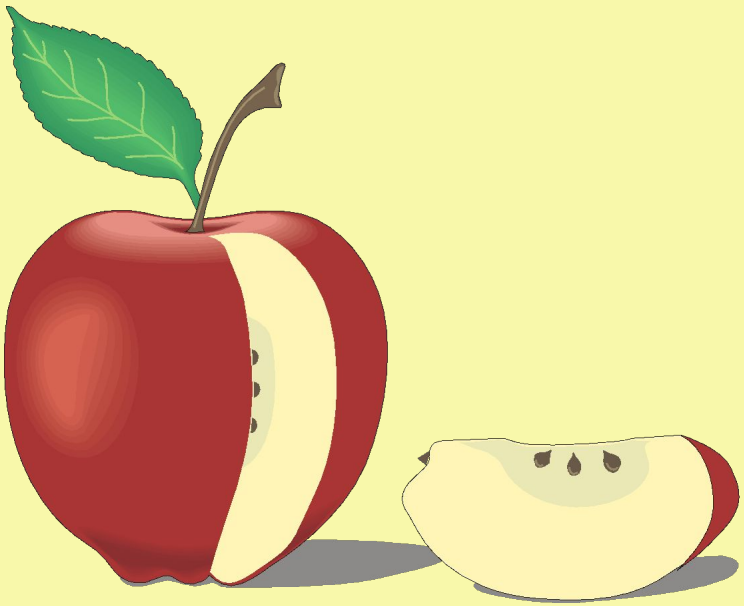
Муниципальное бюджетное
общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная
школа «Финист»
Ворошиловского района г. Ростова-на-Дону

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 6 КЛАССА

«ДОЛИ И ЧАСТИ»



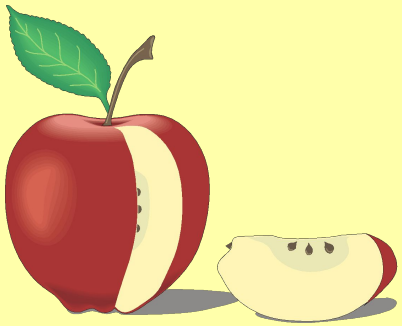
Автор: Б.И. Вольфсон

Цели работы:

1. Ввести понятия умножения и деления числа на дробь, установив связь этих действий с вычислением части данного числа и восстановлением значения числа по его части и соответствующей ей дроби.

2. Изучить различные типы задач на части.

3. Разработать «опорный сигнал», способствующий решению простейших типовых задач на части.

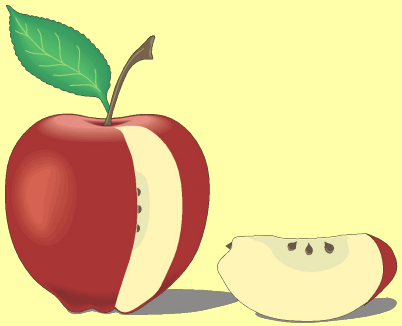


ПРОБЛЕМА:

- **В русском языке слово «умножить» означает «увеличить», а слово «разделить» означает «уменьшить». Так и происходит, когда мы умножаем или делим данное число *m* на натуральное число *n*.**

- **Однако произведение (т.е. результат умножения) числа *m* на правильную дробь *p/q* меньше, чем число *m*, а частное от деления числа *m* на правильную дробь *p/q* больше, чем число *m*.**

- **Мы хотим разобраться в этом противоречии, которое смущало еще средневековых математиков.**

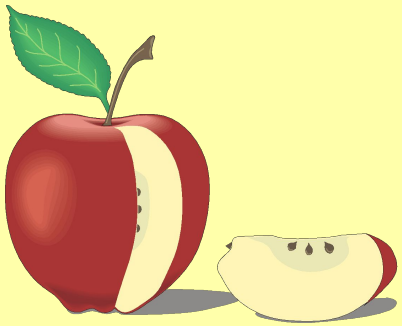


Произведение данного числа *m* на натуральное число *n*

Исторически понятие произведения данного числа *m* на натуральное число *n* возникло как обобщение понятия суммы *n* слагаемых, каждое из которых равно *m:*

$$m \cdot n = \underbrace{m + \ldots + m}_{n \text{ слагаемых}}.$$

Таким образом, для того, чтобы умножить *m* на *n,* нужно взять число *m* в качестве слагаемого *n* раз, т.е. результат увеличится в *n* раз.



