Институт космических исследований РАН

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ И ВРЕМЕНИ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОРБИТ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ ГРАВИТАЦИОННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ СО СТОРОНЫ ВНЕШНИХ ТЕЛ

В.И. Прохоренко

vprokhor@iki.rssi.ru

Ноябрь 2001

СОДЕРЖАНИЕ

- Интегралы для спутникового варианта пространственной ограниченной круговой задачи трех тел
- Геометрическое исследование интегралов c_1, c_2
- Учет конечного размера центрального тела
- Отображение начальных условий в область значений констант c_1, c_2
- Примеры выбора орбит с учетом проблемы соударения с центральным телом
- Анализ периода эволюции и времени баллистического существования
- Примеры выбора орбит с учетом времени баллистического существования
- Сопоставление численных и аналитических расчетов времени баллистического существования на примере орбиты Хвостового зонда проекта ИНТЕРБОЛ

Интегралы для спутникового варианта пространственной ограниченной круговой задачи трех тел , полученные М.Л. Лидовым в 1961

- $c_0 = a;$ (1)
- $c_1 = \varepsilon \cos^2 i;$ (2)
- $c_2 = (1 - \varepsilon)\ (2/5 - \sin^2\omega \sin^2 i)$ (3)

ε*

a - большая полуось орбиты ИСЗ; $\varepsilon = 1 - e^2$; e - эксцентриситет;

i - наклонение орбиты ИСЗ к плоскости орбиты возмущающего тела;

ω - аргумент перицентра, измеренный от линии узлов на плоскости орбиты возмущающего тела.

- $c_0 = a_0$; $c_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0$; $c_2 = (1 - \varepsilon_0)\ (2/5 - \sin^2\omega_0 \sin^2 i_0)$ (4)

Сферическая система координат

- Начало совпадает с притягивающим центром S
- радиус – с параметром ε (0 ≤ ε ≤1) ;
- ко-широта – с наклонением i (0 ≤ 180°);
- долгота – с аргументом перицентра ω (0 ≤ ω ≤ 360°).

Соответствующая прямоугольная система координат

- Плоскость OXZ параллельна плоскости орбиты возмущающего тела J;
- Экваториальная плоскость OXY перпендикулярна к плоскости орбиты возмущающего тела;
- Ось OY направлена по нормали к плоскости орбиты возмущающего тела.

Сечения поверхностей c_1 = const

диаметральными плоскостями:

ω = 0°, 180° (а)

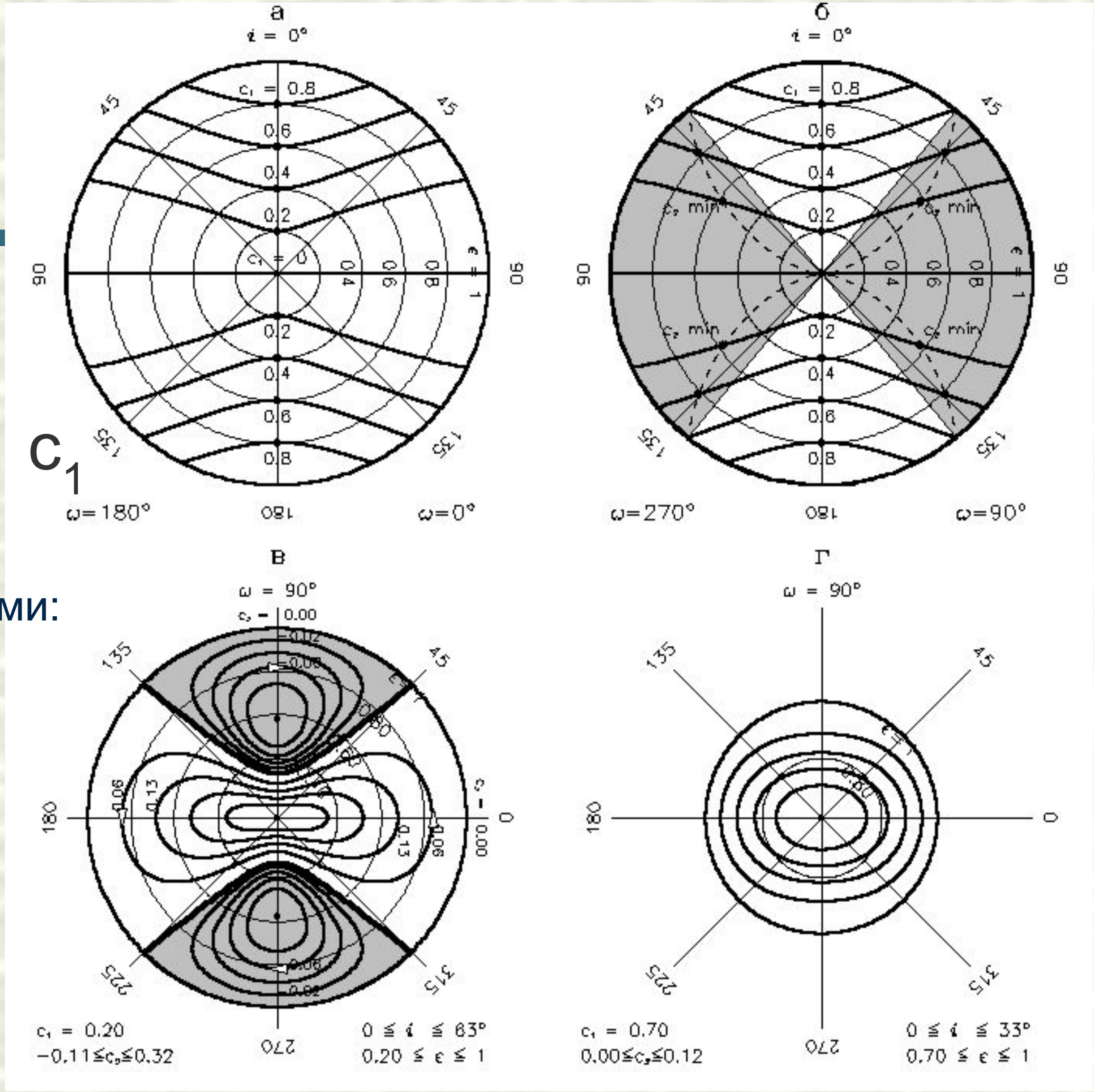
ω = 90°, 270° (б)

