



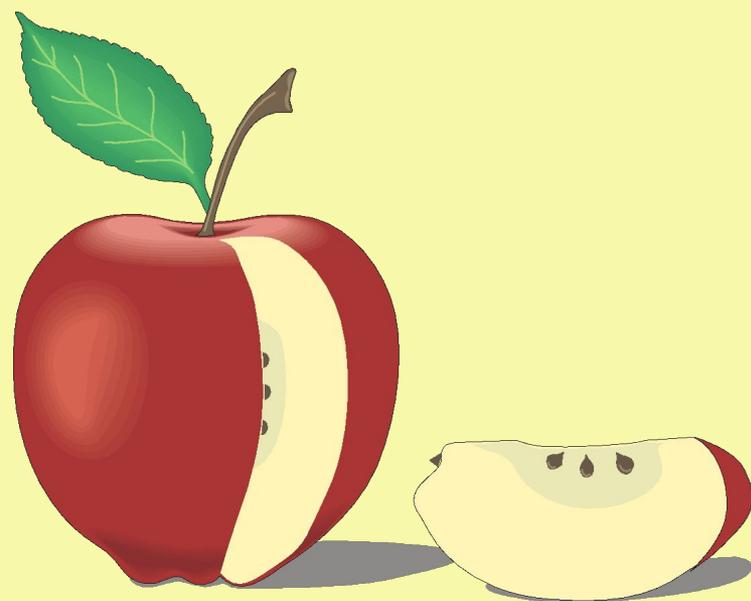
Муниципальное бюджетное
общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная
школа «Финист»

Ворошиловского района г. Ростова-на-Дону

**ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ
ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ 6 КЛАССА**

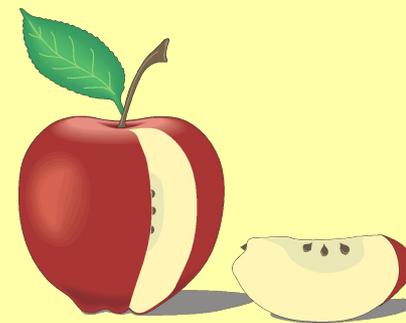
«ДОЛИ И ЧАСТИ»

Автор: Б.И. Вольфсон



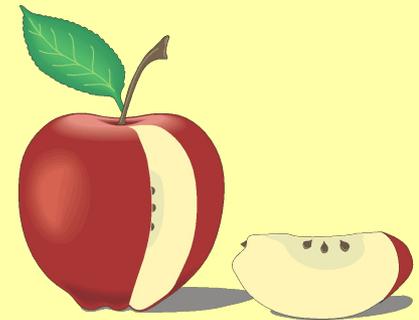
Цели работы:

- 1. Ввести понятия умножения и деления числа на дробь, установив связь этих действий с вычислением части данного числа и восстановлением значения числа по его части и соответствующей ей дроби.*
- 2. Изучить различные типы задач на части.*
- 3. Разработать «опорный сигнал», способствующий решению простейших типовых задач на части.*



ПРОБЛЕМА:

- В русском языке слово «умножить» означает «увеличить», а слово «разделить» означает «уменьшить». Так и происходит, когда мы умножаем или делим данное число t на натуральное число n .
- Однако произведение (т.е. результат умножения) числа t на правильную дробь p/q меньше, чем число t , а частное от деления числа t на правильную дробь p/q больше, чем число t .
- Мы хотим разобраться в этом противоречии, которое смущало еще средневековых математиков.