Произведение данного числа *m* на обыкновенную дробь *p/q*

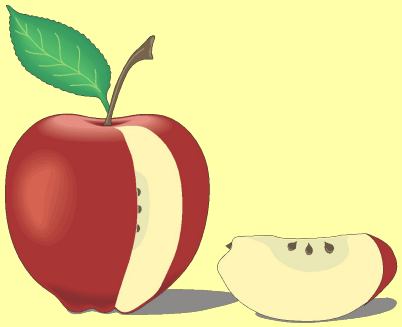
Эту операцию мы связываем с вычислением *«пэ-кутой»* части от числа *m*.

Как это сделать на практике?

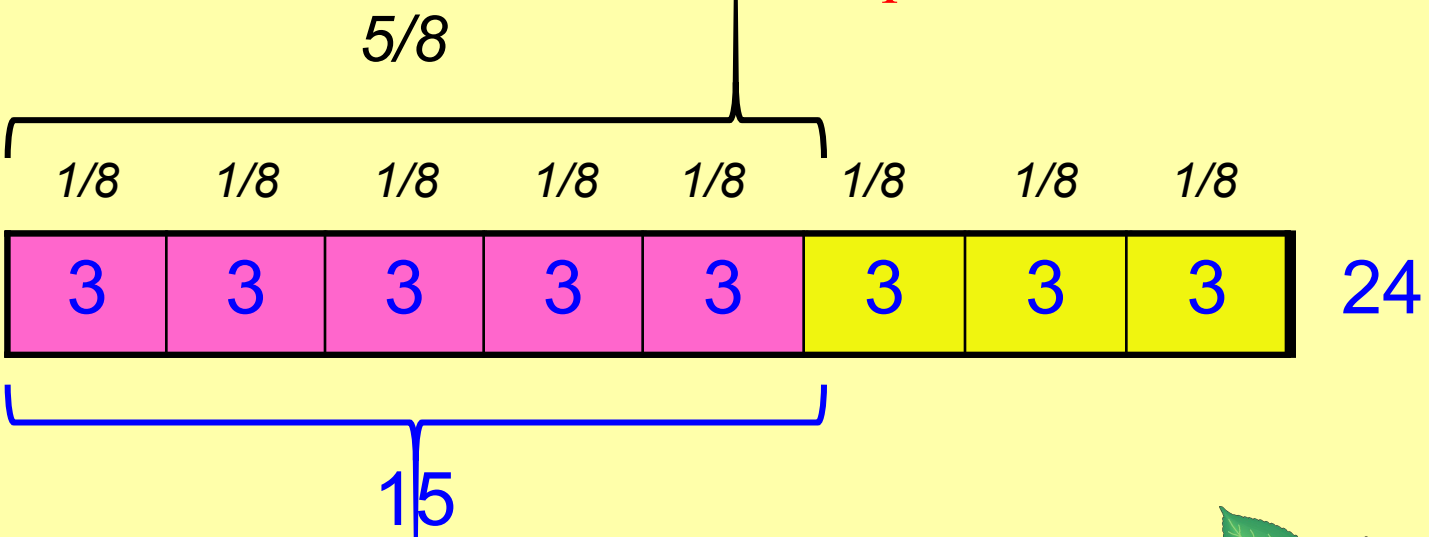
Рассмотрим конкретный пример.

Пусть требуется найти *5/8* частей от числа *24*.

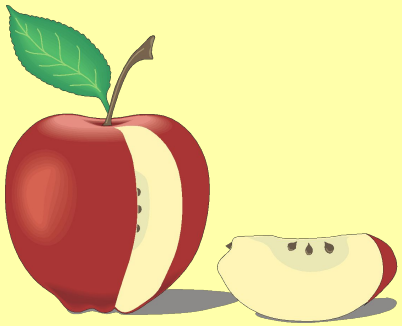
Для этого необходимо разделить число *24* на *8* равных частей и взять *5* из них.



Проиллюстрируем вычисление 5/8 частей от числа 24 графически. Изобразим число *24* в виде прямоугольника, разделим его на *8* равных частей, каждая из которых составляет *1/8* часть числа *24* и равна *24 : 8 = 3*.