Линии c_2 = const

на поверхностях:

c_1 = 0.2 (в)

c_1 = 0.7 (г)



c_1

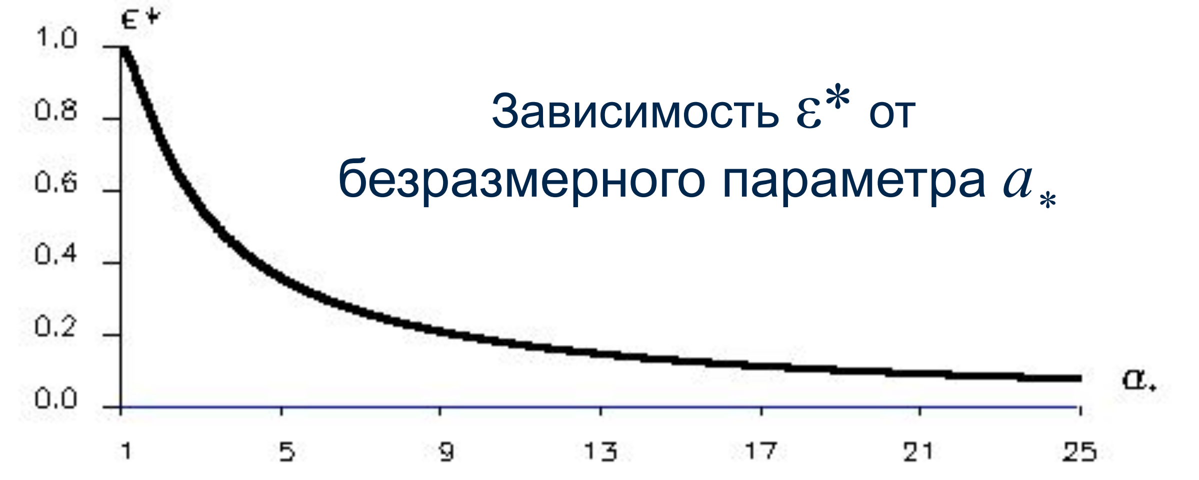
Учет конечного размера центрального тела

- Формула М.Л. Лидова для вычисления значения ε^*, соответствующего соударению с центральным телом радиуса R орбиты с большой полуосью a:

  $R_p = R;\ \ e = 1 - R/a;\ \ \ \varepsilon^* = 1 - (1 - R/a)^2$ (5)

- Введем безразмерный параметр $a_* = a\,/\,R$, тогда

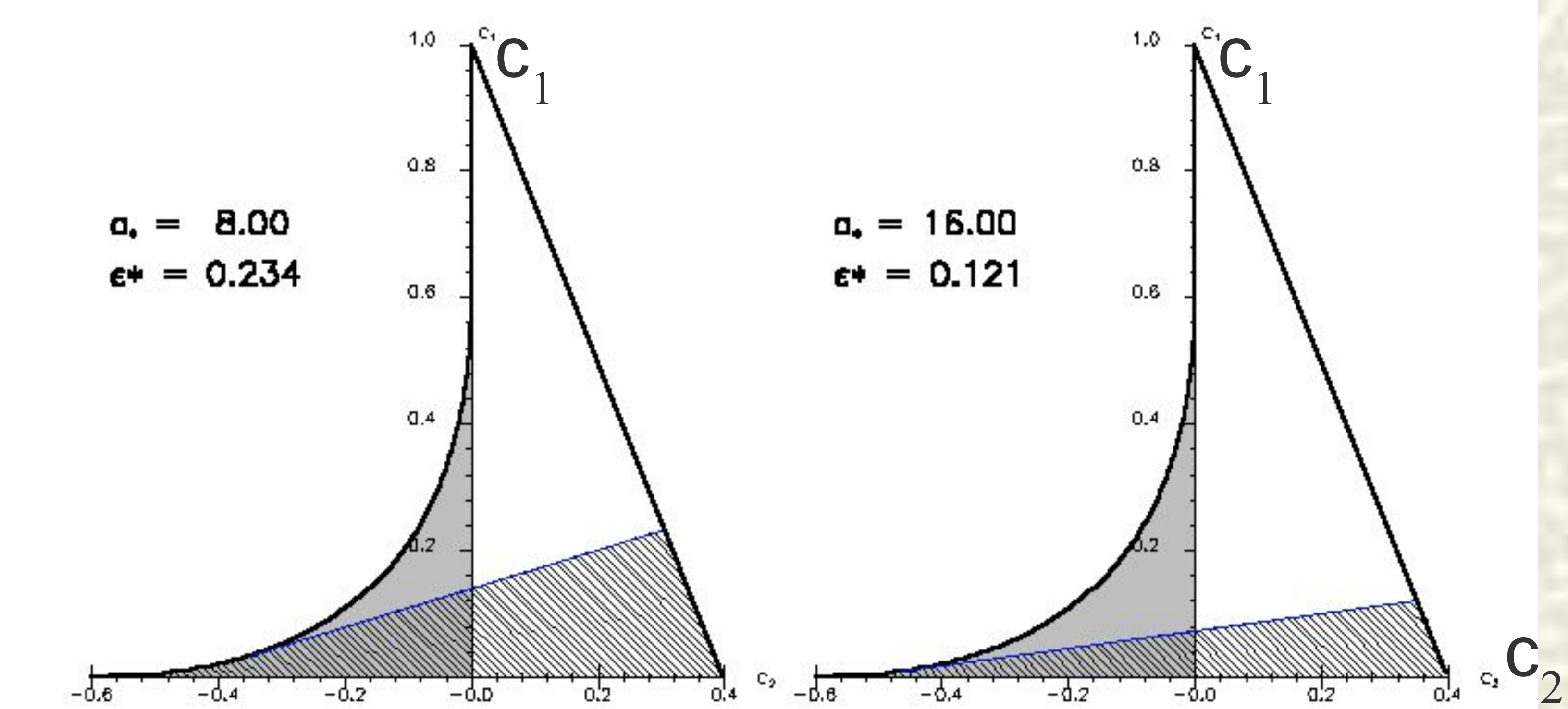
  $\varepsilon^* = (2a_* - 1)/a_*^2$ (6)