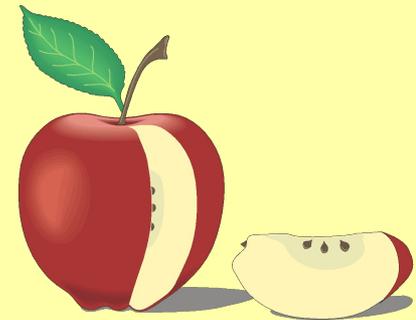
Произведение данного числа m на натуральное число n

Исторически понятие произведения данного числа m на натуральное число n возникло как обобщение понятия суммы n слагаемых, каждое из которых равно m :

$$m \cdot n = \underbrace{m + \dots + m}_n.$$

n слагаемых

Таким образом, для того, чтобы умножить m на n , нужно взять число m в качестве слагаемого n раз, т.е. результат увеличится в n раз.



Произведение данного числа m на обыкновенную дробь p/q

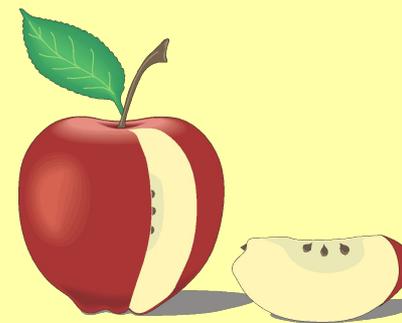
Эту операцию мы связываем с вычислением «*пэ-кутой*» части от числа m .

Как это сделать на практике?

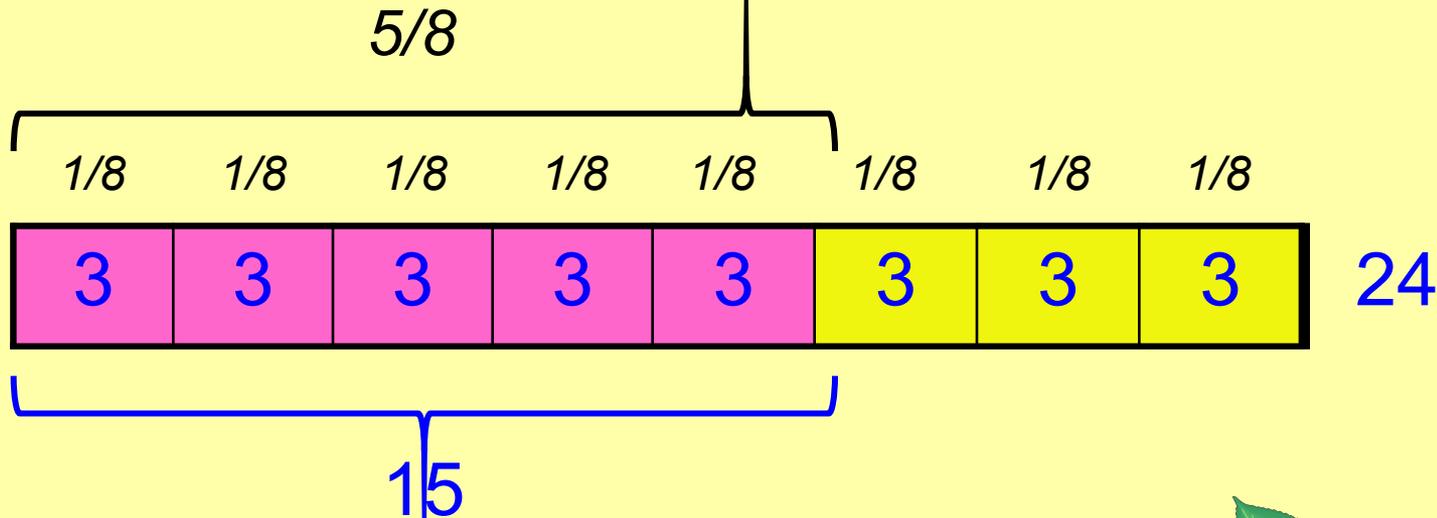
Рассмотрим конкретный пример.

Пусть требуется найти $5/8$ частей от числа 24.

