

Институт космических исследований РАН

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ И  
ВРЕМЕНИ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО СУЩЕСТВОВАНИЯ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОРБИТ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ  
ГРАВИТАЦИОННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ СО СТОРОНЫ  
ВНЕШНИХ ТЕЛ

*В.И. Прохоренко*

[vprokhor@iki.rssi.ru](mailto:vprokhor@iki.rssi.ru)

Ноябрь 2001



# СОДЕРЖАНИЕ

- Интегралы для спутникового варианта пространственной ограниченной круговой задачи трех тел
- Геометрическое исследование интегралов  $c_1, c_2$
- Учет конечного размера центрального тела
- Отображение начальных условий в область значений констант  $c_1, c_2$
- Примеры выбора орбит с учетом проблемы соударения с центральным телом
- Анализ периода эволюции и времени баллистического существования
- Примеры выбора орбит с учетом времени баллистического существования
- Сопоставление численных и аналитических расчетов времени баллистического существования на примере орбиты Хвостового зонда проекта ИНТЕРБОЛ

# Интегралы для спутникового варианта пространственной ограниченной круговой задачи трех тел , полученные М.Л. Лидовым в 1961

- $c_0 = a;$  (1)

- $c_1 = \varepsilon \cos^2 i;$  (2)

- $c_2 = (1 - \varepsilon) (2/5 - \sin^2 \omega \sin^2 i)$  (3)

$a$  - большая полуось орбиты ИСЗ;  $\varepsilon = 1 - e^2$ ;  $e$  - эксцентриситет;  
 $i$  - наклонение орбиты ИСЗ к плоскости орбиты возмущающего тела;  
 $\omega$  - аргумент перицентра, измеренный от линии узлов на плоскости орбиты возмущающего тела.

- $c_0 = a_0; c_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0; c_2 = (1 - \varepsilon_0) (2/5 - \sin^2 \omega_0 \sin^2 i_0)$  (4)

# Сферическая система координат

- Начало совпадает с притягивающим центром  $S$
- радиус – с параметром  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ );
- ко-широта – с наклоном  $i$  ( $0 \leq i \leq 180^\circ$ );
- долгота – с аргументом перицентра  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq 360^\circ$ ).

## Соответствующая прямоугольная система координат

- Плоскость  $OXZ$  параллельна плоскости орбиты возмущающего тела  $J$ ;
- Экваториальная плоскость  $OXY$  перпендикулярна к плоскости орбиты возмущающего тела;
- Ось  $OY$  направлена по нормали к плоскости орбиты возмущающего тела.

Геометрическое  
исследование  
интегралов  $c_1, c_2$

## Сечения поверхностей $= \text{const}$

диаметральными плоскостями:

$\omega = 0^\circ, 180^\circ$  (а)

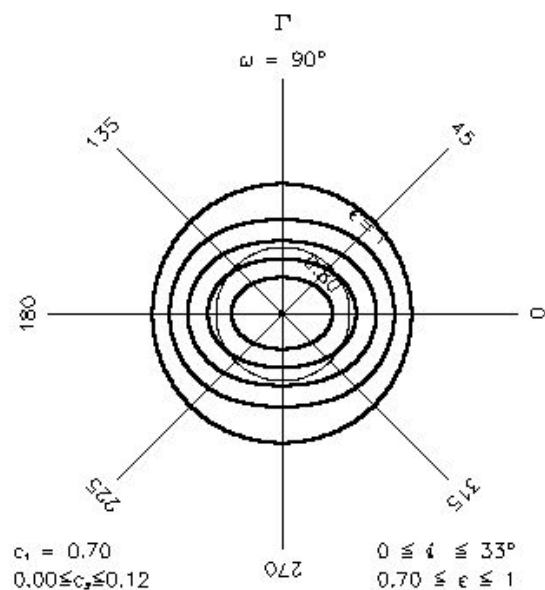
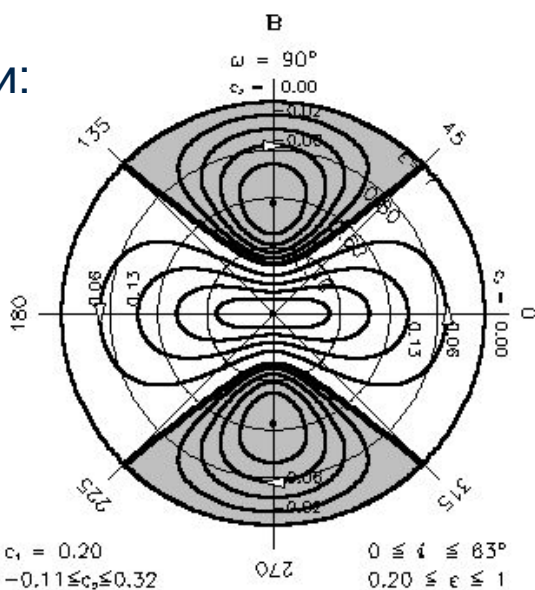
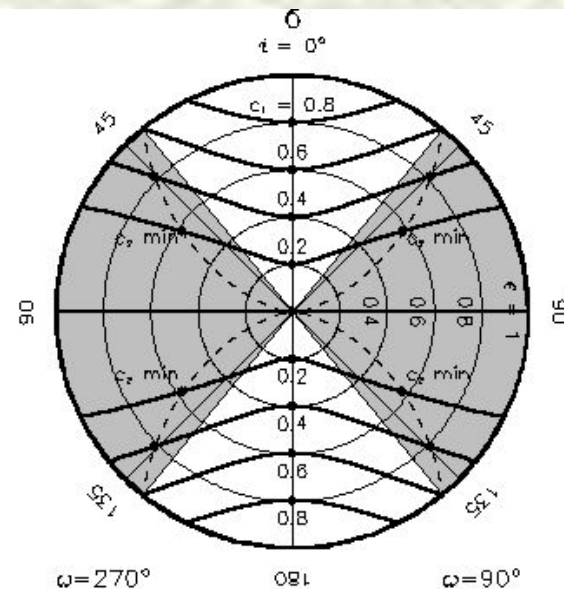
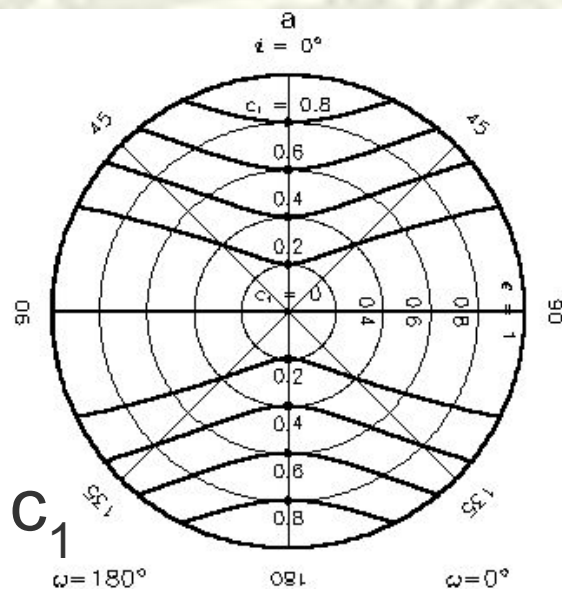
$\omega = 90^\circ, 270^\circ$  (б)