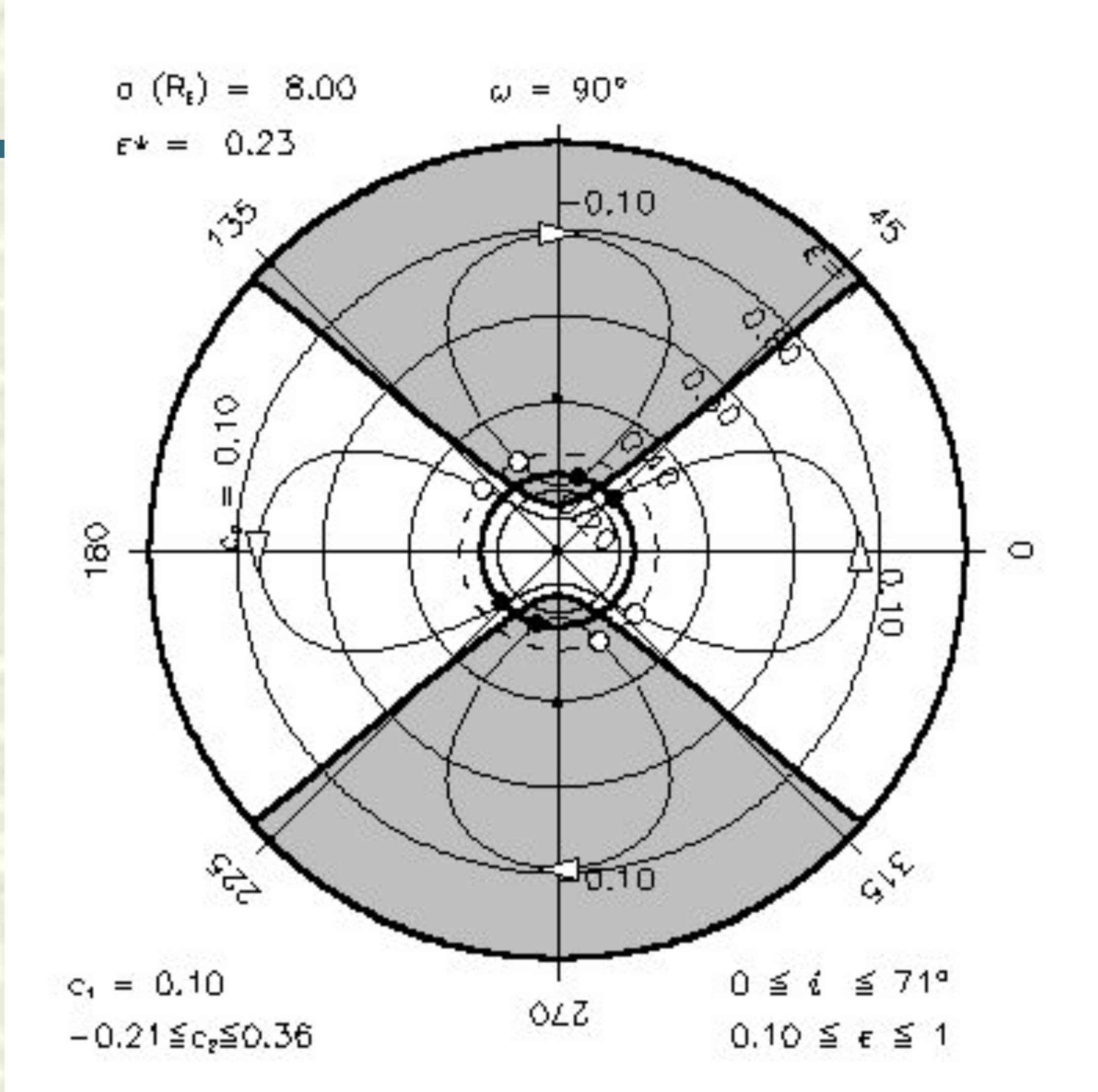
Зависимость ε^* от безразмерного параметра a_*

Косой штриховкой показаны области значений c_1, c_2, соответствующие орбитам с конечным временем баллистического существования

- при $a_* = 8$
- при $a_* = 16$



$c_1 < c_2\ \varepsilon^*/(1-\varepsilon^*) + 3/5$ — неравенство Ю.Ф. Гордеевой, 1968



Эволюция орбит с конечным временем баллистического существования

- $a_* = 8$
- $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.1$
- $c_1 = 0.1$, $c_2 = -0.1$
- Пересечения поверхности $c_1 = 0.1$ со сферами радиуса ε^* и ε_0 показано соответственно утолщенной и пунктирной линиями.
- Точки старта показаны светлыми символами
- точки падения – темными