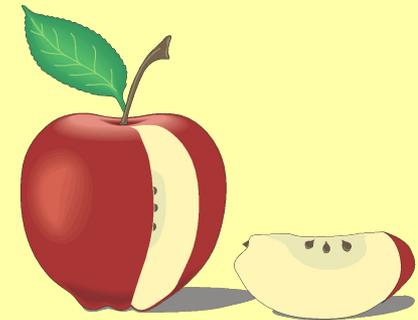
Для этого необходимо разделить число 24 на 8 равных частей и взять 5 из них.



Проиллюстрируем вычисление $\frac{5}{8}$ частей от числа 24 графически. Изобразим число 24 в виде прямоугольника, разделим его на 8 равных частей, каждая из которых составляет $\frac{1}{8}$ часть числа 24 и равна $24 : 8 = 3$.



Выделим пять восьмых частей числа 24. Они составят $3 \cdot 5 = 15$.



Задача №1. Найти произведение данного числа 24 на обыкновенную дробь 5/8.

Анализ: Чтобы решить эту задачу, необходимо, как было показано выше, найти 5/8 частей от числа 24.

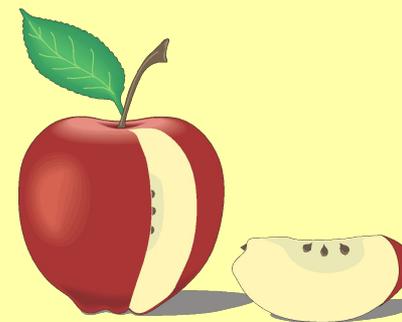
Решение.

$$24 \cdot \frac{5}{8} = (24 : 8) \cdot 5 = \frac{24 \cdot 5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{1} = 15.$$

Примечание. Оформляя решение, мы учитывали, что двоеточие и дробная черта являются равноправными знаками деления.

Вывод:

Мы убеждаемся, что при умножении числа 24 на дробь 5/8 получается число 15, которое меньше, чем 24.



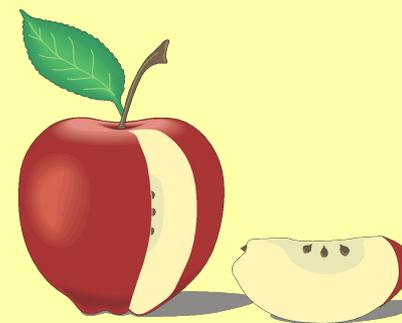
Задача №2. Найти $\frac{5}{8}$ частей от числа 24.

Анализ: Мы определили умножение данного числа на дробь как нахождение части числа, соответствующей данной дроби. Очевидно, что справедливо и обратное, т. е., например, чтобы найти $\frac{5}{8}$ частей от числа 24, нужно умножить 24 на дробь $\frac{5}{8}$.

Решение.

$$24 \cdot \frac{5}{8} = \frac{24 \cdot 5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{1} = 15.$$

Ответ: $\frac{5}{8}$ частей числа 24 равны 15.



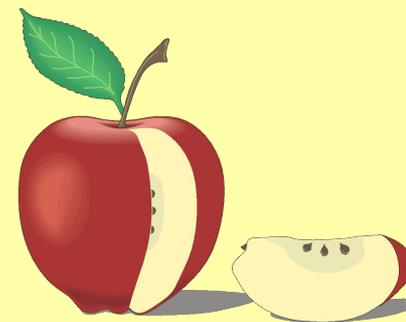
Определение произведения двух дробей

Мы уже выяснили, что для умножения числа m на дробь p/q необходимо разделить m на знаменатель q и умножить на числитель p :

$$m \cdot \frac{p}{q} = (m : q) \cdot p = \frac{m \cdot p}{q}.$$

Если число m также является дробью вида k/l , то его произведение на дробь p/q примет следующий вид:

$$\frac{k}{l} \cdot \frac{p}{q} = \frac{k \cdot p}{l \cdot q}.$$



Частное от деления данного числа m на обыкновенную дробь p/q

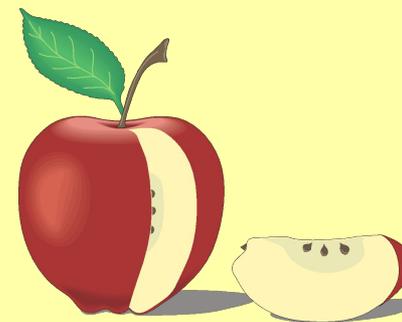
Эту операцию мы связываем с восстановлением значения числа M , для которого m является его «*пэ-кутой*» частью.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется найти число M , $3/7$ части которого равны 12 .