## Линии $c_2 = \text{const}$

на поверхностях:

$c_1 = 0.2$  (в)

$c_1 = 0.7$  (г)



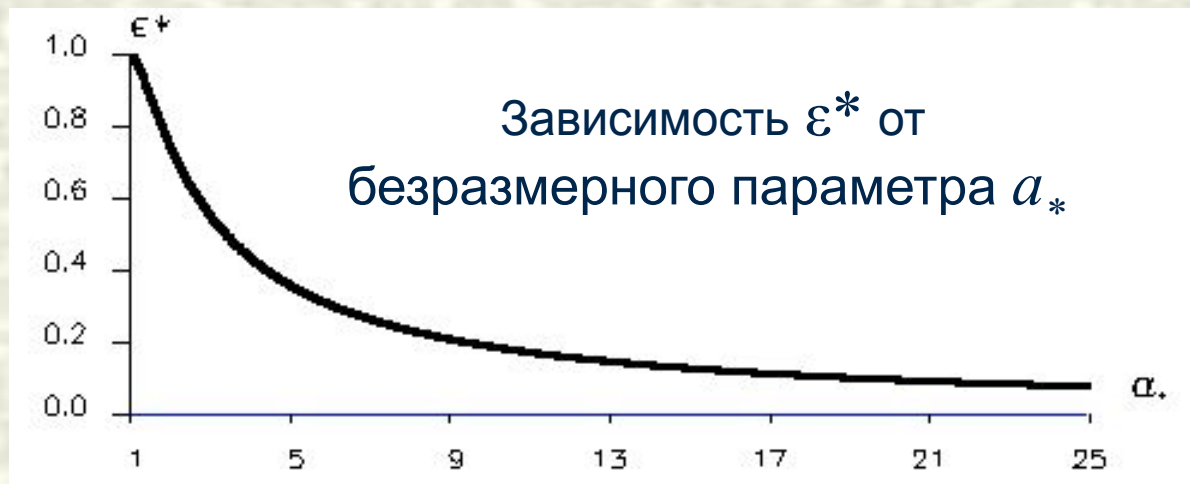
# Учет конечного размера центрального тела

- Формула М.Л. Лидова для вычисления значения  $\varepsilon^*$ , соответствующего соударению с центральным телом радиуса  $R$  орбиты с большой полуось  $a$ :

$$R_p = R; \quad e = 1 - R/a; \quad \varepsilon^* = 1 - (1 - R/a)^2 \quad (5)$$

- Введем безразмерный параметр  $a_* = a / R$ , тогда

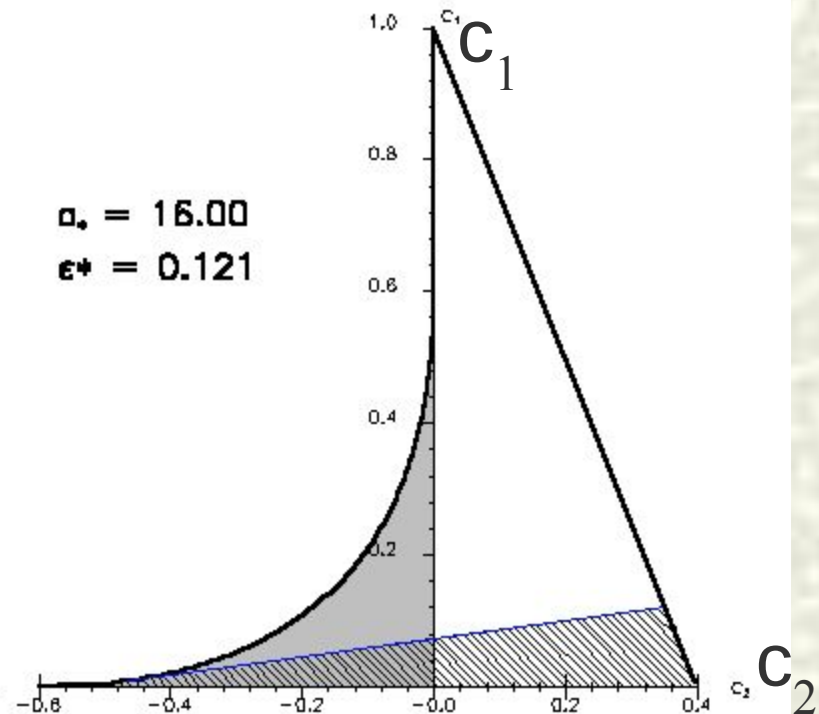
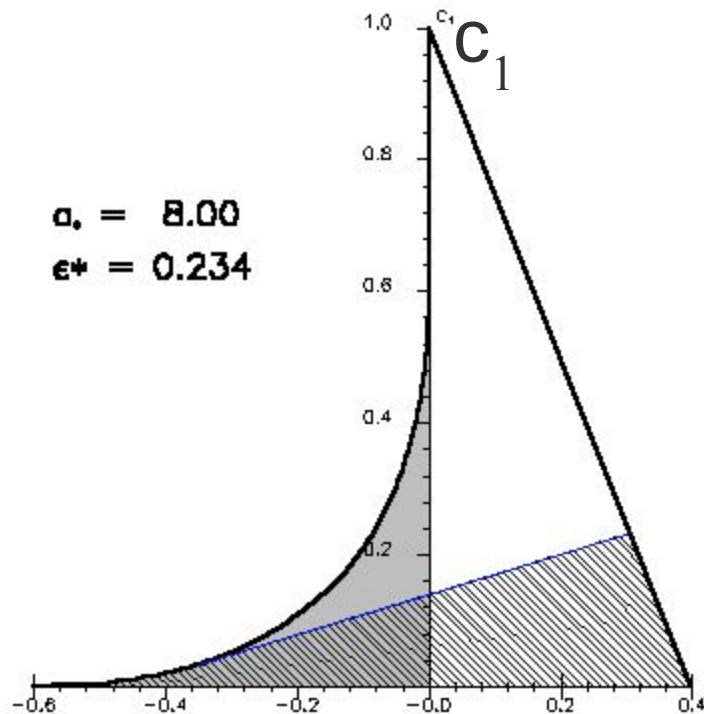
$$\varepsilon^* = (2a_* - 1)/a_*^2 \quad (6)$$



Косой штриховкой показаны области значений  $c_1$ ,  $c_2$ , соответствующие орбитам с конечным временем баллистического существования