Отображение начальных условий в область c_1, c_2

Отображение

координатной сетки ω_0, i_0

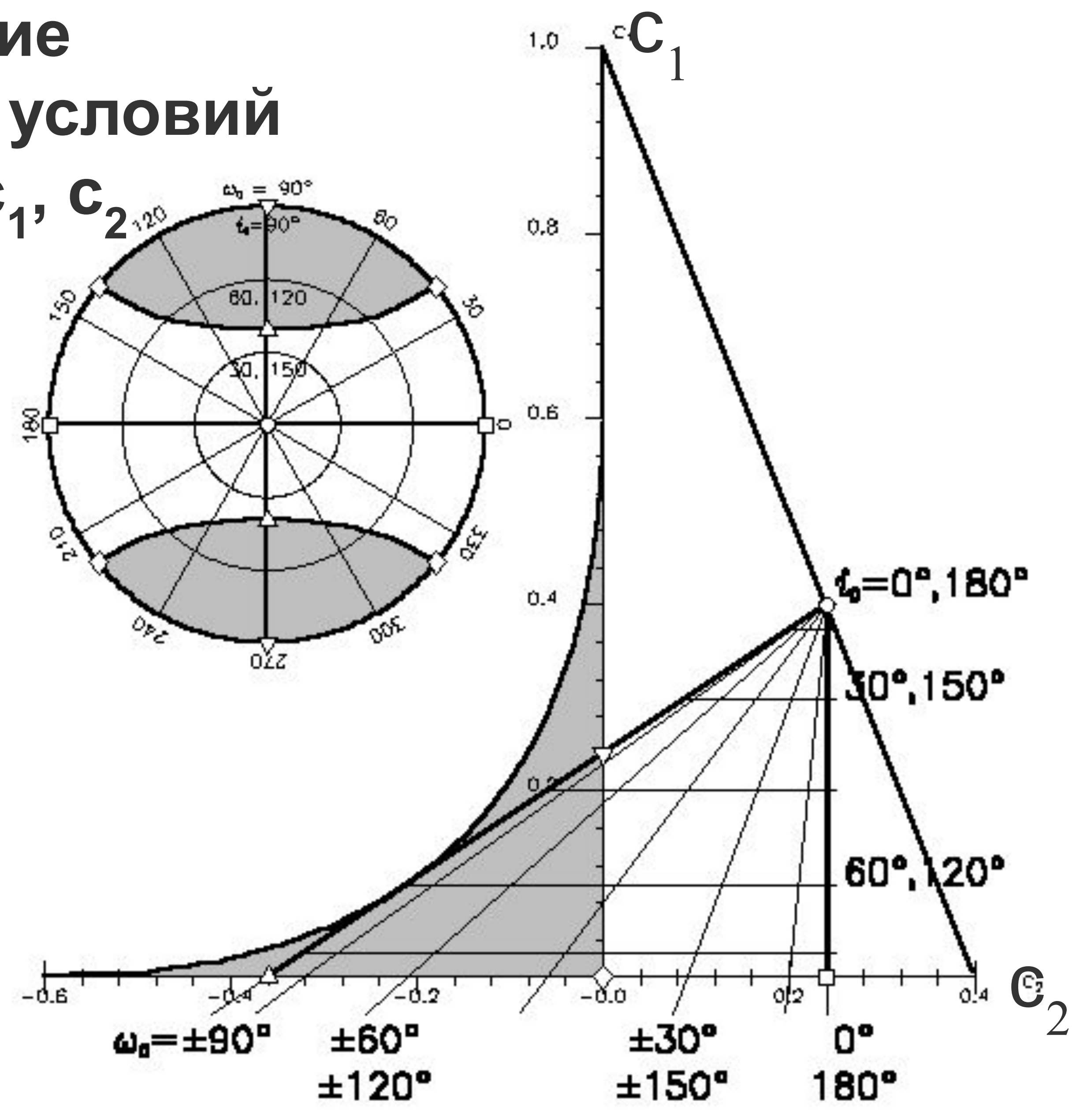
сферической поверхности

$\varepsilon_0 = 0.4$

в ограниченную треугольником

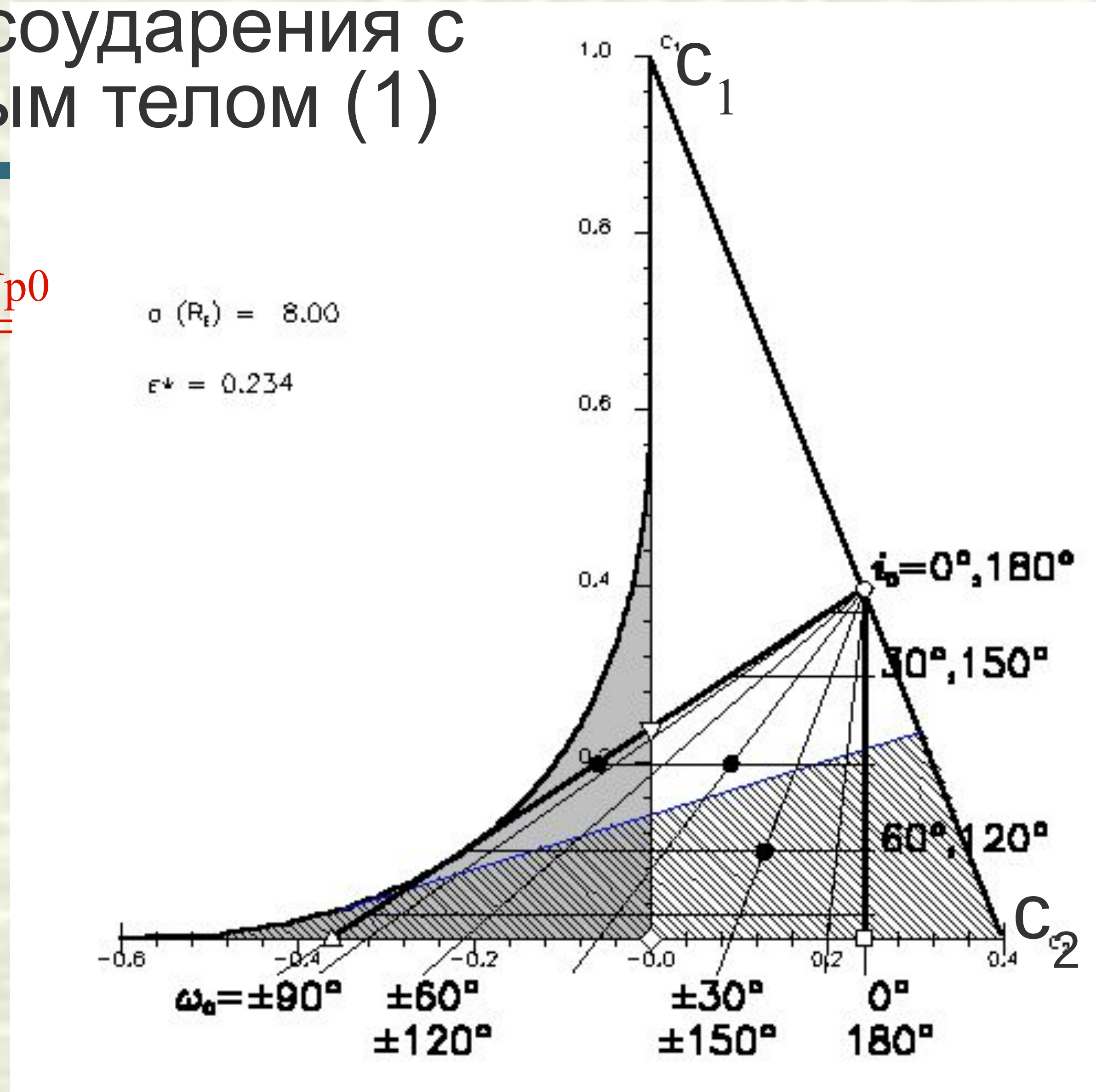
косоугольную сетку

в области **c_1, c_2**



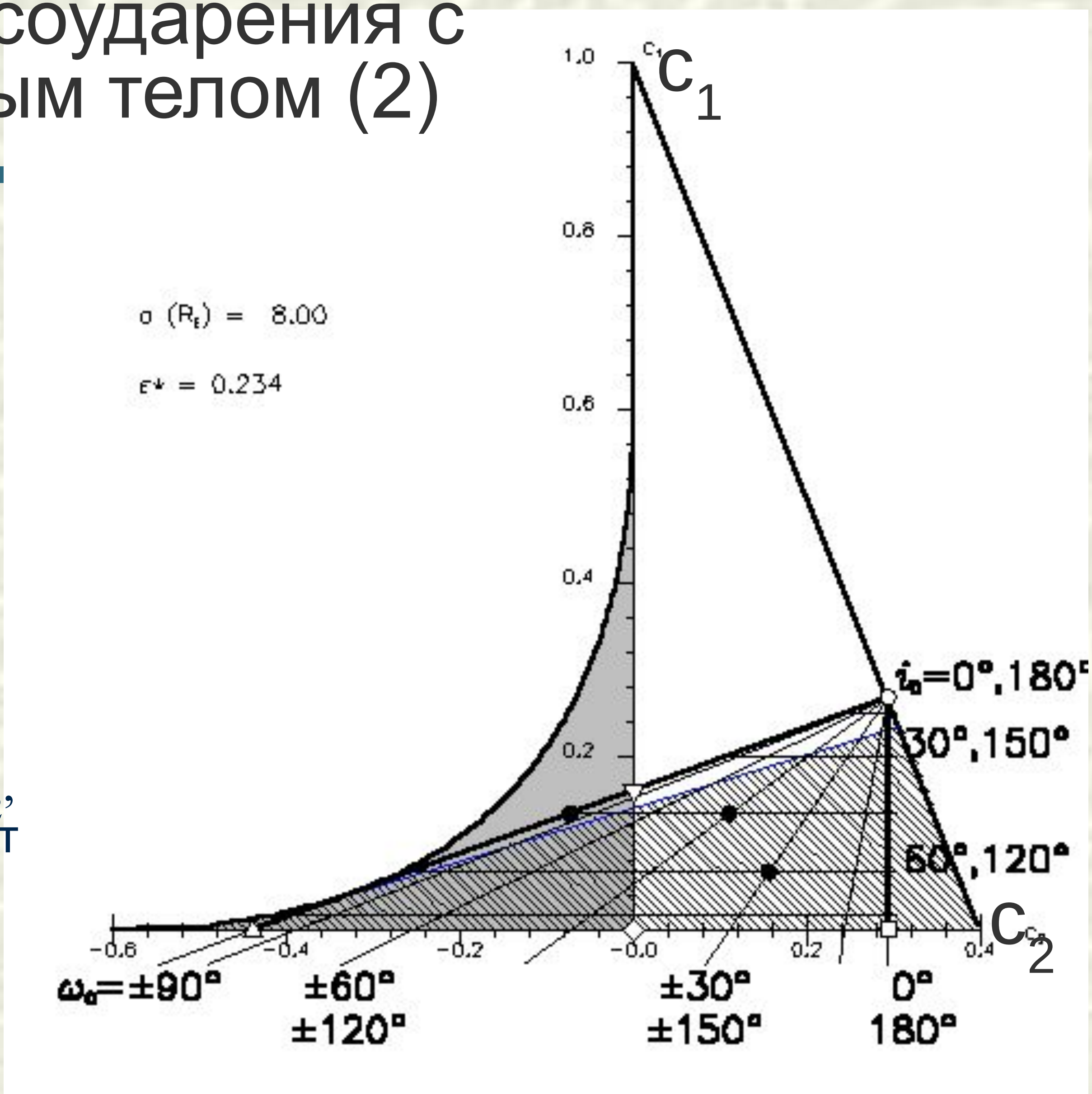
К выбору орбит с учетом проблемы соударения с центральным телом (1)