1) Для решения этой задачи необходимо разделить число 12 на 3 равные части. При этом мы узнаем, чему равна одна седьмая часть искомого числа: $12 : 3 = 4$.

2) Все число M состоит из семи седьмых частей, поэтому $M = 4 \cdot 7 = 28$.

$$\begin{aligned} \text{Итак, } M &= 12 : \frac{3}{7} = (12 : 3) \cdot 7 = \\ &= \frac{12 \cdot 7}{3} = \frac{4 \cdot 7}{1} = 28. \end{aligned}$$



Выводы:

1. В результате деления числа 12 на правильную дробь $3/7$ получилось число 28, которое больше, чем 12.

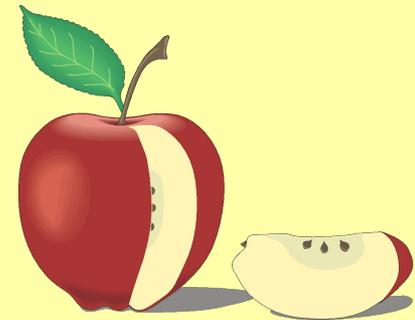
2. Правило деления числа m на дробь p/q :

$$m : \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{p} = m \cdot \frac{q}{p}.$$

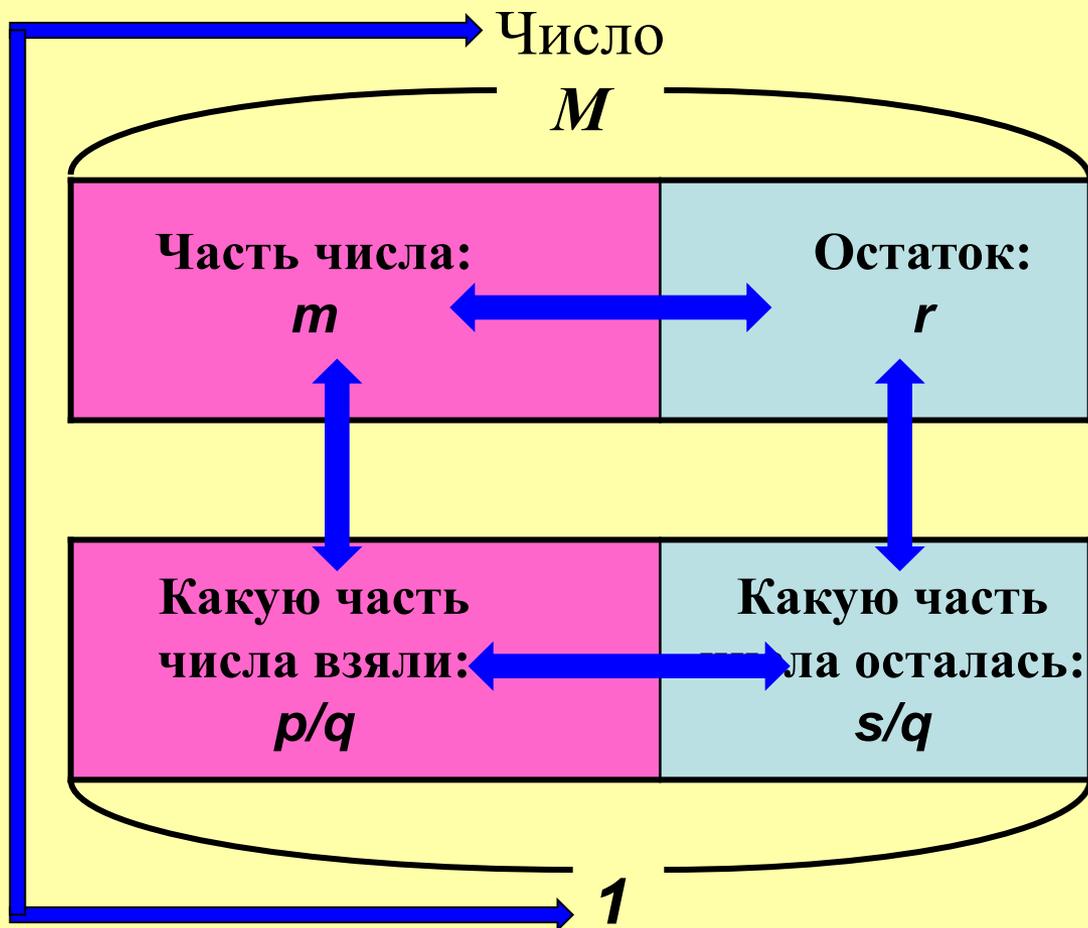
3. Правило деления дроби m/n на дробь p/q :