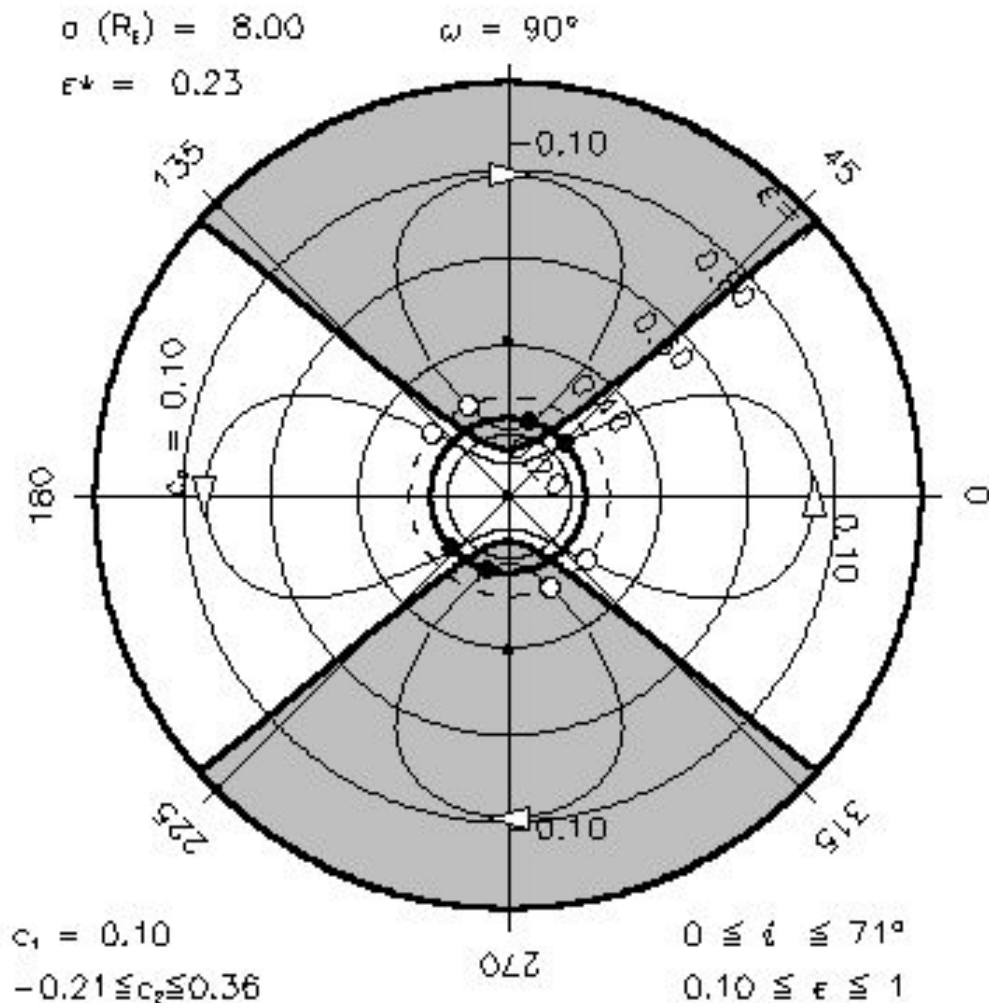
• при  $a_* = 8$

• при  $a_* = 16$



$$c_1 < c_2 \frac{\epsilon^*}{1 - \epsilon^*} + 3/5 \text{ — неравенство Ю.Ф. Гордеевой, 1968}$$

# Эволюция орбит с конечным временем баллистического существования



- $a_* = 8$
- $c_1 = 0.1, c_2 = 0.1$
- $c_1 = 0.1, c_2 = -0.1$
- Пересечения поверхности  $c_1 = 0.1$  со сферами радиуса  $\epsilon^*$  и  $\epsilon_0$  показано соответственно утолщенной и пунктирной линиями.
- Точки старта показаны светлыми символами
- точки падения – темными

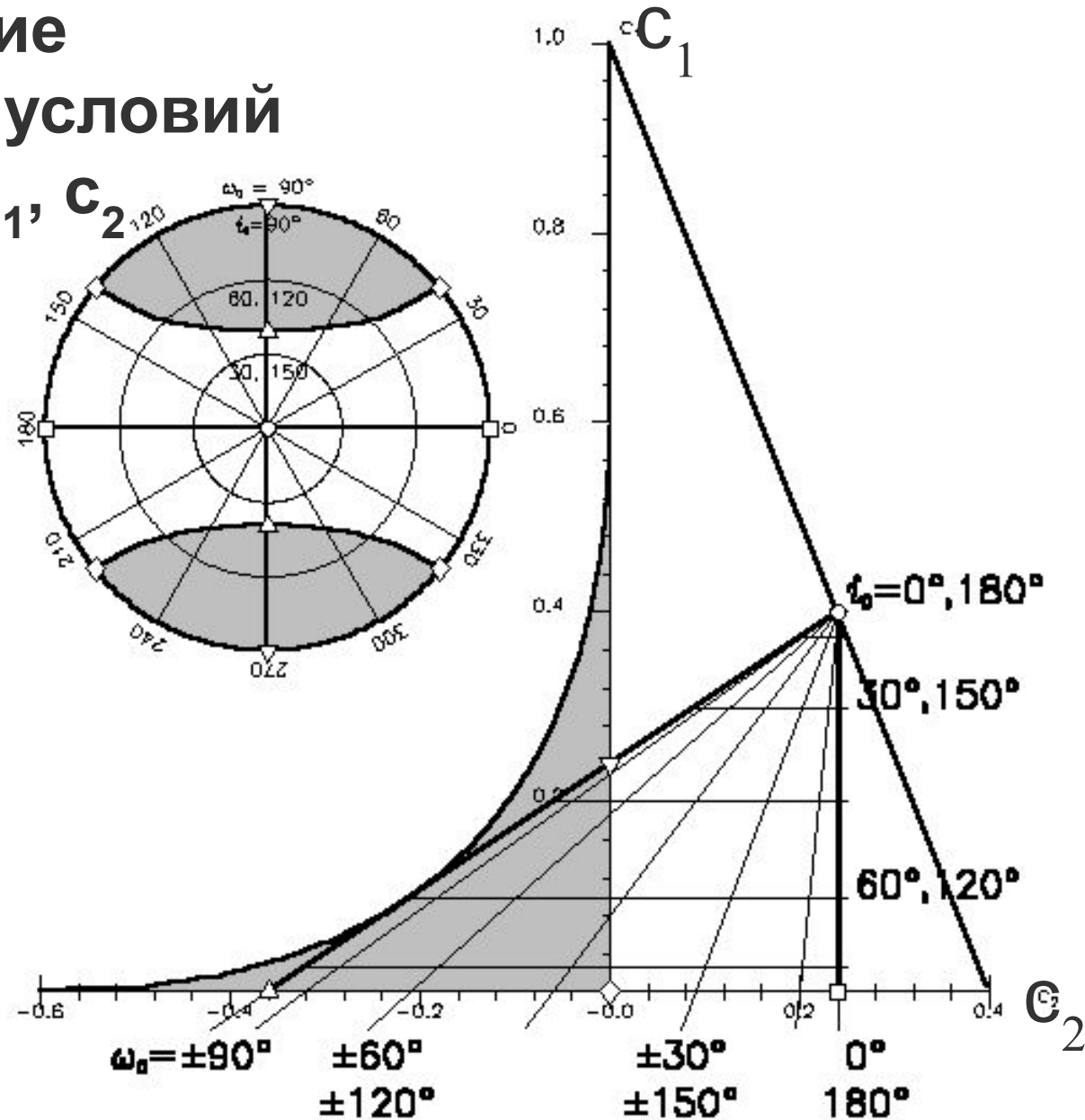


# Отображение начальных условий в область $C_1, C_2$

Отображение  
**координатной  
сетки  $\omega_0, i_0$**   
сферической  
поверхности  
 $\epsilon_0 = 0.4$