- $a = 8\ R_E$, $h_{p0} = 5000$ км, $e_0 =$ $0.777, \varepsilon_0 = 0.4$
- $i_0 = 45°, \omega_0 = -90°$
- $i_0 = 45°, \omega_0 = -45°$
- $i_0 = 60°, \omega_0 = -30°$
- Штриховкой отмечена область значений c_1, c_2, которым соответствуют орбиты с конечным временем баллистического существования



К выбору орбит с учетом проблемы соударения с центральным телом (2)

- $a = 8\ R_E$,
  $h_{p0} = 1000$ км,
  $e_0 = 0.855$, $\varepsilon_0 = 0.27$
- $i_0 = 45°$, $\omega_0 = -90°$
- $i_0 = 45°$, $\omega_0 = -45°$
- $i_0 = 60°$, $\omega_0 = -30°$
- Штриховкой отмечена область значений c_1, c_2, которым соответствуют орбиты с конечным временем баллистического существования



Период эволюции и время баллистического существования

Для вычисления времени баллистического существования орбит, эволюция которых заканчивается соударением с центральным телом, также как и для вычисления периода эволюции, в дополнение к интегралам (1), (2), (3), будем пользоваться полученной М.Л Лидовым квадратурой:

$$N - N_0 = -\frac{1}{A}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{(1-\varepsilon)\varepsilon^{1/2}\sin^2 i \sin 2\omega}, \quad (7)$$

$$A = \frac{15\pi}{2}\frac{M_k}{M}\left(\frac{a}{a_k}\right)^3 \varepsilon_k^{-3/2}, \quad (8)$$

где N – порядковый номер оборота спутника, M – масса центрального тела; M_k, a_k, ε_k – соответственно масса, большая полуось и параметр ε орбиты возмущающего тела.

Период эволюции и время баллистического существования

Для вычисления периода используются пределы интегрирования ε_{min} , ε_{max}, а для вычисления времени баллистического существования - ε_0 , ε* .

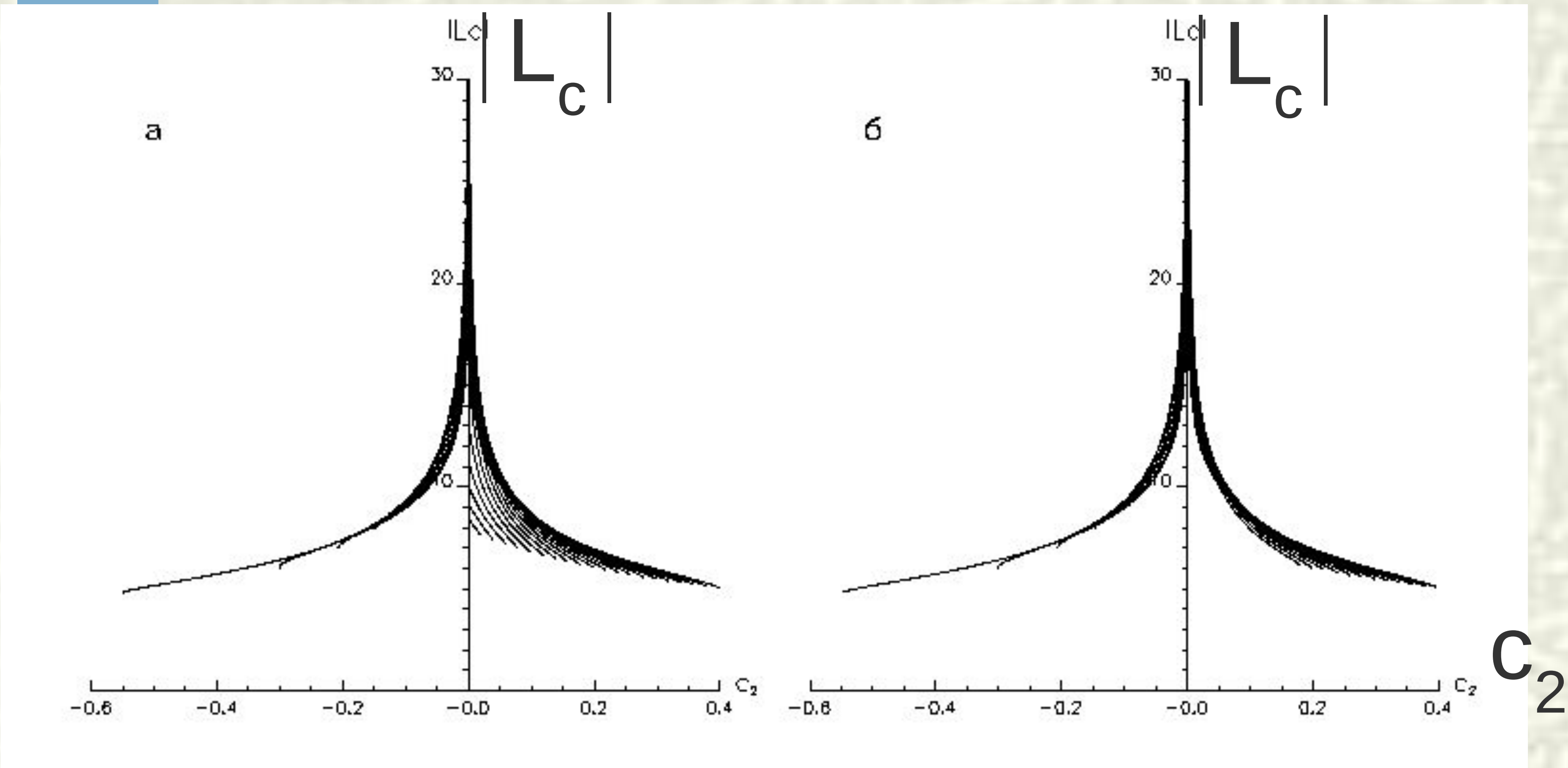
Будем пользоваться полученным в известной работе Ю.Ф. Гордеевой 1968 г выражением этой квадратуры через эллиптический интеграл первого рода.

Обозначим $|L_c|$ удвоенную квадратуру, вычисленную в пределах ε_{min} , ε_{max}, и, следуя работе Ю.Ф. Гордеевой, запишем выражение для периода Т эволюции орбитальных элементов *e, i,* умножив слева и справа выражение (7) на кеплеров период обращения точки Р по ее орбите:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{|\mathrm{Lc}|}{A}. \quad (9)$$

Рассмотрим как выглядит функции $|L_c|(c_1, c_2)$ в области возможных значений этих параметров.