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}.$$

4. Для того, чтобы восстановить число M , если известно, что «пэ-кутая» часть этого числа равна m , необходимо разделить m на дробь p/q : $M = m : \frac{p}{q}$.



Опорный сигнал «Задачи на части»

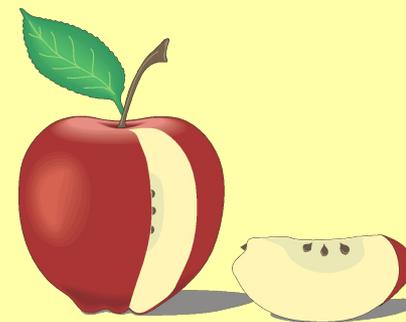


1. $m = M \cdot p/q$; $M = m : (p/q)$; $p/q = m/M$.

2. $r = M \cdot s/q$; $M = r : (s/q)$; $s/q = r/M$.

3. $m = M - r$; $r = M - m$; $M = m + r$.

4. $p/q + s/q = 1$;
 $p/q = 1 - s/q$;
 $s/q = 1 - p/q$.



ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЧАСТИ



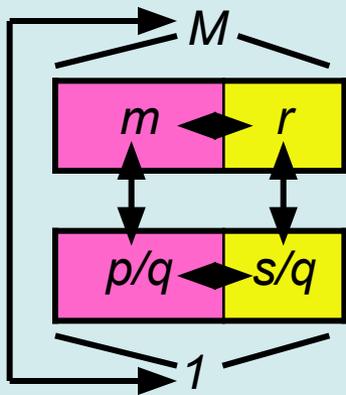
Задача №3.

Масса медно-никелевого сплава $M=7,7$ кг. Найдите массу меди m и массу никеля r в отдельности, если масса меди составляет $p/q = 5/11$ частей от массы сплава. Какую часть (s/q) массы сплава составляет масса никеля?

Краткое условие

Дано: $M = 7,7$ кг;
 $p/q = 5/11$.

Найти: $m, r, s/q$.



Решение.

$$1) m = M \cdot \frac{p}{q} = 7,7 \cdot \frac{5}{11} = \frac{77}{10} \cdot \frac{5}{11} =$$
$$= \frac{77 \cdot 5}{10 \cdot 11} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ (кг)};$$

$$2) r = M - m = 7,7 - 3,5 = 4,2 \text{ (кг)};$$

$$3) s/q = r : M = 4,2 : 7,7 = 6/11.$$

Проверка: $p/q + s/q = 5/11 + 6/11 = 11/11 = 1$.

Ответ: $m = 3,5$ кг; $r = 4,2$ кг; $s/q = 6/11$.