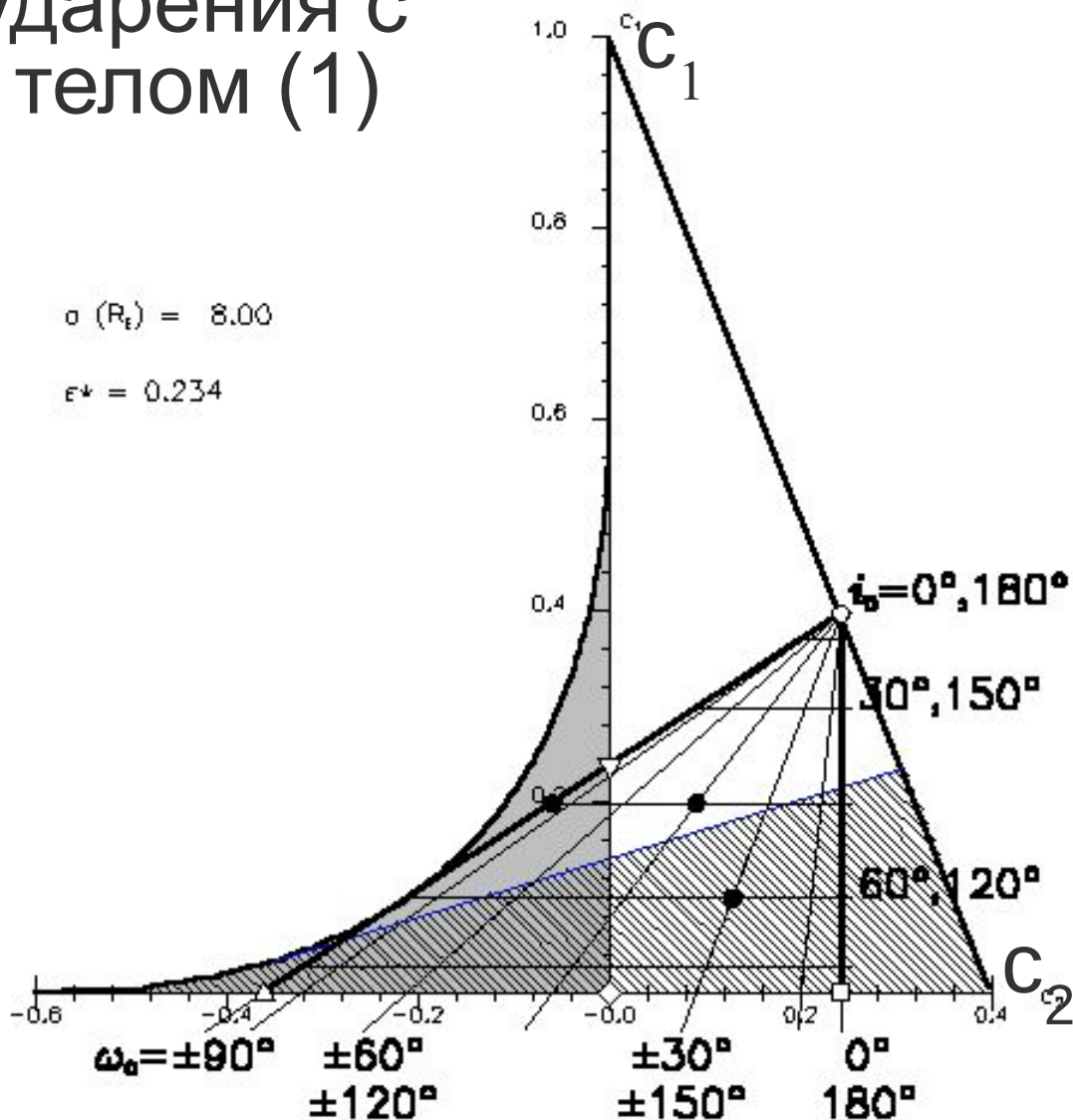
в ограниченную  
треугольником  
**косоугольную  
сетку**

в области  $C_1, C_2$



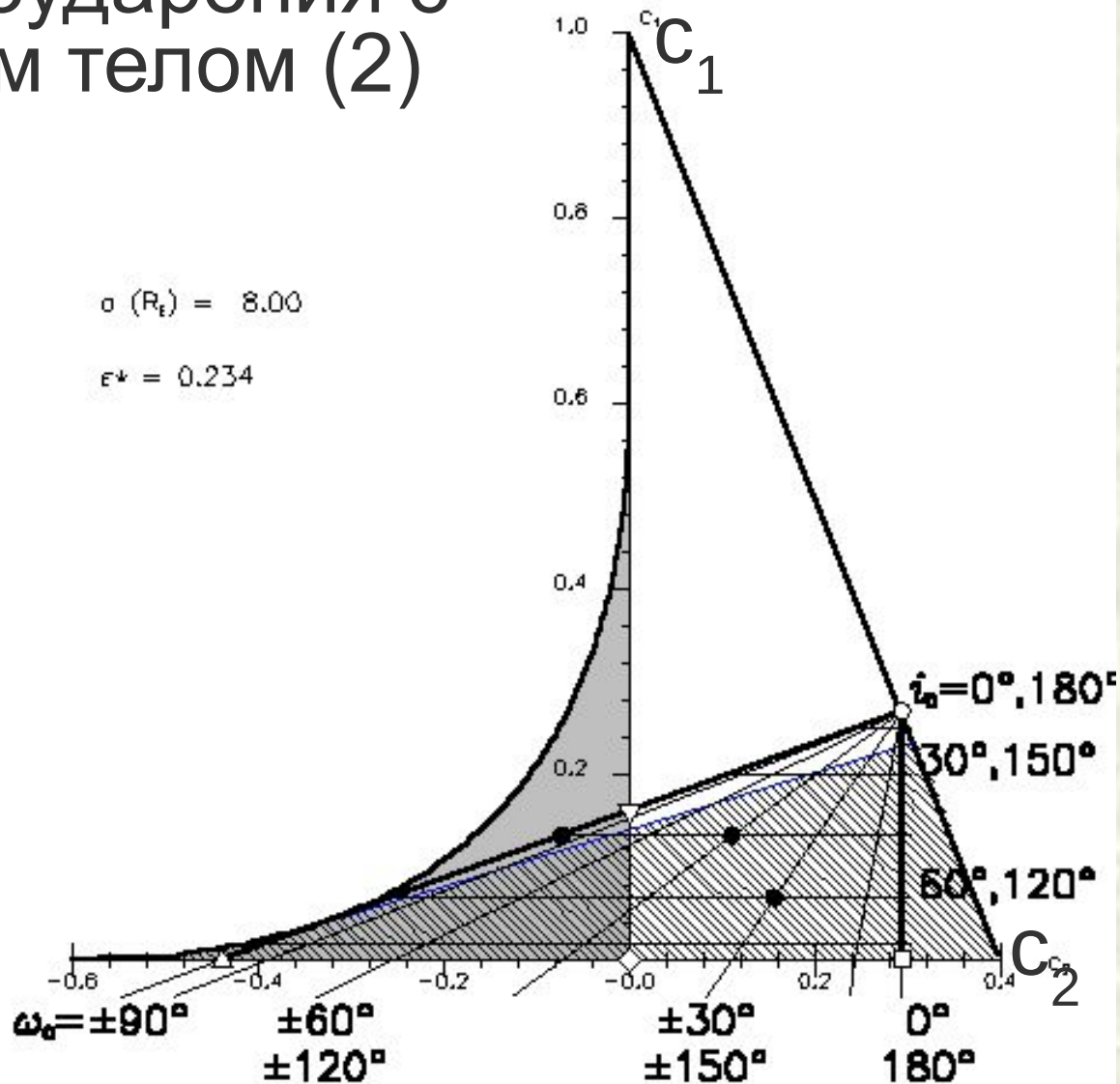
# К выбору орбит с учетом проблемы соударения с центральным телом (1)