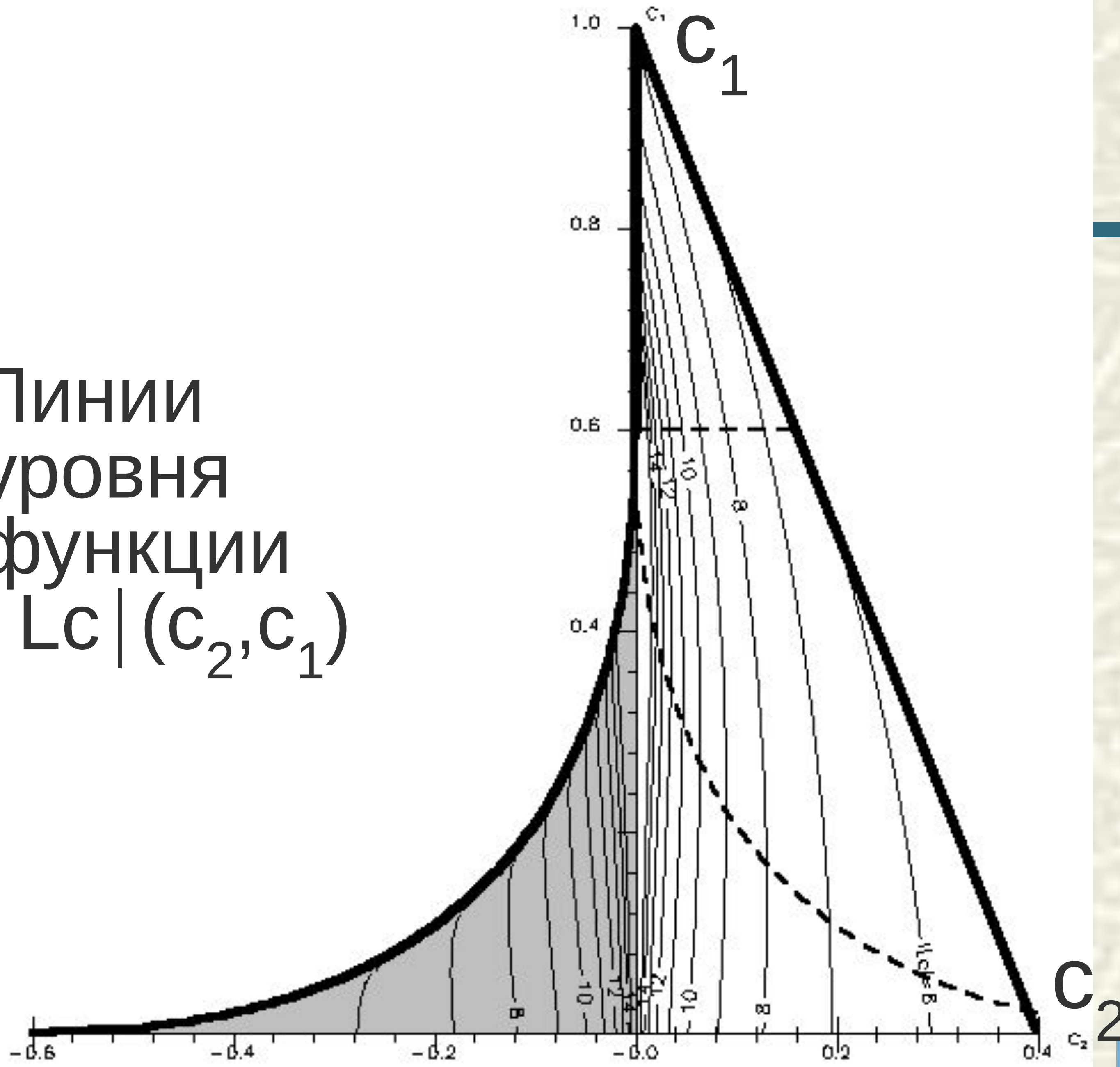
Сечение поверхности $|L_c|$ (c_2, c_1) плоскостями c_1 = const



а) $0 \le c_1 < 1$

б) $0 \le c_1 < 0{,}6$

Линии уровня функции $|Lc|(c_2,c_1)$



Время баллистического существования

Обозначим $L_r(c_1, c_2, a, \varepsilon_0, \omega_0)$ неполный эллиптический интеграл первого рода, соответствующий квадратуре (7), вычисленной в пределах ε_0, ε^* (исходя из начального значения ω_0). Аналогично выражению (9) запишем выражение для времени баллистического существования T_r:

$$T_r = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{L_r}{A} \quad (10)$$

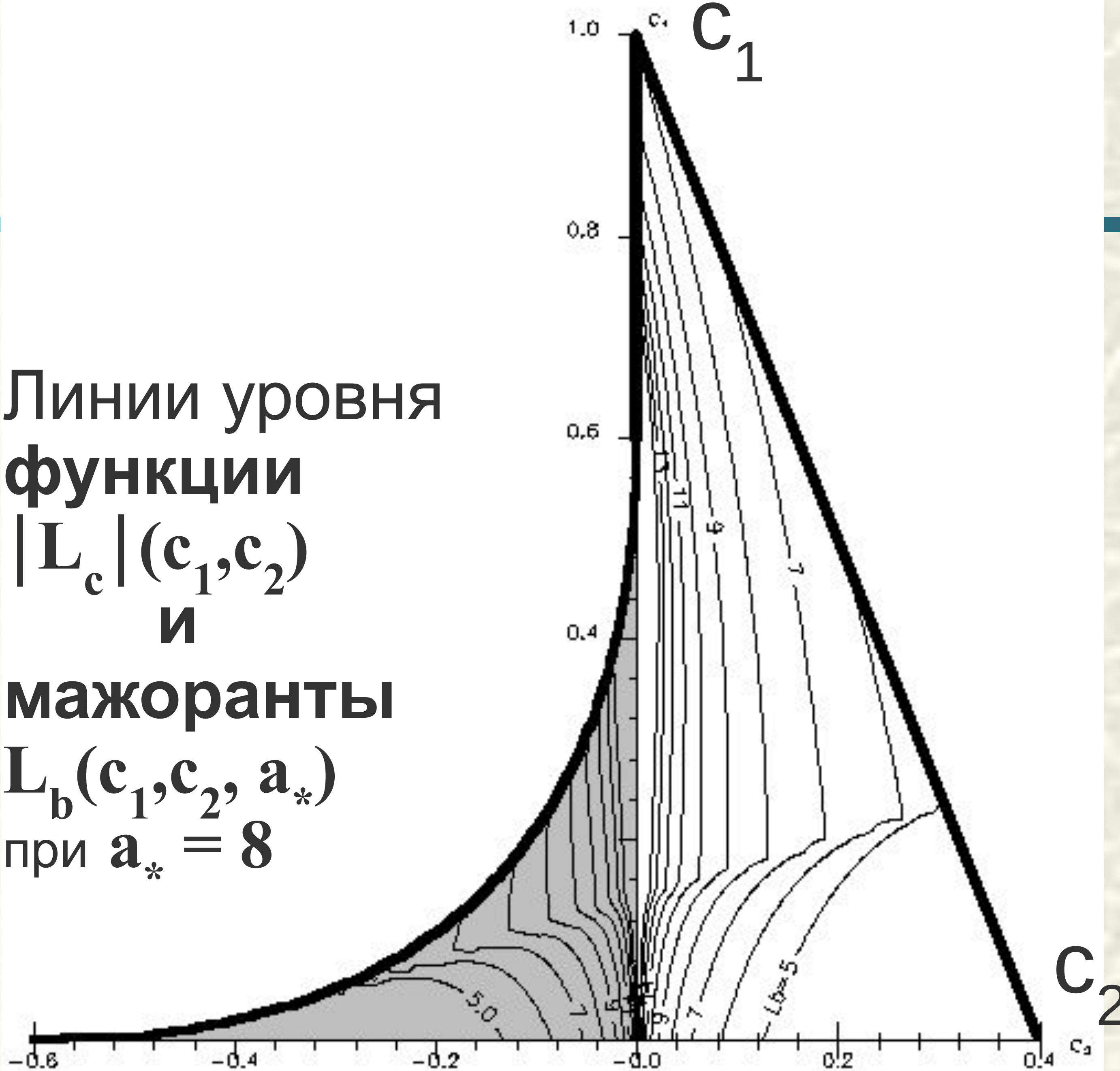
Мажорантой для функции $L_r(c_1, c_2, a, \varepsilon_0, \omega_0)$ является функция $L_b(c_1, c_2, a)$, вычисленная в пределах ε^*, ε^* (исходя из начального значения ω_0, принадлежащего II или IV четверти).