Выделим пять восьмых частей числа *24*. Они составят *3 · 5 =15*.



Задача №1. Найти произведение данного числа *24* на обыкновенную дробь *5/8*.

Анализ: *Чтобы решить эту задачу, необходимо, как было показано выше, найти 5/8 частей от числа 24.*

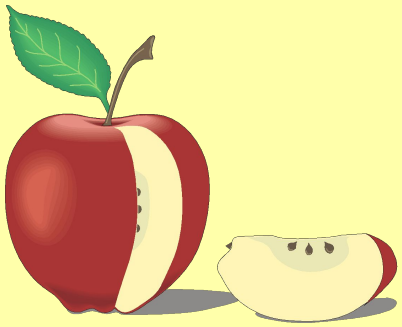
Решение.

$$24 \cdot \frac{5}{8} = (24 : 8) \cdot 5 = \frac{24 \cdot 5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{1} = 15.$$

Примечание. *Оформляя решение, мы учитывали, что двоеточие и дробная черта являются равноправными знаками деления.*

Вывод:

Мы убеждаемся, что при умножении числа *24* на дробь *5/8* получается число *15*, которое меньше, чем *24*.



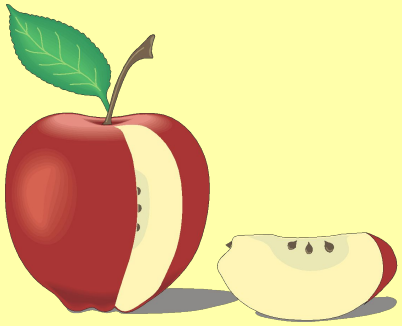
Задача №2. Найти *5/8* частей от числа *24*.

Анализ: *Мы определили умножение данного числа на дробь как нахождение части числа, соответствующей данной дроби. Очевидно, что справедливо и обратное, т. е., например, чтобы найти 5/8 частей от числа 24, нужно умножить 24 на дробь 5/8.*

Решение.

$$24 \cdot \frac{5}{8} = \frac{24 \cdot 5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{1} = 15.$$

Ответ: *5/8 частей числа 24 равны 15.*



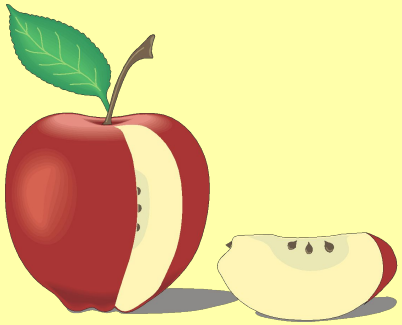
Определение произведения двух дробей

Мы уже выяснили, что для умножения числа ***m*** на дробь ***p/q*** необходимо разделить ***m*** на знаменатель ***q*** и умножить на числитель ***p***:

$$m \cdot \frac{p}{q} = (m : q) \cdot p = \frac{m \cdot p}{q}.$$

Если число ***m*** также является дробью вида ***k/l***, то его произведение на дробь ***p/q*** примет следующий вид:

$$\frac{k}{l} \cdot \frac{p}{q} = \frac{k \cdot p}{l \cdot q}.$$



Частное от деления данного числа *m* на обыкновенную дробь *p/q*

Эту операцию мы связываем с восстановлением значения числа ***M***, для которого *m* является его *«пэ-кутой»* частью.

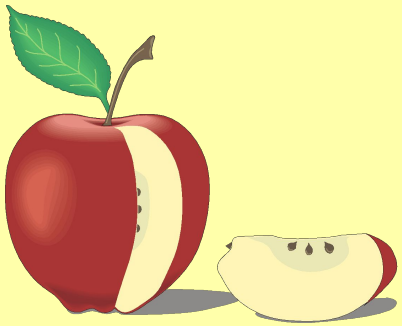
Рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется найти число *M*, *3/7* части которого равны *12*.

1) Для решения этой задачи необходимо разделить число *12* на *3* равные части. При этом мы узнаем, чему равна одна седьмая часть искомого числа: $12 : 3 = 4$.

2) Все число *M* состоит из семи седьмых частей, поэтому $M = 4 \cdot 7 = 28$.