- $a = 8 R_E$ ,  
 $= 5000 \text{ км}$ ,  
 $0.777, \varepsilon_0 = 0.4$
- $i_0 = 45^\circ, \omega_0 = -90^\circ$
- $i_0 = 45^\circ, \omega_0 = -45^\circ$
- $i_0 = 60^\circ, \omega_0 = -30^\circ$
- Штриховкой отмечена область значений  $c_1, c_2$ , которым соответствуют орбиты с конечным временем баллистического существования



# К выбору орбит с учетом проблемы соударения с центральным телом (2)

- $a = 8 R_E$ ,  
 $h_{p0} = 1000$  км,  
 $e_0 = 0.855$ ,  $\varepsilon_0 = 0.27$
- $i_0 = 45^\circ$ ,  $\omega_0 = -90^\circ$
- $i_0 = 45^\circ$ ,  $\omega_0 = -45^\circ$
- $i_0 = 60^\circ$ ,  $\omega_0 = -30^\circ$
- Штриховкой отмечена область значений  $c_1$ ,  $c_2$ , которым соответствуют орбиты с конечным временем баллистического существования



# Период эволюции и время баллистического существования

Для вычисления времени баллистического существования орбит, эволюция которых заканчивается соударением с центральным телом, также как и для вычисления периода эволюции, в дополнение к интегралам (1), (2), (3), будем пользоваться полученной М.Л Лидовым квадратурой:

$$N - N_0 = - \frac{1}{A} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^{(7)} \varepsilon^{1/2} \sin^2 i \sin 2\omega},$$

$$A = \frac{15\pi}{2} \frac{M_k}{M} \left(\frac{a}{a_k}\right)^3 \varepsilon_k^{-3/2}, (8)$$

где  $N$  – порядковый номер оборота спутника,  $M$  – масса центрального тела;  $M_k$ ,  $a_k$ ,  $\varepsilon_k$  – соответственно масса, большая полуось и параметр  $\varepsilon$  орбиты возмущающего тела.

# Период эволюции и время баллистического существования

Для вычисления периода используются пределы интегрирования  $\varepsilon_{\min}$ ,  $\varepsilon_{\max}$ , а для вычисления времени баллистического существования -  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon^*$ .

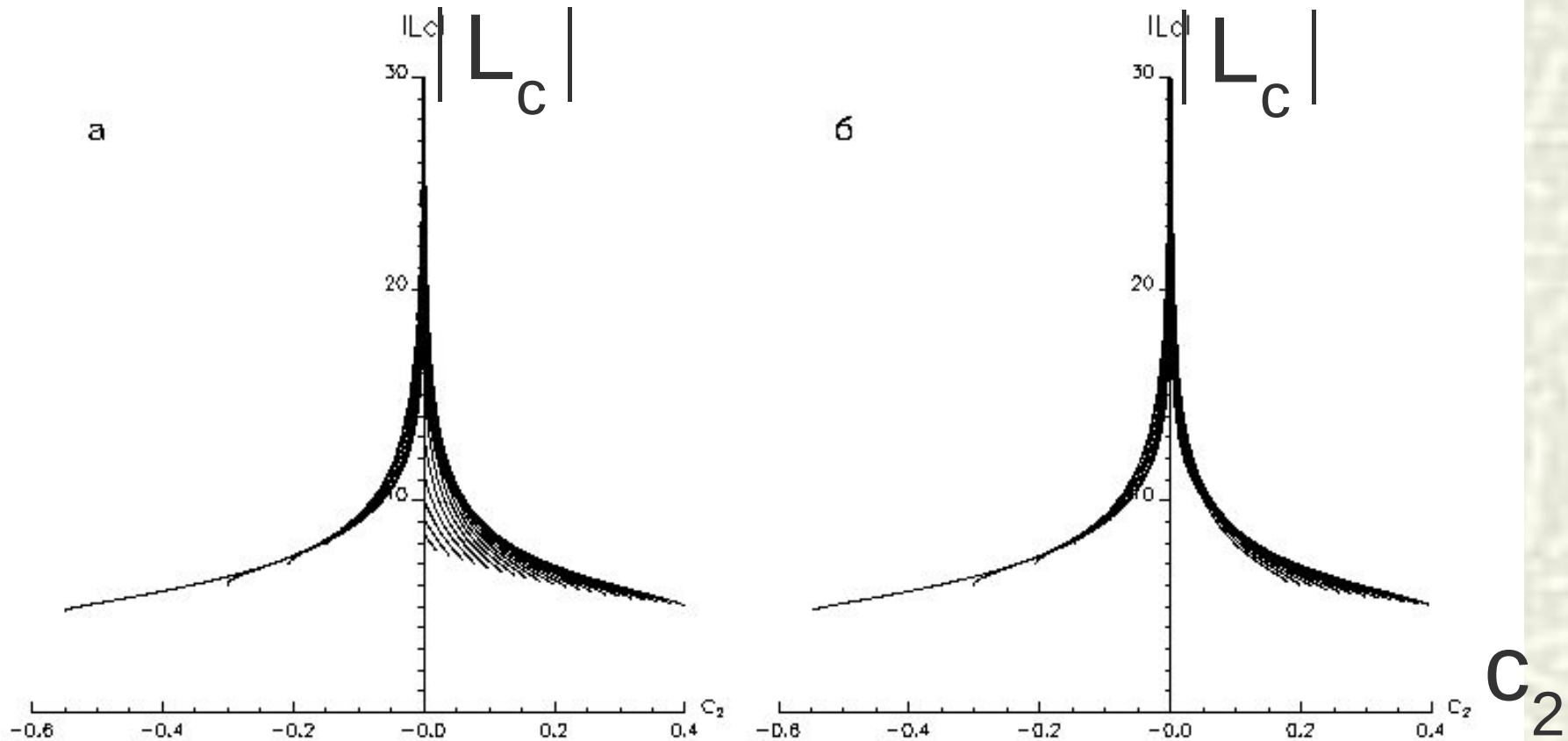
Будем пользоваться полученным в известной работе Ю.Ф. Гордеевой 1968 г выражением этой квадратуры через эллиптический интеграл первого рода.

Обозначим  $|L_c|$  удвоенную квадратуру, вычисленную в пределах  $\varepsilon_{\min}$ ,  $\varepsilon_{\max}$ , и, следуя работе Ю.Ф. Гордеевой, запишем выражение для периода  $T$  эволюции орбитальных элементов  $e, i$ , умножив слева и справа выражение (7) на кеплеров период обращения точки  $P$  по ее орбите:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{|L_c|}{A}. \quad (9)$$

Рассмотрим как выглядит функции  $|L_c|(c_1, c_2)$  в области возможных значений этих параметров.