Имеет место следующее очевидное неравенство:

$$L_r(c_1, c_2, a, \varepsilon_0, \omega_0) < L_b(c_1, c_2, a) < |L_c|(c_1, c_2) \qquad (11)$$

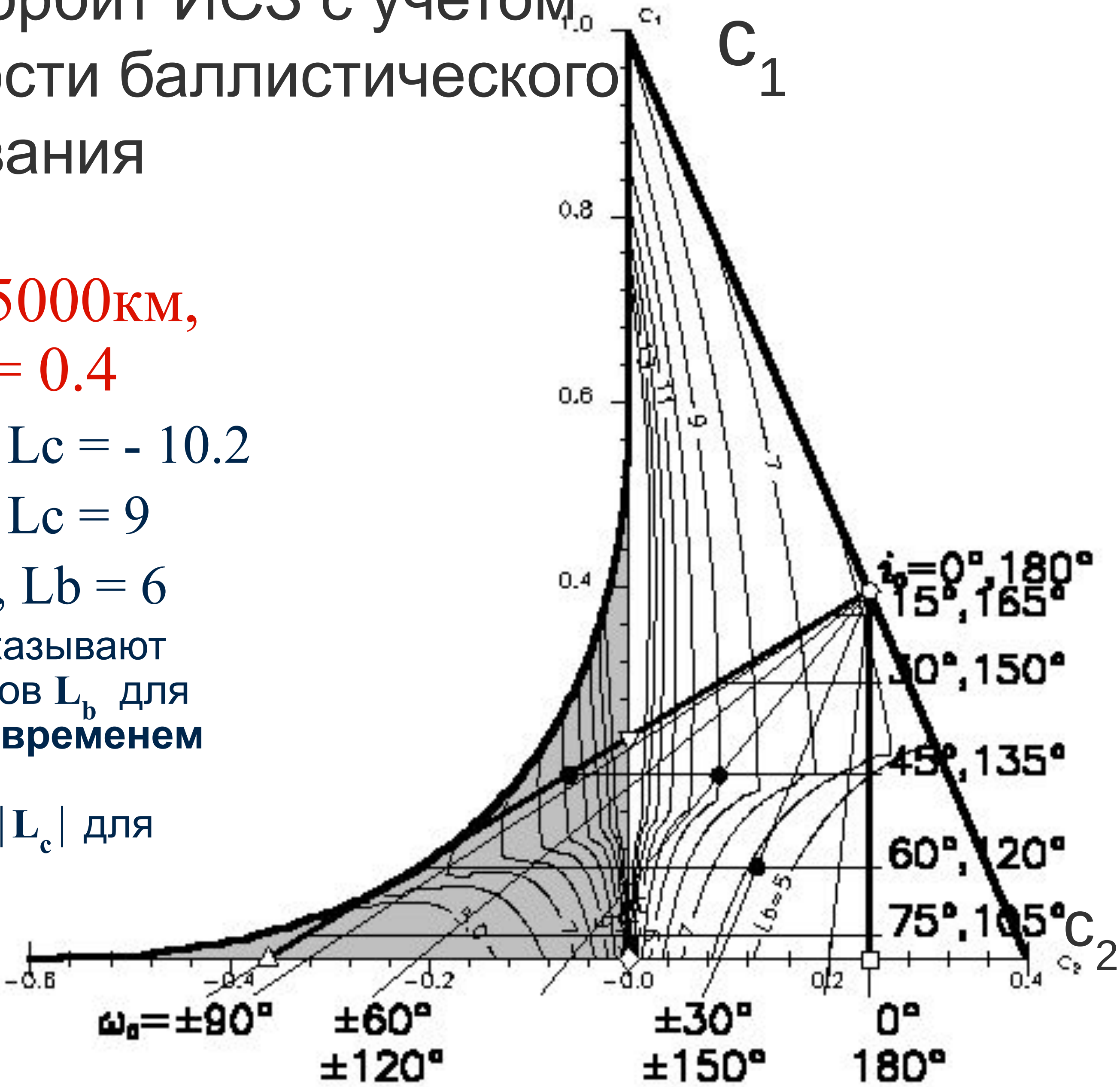
Рассмотрим как выглядит функция $L_b(c_1, c_2, a)$ в области возможных значений параметров c_1, c_2 при $a = 8$ R.

Линии уровня **функции** $|L_c|(c_1,c_2)$ **и мажоранты** $L_b(c_1,c_2,a_*)$ при $a_* = 8$



К выбору орбит ИСЗ с учетом длительности баллистического существования

- $a = 8\ R_E$, h_{p0}=5000км, $e_0 = 0.777$. $\varepsilon_0 = 0.4$
- i_0=45°, ω_0=-90°, Lc = - 10.2
- i_0=45°, ω_0=-45°, Lc = 9
- i_0=60°, ω_0=-30° , Lb = 6
- **Линии уровня** показывают значения параметров L_b для орбит с **конечным временем баллистического существования** и $|L_c|$ для остальных орбит



Анализ периода эволюции элементов орбиты и времени баллистического существования

- Преобразуем выражение (9) для периода Т, чтобы более выпукло показать роль остальных сомножителей

- $$\mathrm{T} = \frac{4}{15}\mu^{1/2}\frac{a_k^3\varepsilon_k^{3/2}}{\mu_k}\left|\mathrm{L_c}\right|a^{-3/2} \qquad (12)$$

