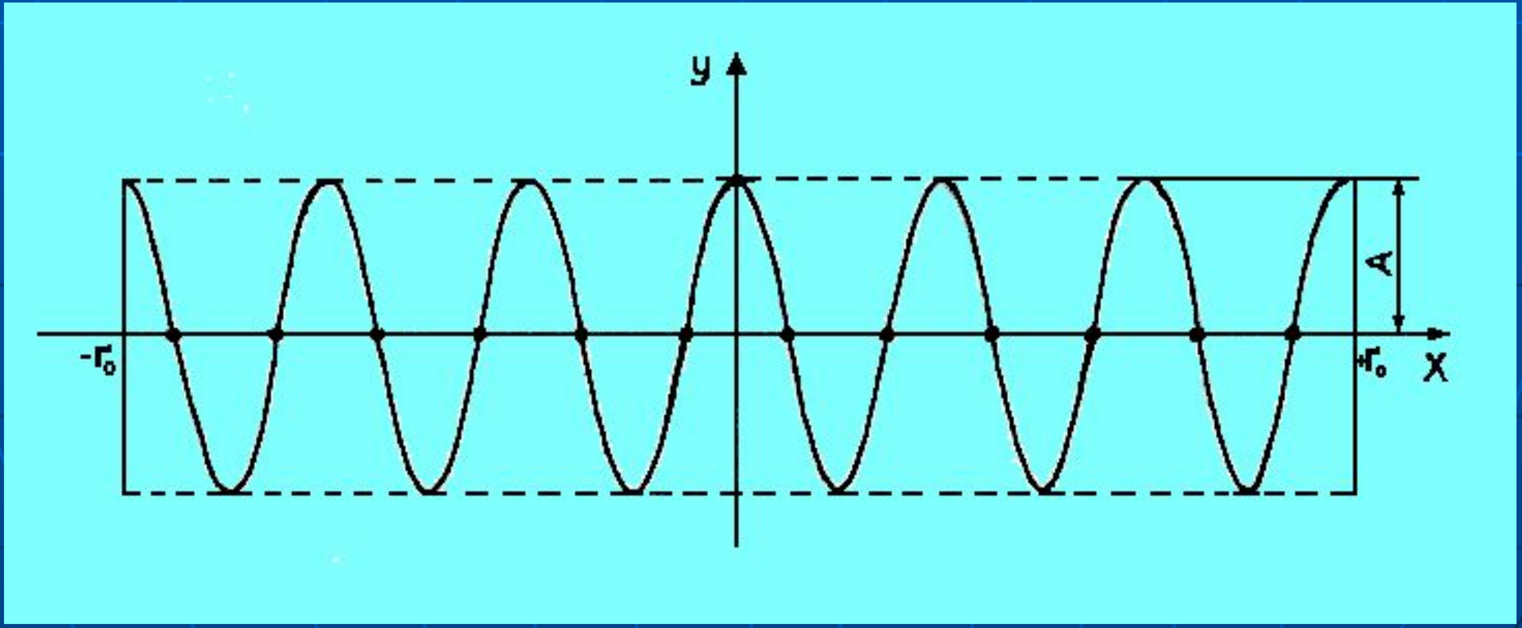
$$\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad \xi(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Квантовый осциллятор

Уравнение стоячей волны:

$$y(x,t) = 2\,A\,\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\,\cos\omega_0 t$$

График уравнения стоячей волны:



$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}x = 0 \quad \text{или} \quad x_n = \pm\frac{\lambda}{2}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

где n – 0, 1, 2… номера узлов в интервале $2r_0$

Число узлов на всем интервале:

$$2r_0 = \pm\frac{\lambda}{2}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Длина волны подчиняется условию де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

где h – постоянная Планка;

m – масса атома;

v – скорость волны

Скорость волны равна:

$$v = \frac{h}{4mr_0}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Полная энергия колебания равна:

$$W = W_к + W_п = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot r_0}{2}$$

$$W = \frac{h^2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{32 \cdot r_0^2 \cdot m} + \frac{k \cdot r_0^2}{2}$$

Устойчивое состояние соответствует условию:

$$\frac{dW}{dr_0} = 0$$

$$\left(r_0^2\right)_{min} = \frac{h \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}{4 \cdot \sqrt{m \cdot k}}$$

Минимальное значение энергии равно:

$$W_n = \frac{1}{4} \cdot h \cdot \omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \hbar\, \omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

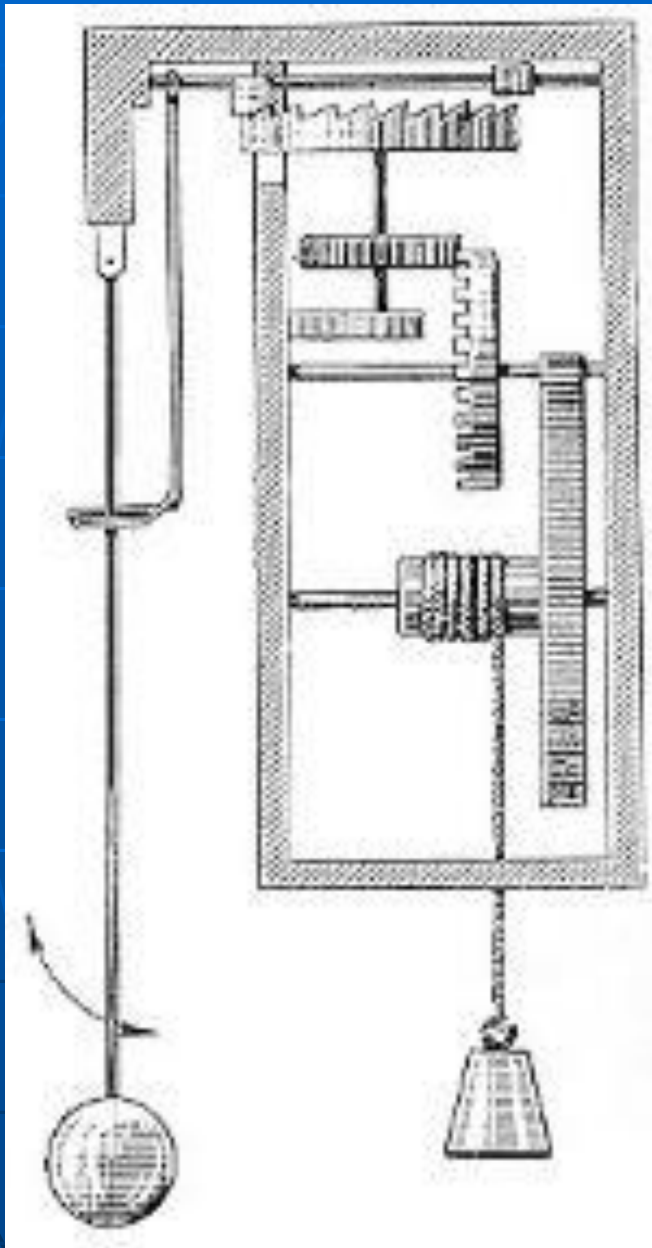
где $\omega_0^{\,2} = \frac{k}{m}$ - собственная частота колебаний атома, т.е. атом колеблется «порождая» квазичастицы с энергией $\hbar\,\omega_0$ ($\hbar = \frac{h}{2 \cdot \pi}$).

Невозбужденный атом (n=0), колеблется с минимальной энергией:

$$W_{min} = \frac{\pi}{2} \cdot \hbar\, \omega_0$$

III. Применение колебаний

Христиан Гюйгенс (1629 – 1695)




24
23
22
21


N
S