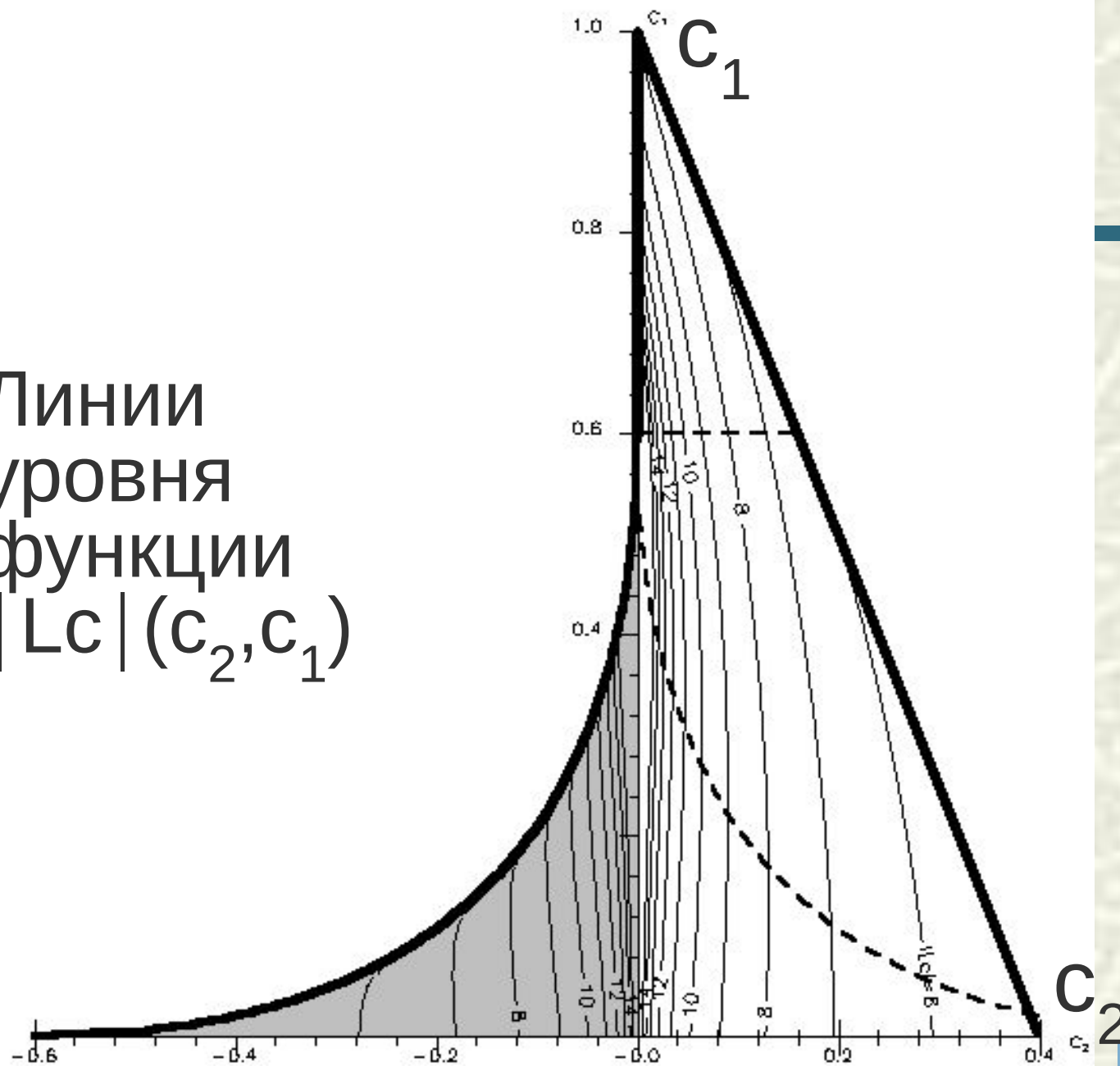
# Сечение поверхности $|L_c|$ ( $c_2, c_1$ ) плоскостями $c_1 = \text{const}$



а)  $0 \leq c_1 < 1$

б)  $0 \leq c_1 < 0.6$

Линии  
уровня  
функции  
 $|Lc|(c_2, c_1)$



# Время баллистического существования

Обозначим  $L_r(c_1, c_2, a, \varepsilon_0, \omega_0)$  неполный эллиптический интеграл первого рода, соответствующий квадратуре (7), вычисленной в пределах  $\varepsilon_0, \varepsilon^*$  (исходя из начального значения  $\omega_0$ ). Аналогично выражению (9) запишем выражение для времени баллистического существования  $T_r$ :

$$T_r = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{L_r}{A} \quad (10)$$

Мажорантой для функции  $L_r(c_1, c_2, a, \varepsilon_0, \omega_0)$  является функция  $L_b(c_1, c_2, a)$ , вычисленная в пределах  $\varepsilon^*, \varepsilon^*$  (исходя из начального значения  $\omega_0$ , принадлежащего II или IV четверти).

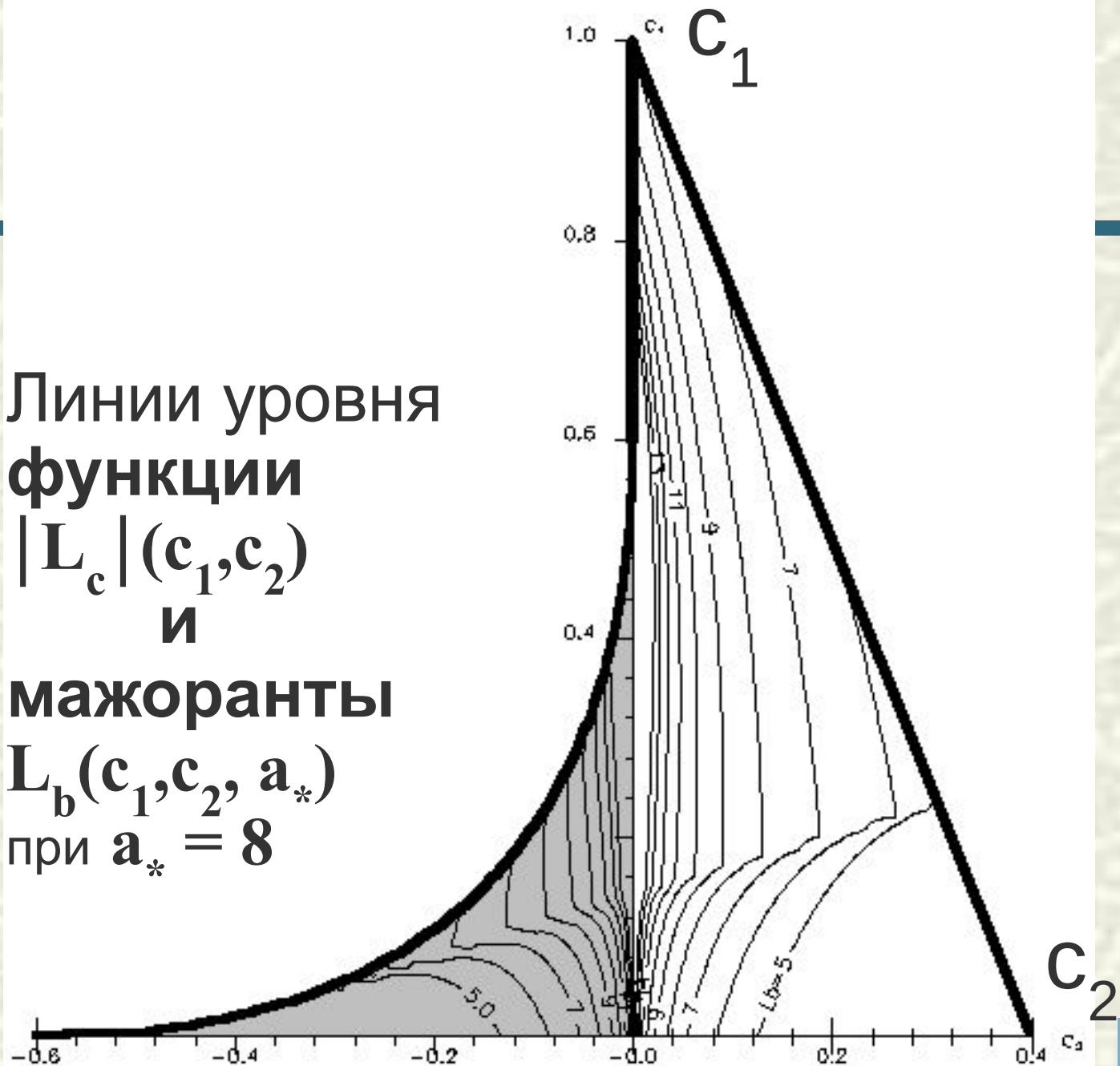
Имеет место следующее очевидное неравенство:

$$L_r(c_1, c_2, a, \varepsilon_0, \omega_0) < L_b(c_1, c_2, a) < |L_c|(c_1, c_2) \quad (11)$$

Рассмотрим как выглядит функция  $L_b(c_1, c_2, a)$  в области возможных значений параметров  $c_1, c_2$  при  $a = 8 R$ .

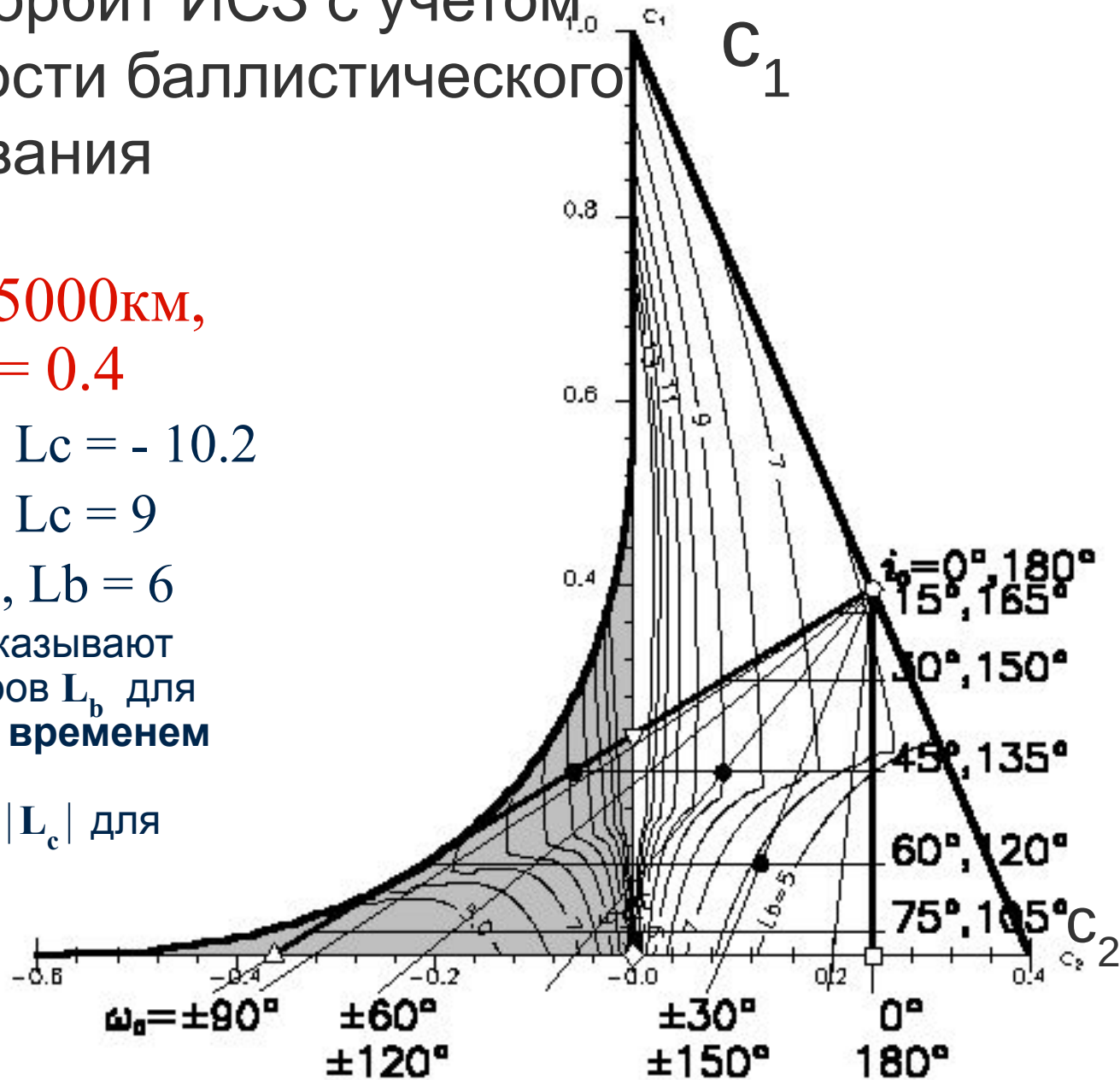


Линии уровня  
функции  
 $|L_c|(c_1, c_2)$   
и  
мажоранты  
 $L_b(c_1, c_2, a_*)$   
при  $a_* = 8$



# К выбору орбит ИСЗ с учетом длительности баллистического существования

- $a = 8 R_E$ ,  $h_{p0} = 5000 \text{ км}$ ,  
 $e_0 = 0.777$ ,  $\varepsilon_0 = 0.4$
- $i_0 = 45^\circ$ ,  $\omega_0 = -90^\circ$ ,  $L_c = -10.2$
- $i_0 = 45^\circ$ ,  $\omega_0 = -45^\circ$ ,  $L_c = 9$
- $i_0 = 60^\circ$ ,  $\omega_0 = -30^\circ$ ,  $L_b = 6$
- **Линии уровня** показывают значения параметров  $L_b$  для орбит с **конечным временем баллистического существования** и  $|L_c|$  для остальных орбит



# Анализ периода эволюции элементов орбиты и времени баллистического существования

- Преобразуем выражение (9) для периода  $T$ , чтобы более выпукло показать роль остальных сомножителей

- $$T = \frac{4}{15} \mu^{1/2} \frac{a_k^3 \varepsilon_k^{3/2}}{\mu_k} |L_c| a^{-3/2} \quad (12)$$