- Введем характерный размер l, характерное время τ и безразмерные переменные:

$$a_* = a/l; \quad \mathrm{T}_* = T/\tau; \quad \mu_* = \mu\tau^2/l^3$$

- Введем следующие безразмерные параметры:

- параметр подобия орбит $\mathrm{L_T} = \mathrm{L_c}\, a_*^{-3/2}$;

- параметр подобия возмущений $\mathrm{L_D} = \mu_{*k}\, a_{*k}^{-3}\, \varepsilon_k^{-3/2} / \mu_*^{1/2}$

Анализ периода эволюции элементов орбиты и времени баллистического существования

- Запишем выражение безразмерного периода T_* через $|L_c|$ и параметр подобия возмущений L_D:

$$T_* = \frac{4}{15} \frac{|L_c|}{L_D} a_*^{-3/2} \tag{13}$$

- Далее, выразим T_* через $|L_c|$ и безразмерный коэффициент Q:

$$T_* = Q\,|Lc|, \quad Q = \frac{4}{15} \frac{a_*^{-3/2}}{L_D} \tag{14}$$

Анализ периода эволюции элементов орбиты и времени баллистического существования

- Введем следующие численные значения характерного размера $l = R_E$ = 6371.2 км и времени т =365 сут

- **В таблице 1** приведены численные значения параметра подобия возмущений L_D для систем:
  - Земля – Луна – ИСЗ,
  - Земля – Солнце – ИСЗ,
  - Земля – Луна + Солнце – ИСЗ.

- А также численные значения коэффициента Q для двух значений большой полуоси:
  - $a_* = 8$,
  - $a_* = 16$.

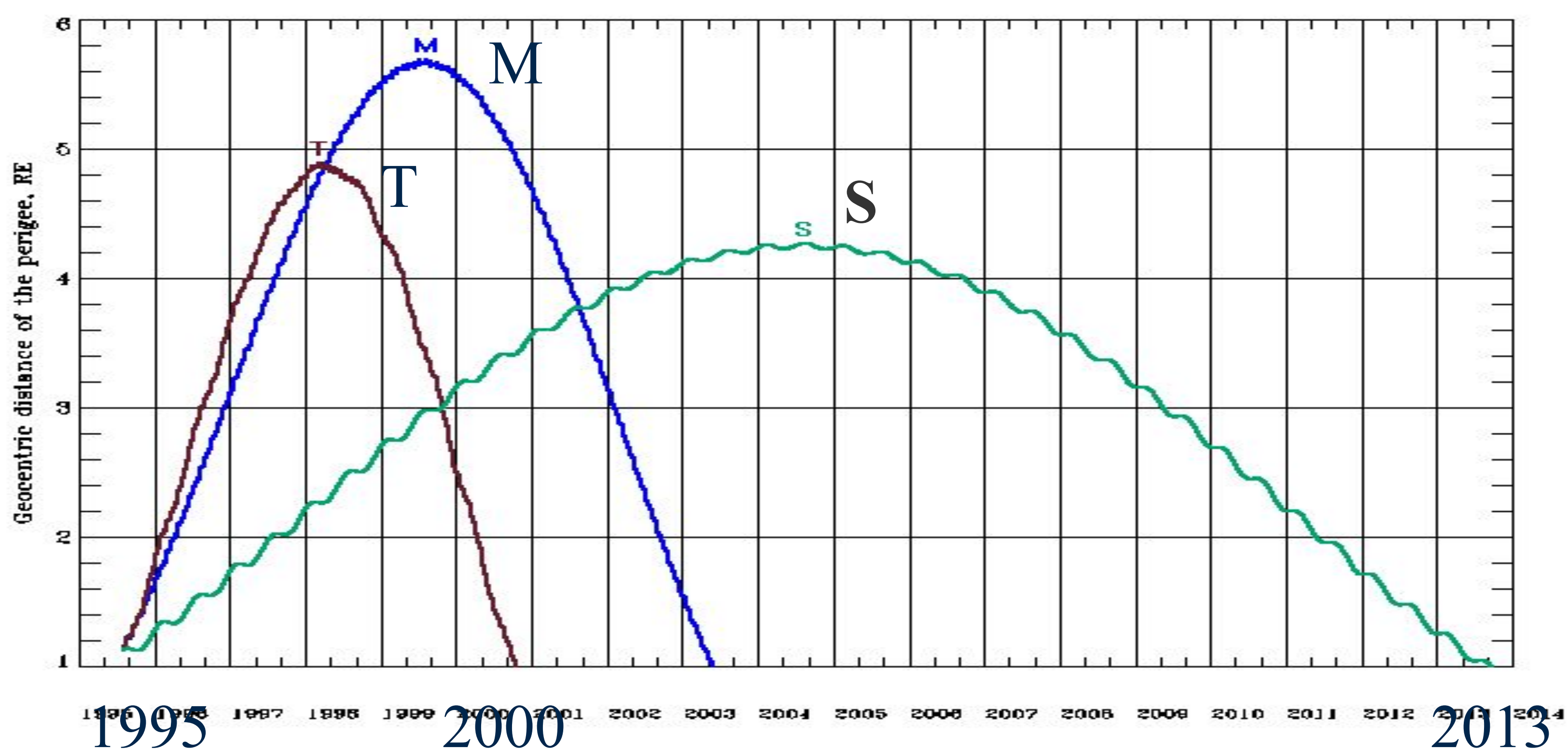
Таблица 1. Численные значения параметра подобия возмущений L_D и коэффициента Q

Система тел	Земля - Луна - ИСЗ	Земля - Солнце - ИСЗ	Земля - Луна + Солнце - ИСЗ
L_D	0.00219	0.00101	0.00320
Q при $a_* = 8$	5.37490	11.7039	3.48335
Q при $a_* = 16$	1.90031	4.13794	1.30226

ИНТЕРБОЛ ХВОСТОВОЙ ЗОНД

$a_* = 16.12$, $\varepsilon^* = 0.12$, $L_\varepsilon = 6.42$, $L_b = 4.11$
(03/08/1995 - 16/10/2000)

Эволюция радиуса перигея и время существования, рассчитанные с учетом гравитационных возмущений от Луны (M) и Солнца (S) отдельно и совместно (T)



ИНТЕРБОЛ ХВОСТОВОЙ ЗОНД

$a_* = 16.12$, $\varepsilon^* = 0.12$, $L_c = 6.42$, $L_b = 4.11$
(03/08/1995 - 16/10/2000)

Таблица 2. Значения времени баллистического существования (в годах), рассчитанные численно и аналитически

Метод расчета	С учетом возмущения от Луны	С учетом возмущения от Солнца	С учетом возмущения от Луны и Солнца
Численный	7.60	18.00	5.20
Аналитический	7.72	16.80	5.29

Список литературы

1. *Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. № 8. С. 5
2. *Моисеев Н.Д.* О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек // Труды ГАИШ. 1945. Т. 16. Ч.1 с 100
3. *Гордеева Ю.Ф.* Зависимость элементов от времени в долгопериодических колебаниях в ограниченной задаче трех тел // Космич. Исслед. 1968. Т. 6. № 4. С. 536