Задача №4.

Найдите массу медно-никелевого сплава M и массу меди m , если масса меди составляет $p/q = 5/11$ частей от массы сплава, а масса никеля равна $r = 4,2$ кг. Какую часть (s/q) массы сплава составляет масса никеля?

Краткое условие

Дано: $r = 4,2$ кг;

$p/q = 5/11$.

Найти: $M, m, s/q$.

Решение.

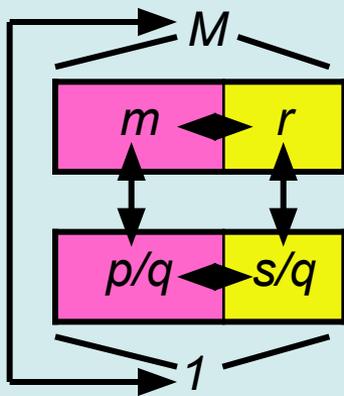
1) $s/q = 1 - p/q = 1 - 5/11 = 6/11$;

2) $M = r : \frac{s}{q} = 4,2 : \frac{6}{11} = \frac{42}{10} : \frac{6}{11} =$
 $= \frac{21}{5} : \frac{6}{11} = \frac{21 \cdot 11}{5 \cdot 6} = \frac{7 \cdot 11}{5 \cdot 2} = \frac{77}{10} = 7,7$ (кг);

3) $m = M - r = 7,7 - 4,2 = 3,5$ (кг).

Проверка: $m : M = 3,5 : 7,7 = 5/11 = p/q$.

Ответ: $M = 7,7$ кг; $m = 3,5$ кг; $s/q = 6/11$.



Задача №5.

Найдите массу медно-никелевого сплава M , если масса меди $m=3,5$ кг, масса никеля $r = 4,2$ кг. Какую часть (p/q) масса меди и какую часть (s/q) масса никеля составляют от массы сплава?

Краткое условие

Дано: $m = 3,5$ кг;

$r = 4,2$ кг.

Найти: M , p/q , s/q .

Решение.

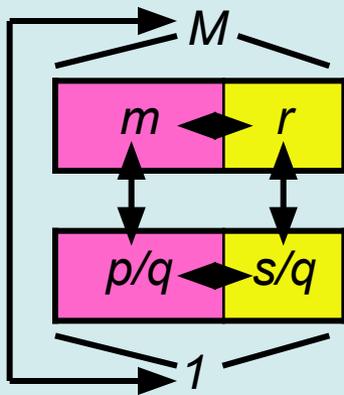
1) $M = m + r = 3,5 + 4,2 = 7,7$ (кг);

2) $p/q = m : M = 3,5 : 7,7 = 5/11$;

3) $s/q = r : M = 4,2 : 7,7 = 6/11$.

Проверка: $p/q + s/q = 5/11 + 6/11 = 1$.

Ответ: $M = 7,7$ кг; $p/q = 5/11$; $s/q = 6/11$.



Список параметров для конструирования задач на части и варианты условий, получаемых из их комбинаций

№	Число (M)	Часть числа (m)	Остаток (r)	Какую часть числа взяли (p/q)	Какая часть числа осталась (s/q)
6	16	12	4	3/4	1/4
6.1	16	?	?	3/4	?
6.2	16	?	?	?	1/4
6.3	?	12	?	3/4	?
6.4	?	12	?	?	1/4
6.5	16	?	4	?	?
6.6	?	12	4	?	?