Итак, $M = 12 : \frac{3}{7} = (12 : 3) \cdot 7 =$

$$= \frac{12 \cdot 7}{3} = \frac{4 \cdot 7}{1} = 28.$$



Выводы:

1. В результате деления числа *12* на правильную дробь *3/7* получилось число *28*, которое больше, чем *12*.

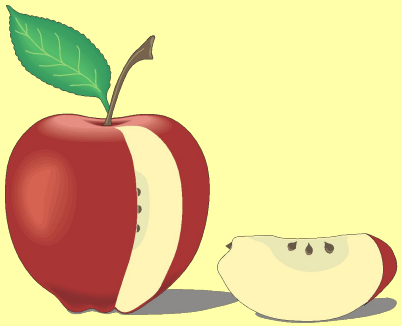
2. Правило деления числа *m* на дробь *p/q:*

$$m : \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{p} = m \cdot \frac{q}{p}.$$

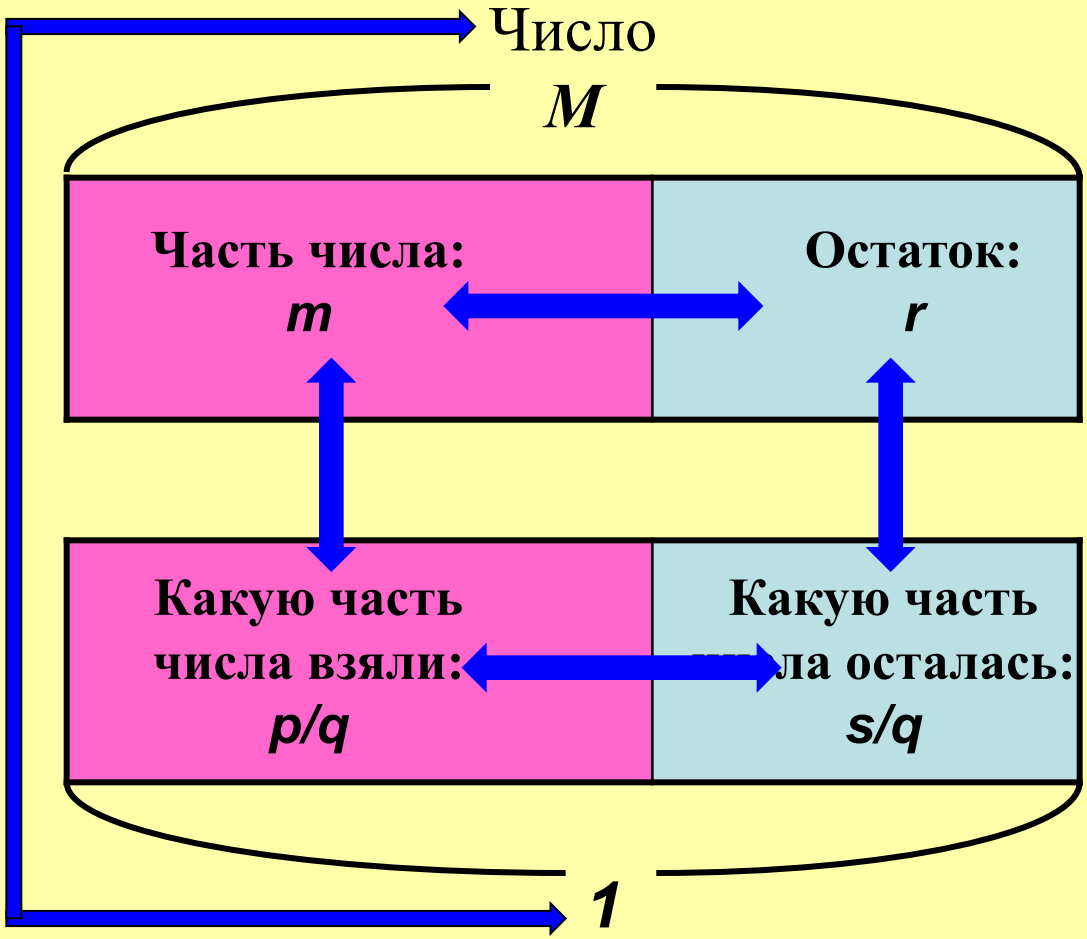
3. Правило деления дроби *m/n* на дробь *p/q:*

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}.$$

4. Для того, чтобы восстановить число M, если известно, что «пэ-кутая» часть этого числа равна m, необходимо разделить m на дробь p/q: $M = m : \frac{p}{q}$.