- Введем характерный размер  $l$ , характерное время  $\tau$  и безразмерные переменные:

$$a_* = a/l; \quad T_* = T/\tau; \quad \mu_* = \mu\tau^2/l^3$$

- Введем следующие безразмерные параметры:

- параметр подобия орбит  $L_T = L_c a_*^{-3/2}$  ;

- параметр подобия возмущений  $L_D = \mu_{*k} a_{*k}^{-3} \varepsilon_k^{-3/2} / \mu_*^{1/2}$

# Анализ периода эволюции элементов орбиты и времени баллистического существования

- Запишем выражение безразмерного периода  $T_*$  через  $|L_c|$  и параметр подобия возмущений  $L_D$ :

$$T_* = \frac{4}{15} \frac{|L_c|}{L_D} a_*^{-3/2} \quad (13)$$

- Далее, выразим  $T_*$  через  $|L_c|$  и безразмерный коэффициент  $Q$ :

$$T_* = Q |L_c|, \quad Q = \frac{4}{15} \frac{a_*^{-3/2}}{L_D} \quad (14)$$

# Анализ периода эволюции элементов орбиты и времени баллистического существования

- Введем следующие численные значения характерного размера  $l = R_E = 6371.2$  км и времени  $\tau = 365$  сут
- **В таблице 1** приведены численные значения параметра подобия возмущений  $L_D$  для систем:
  - Земля – Луна – ИСЗ,
  - Земля – Солнце – ИСЗ,
  - Земля – Луна + Солнце – ИСЗ.
- А также численные значения коэффициента  $Q$  для двух значений большой полуоси:
  - $a_* = 8$ ,
  - $a_* = 16$ .

Таблица 1. Численные значения параметра подобия возмущений  $L_D$  и коэффициента  $Q$

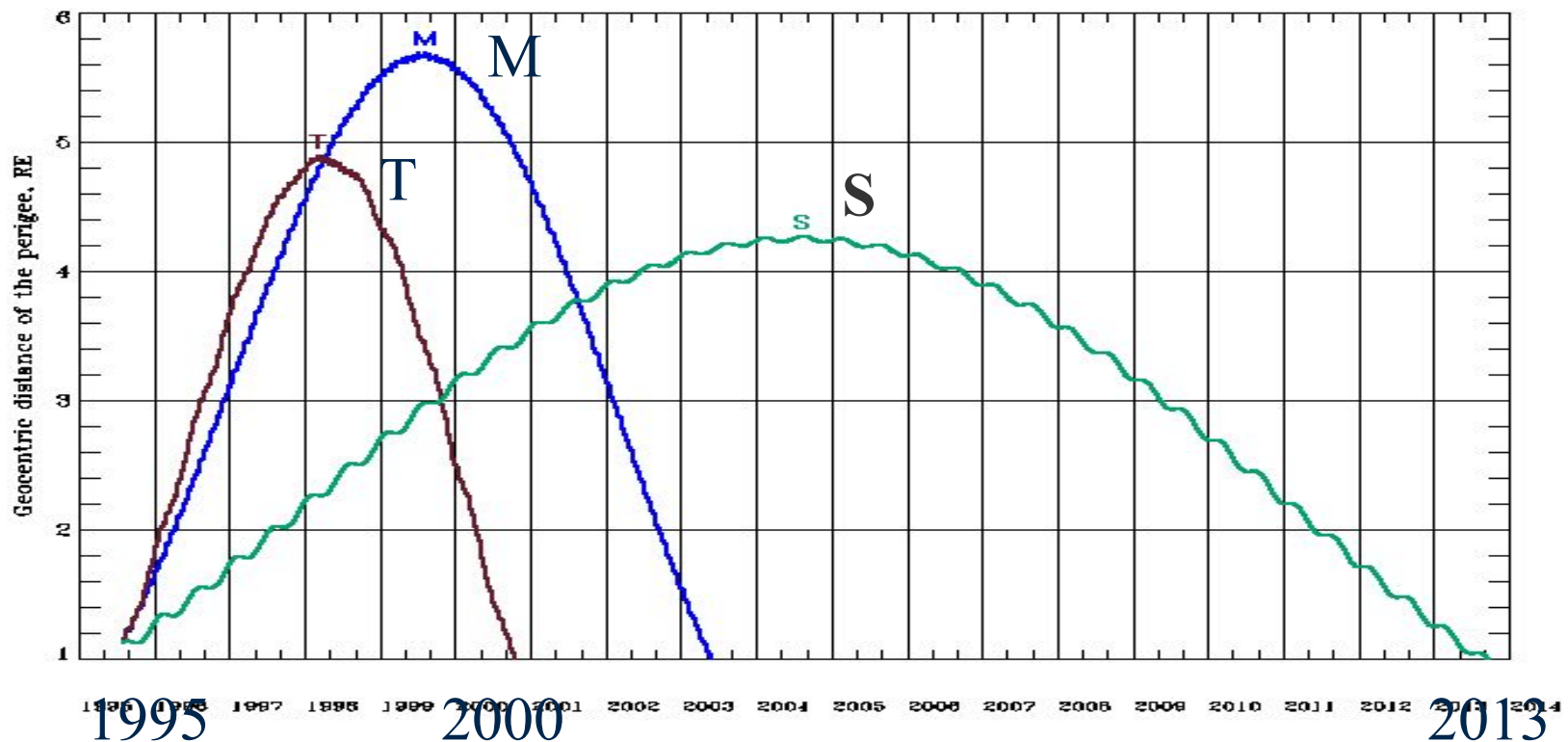
Система тел	Земля - Луна - ИСЗ	Земля - Солнце - ИСЗ	Земля - Луна + Солнце - ИСЗ
$L_D$	0.00219	0.00101	0.00320
$Q$ при $a_* = 8$	5.37490	11.7039	3.48335
$Q$ при $a_* = 16$	1.90031	4.13794	1.30226

# ИНТЕРБОЛ ХВОСТОВОЙ ЗОНД

$$a_* = 16.12, \varepsilon^* = 0.12, L_c = 6.42, L_b = 4.11$$

(03/08/1995 - 16/10/2000)

Эволюция радиуса перигея и время существования, рассчитанные с учетом гравитационных возмущений от Луны (M) и Солнца (S) отдельно и совместно (T)



# ИНТЕРБОЛ ХВОСТОВОЙ ЗОНД

$$a_* = 16.12, \varepsilon^* = 0.12, L_c = 6.42, L_b = 4.11$$

(03/08/1995 - 16/10/2000)

Таблица 2. Значения времени баллистического существования (в годах), рассчитанные численно и аналитически

<b>Метод расчета</b>	<b>С учетом возмущения от Луны</b>	<b>С учетом возмущения от Солнца</b>	<b>С учетом возмущения от Луны и Солнца</b>
<b>Численный</b>	7.60	18.00	5.20
<b>Аналитический</b>	7.72	16.80	5.29



# Список литературы

---

1. *Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. № 8. С. 5
2. *Моисеев Н.Д.* О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек // Труды ГАИШ. 1945. Т. 16. Ч.1 с 100
3. *Гордеева Ю.Ф.* Зависимость элементов от времени в долгопериодических колебаниях в ограниченной задаче трех тел // Космич. Исслед. 1968. Т. 6. № 4. С. 536