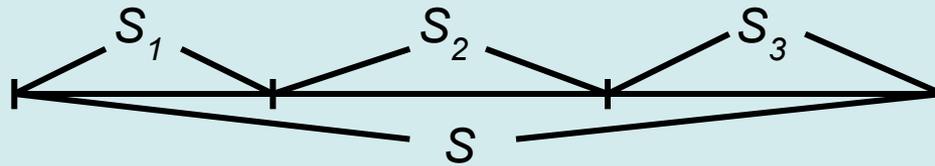
Списки параметров для конструирования задач на части

№	Число (M)	Часть числа (m)	Остаток (r)	Какую часть числа взяли (p/q)	Какая часть числа осталась (s/q)
7	30	18	12	3/5	2/5
8	36	15	21	5/12	7/12
9	14/15	2/5	8/15	3/7	4/7
10	1,6	0,48	1,12	3/10	7/10
11	39,6	8,4	31,2	7/33	26/33
12	4,62	0,9	3,72	15/77	62/77
13	85/12	51/14	289/84	18/35	17/35
14	98/15	35/9	119/45	25/42	17/42
15	51/14	9/4	39/28	21/34	13/34

Пример решения задачи о трехдневном пути

Задача № 16.

Турист прошел в 1-й день $9/25$ всего пути, во 2-й день — на 6 км больше, чем в 1-й день. Чему равен весь путь (S), и сколько километров было пройдено в 1-й и 2-й дни пути отдельно (S_1 и S_2), если в 3-й день турист прошел $S_3 = 15$ км?



Решение.

1) Примем за x путь S , пройденный туристом за 3 дня.

Тогда $S_1 = 9/25 x$, $S_2 = 9/25 x + 6$.

2) Так как $S = S_1 + S_2 + S_3$, то можем составить уравнение:

$$x = 9/25 x + (9/25 x + 6) + 15, \text{ решая которое, получаем: } x = 75.$$

3) Итак, $S = 75$ км, $S_1 = 9/25 \cdot 75 = 27$ (км), $S_2 = 27 + 6 = 33$ (км).

Проверка: $S_1 + S_2 + S_3 = 27 + 33 + 15 = 75$ (км) = S .

Ответ: $S = 75$ км, $S_1 = 27$ км, $S_2 = 33$ км.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 17.

Турист прошел в 1-й день $7/17$ трехдневного пути, во 2-й день — $6/7$ пути, пройденного в 1-й день. Чему равен весь путь (S), и сколько километров было пройдено в 1-й, 2-й и 3-й дни отдельно (S_1 , S_2 и S_3), если в 3-й день турист прошел на 10 км меньше, чем во 2-й?

Задача № 18.

Турист прошел в 1-й день на 4 км меньше, чем во 2-й день, а в 3-й день — $2/5$ пути, пройденного за два первых дня вместе. Сколько километров было пройдено в 1-й, 2-й и 3-й дни пути отдельно (S_1 , S_2 и S_3), если всего за три турист прошел путь $S = 84$ км?

Задача № 19.

Турист прошел во 2-й день пути на 6 км больше, чем в 1-й день, а в 3-й день — $7/8$ пути, пройденного во 2-й день. Сколько километров было пройдено в 1-й, 2-й и 3-й дни пути отдельно (S_1 , S_2 и S_3), если всего за три турист прошел путь $S = 86$ км?

Ответы: 1) 85 км, 35 км, 30 км, 20 км. 2) 28 км, 32 км, 24 км.
3) 26 км, 32 км, 28 км.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эрдниева П.М.* Преподавание математики в школе. (Из опыта обучения методом укрупненных упражнений). — М.: «Просвещение», 1978. — 304 с.

2. *Б.И. Вольфсон, В.М. Поркшеян, Л.И. Резницкий, С. М. Хартиев.* Готовимся к экзамену по математике: **Пособие-репетитор для старшеклассников и абитуриентов.** — 4-е изд., доп. и перераб. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. — 462 с. С. 19 – 26, 188 – 218.



3. *Вольфсон Б. И.* **Формирование семейств модифицируемых многопараметрических задач.** // Развивающие программы и методики работы с одаренными детьми. Сборник программ лауреатов 1 областного конкурса программ и методик работы с одаренными детьми. — Ростов-на-Дону, 2000. — 160 с. С. 46 – 58.