Опорный сигнал «Задачи на части»

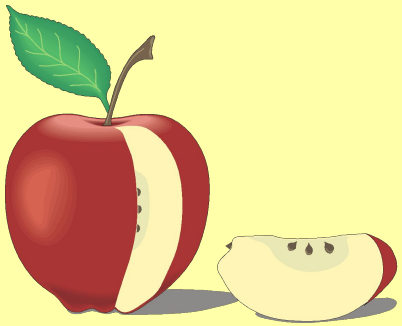


1. $m = M \cdot p/q$; $M = m : (p/q)$; $p/q = m/M$.

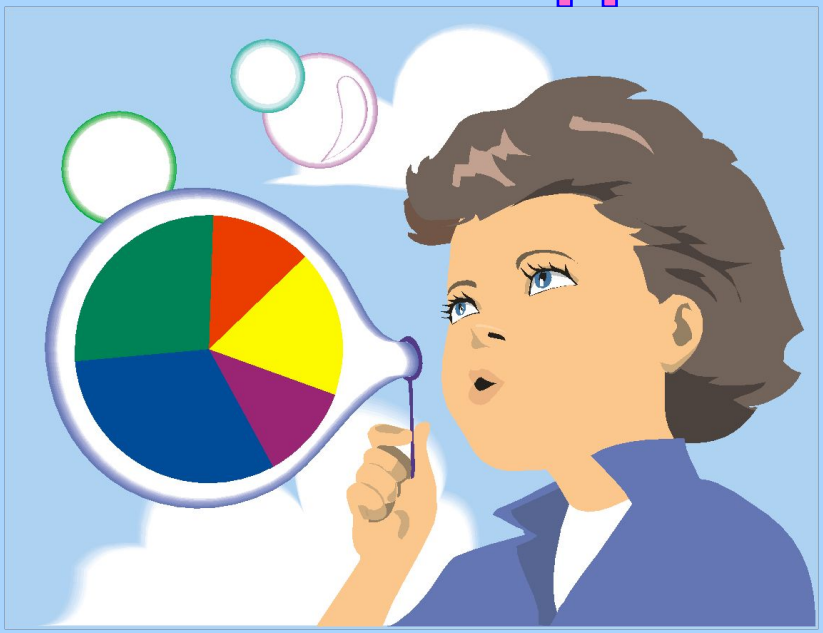
2. $r = M \cdot s/q$; $M = r : (s/q)$; $s/q = r/M$.

3. $m = M - r$; $r = M - m$; $M = m + r$.

4. $p/q + s/q = 1$; $p/q = 1 - s/q$; $s/q = 1 - p/q$.



ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЧАСТИ

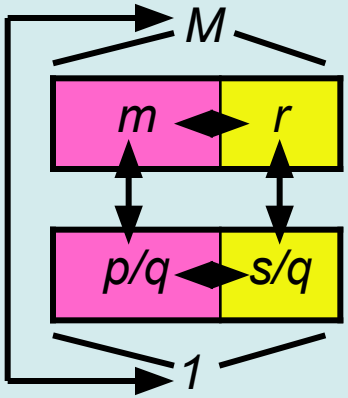


Задача №3.

Масса медно-никелевого сплава *M=7,7 кг*. Найдите массу меди *m* и массу никеля *r* в отдельности, если масса меди составляет *p/q = 5/11* частей от массы сплава. Какую часть (*s/q*) массы сплава составляет масса никеля?

Краткое условие

Дано: *M = 7,7 кг; p/q = 5/11.*
Найти: *m, r, s/q.*



Решение.

1) $m = M \cdot \frac{p}{q} = 7{,}7 \cdot \frac{5}{11} = \frac{77}{10} \cdot \frac{5}{11} =$

$= \frac{77 \cdot 5}{10 \cdot 11} = \frac{7}{2} = 3{,}5\ (кг);$

2) *r = M – m = 7,7 – 3,5 = 4,2 (кг);*

3) *s/q = r : M = 4,2 : 7,7 = 6/11.*

Проверка: *p/q + s/q = 5/11 + 6/11 =11/11 = 1.*

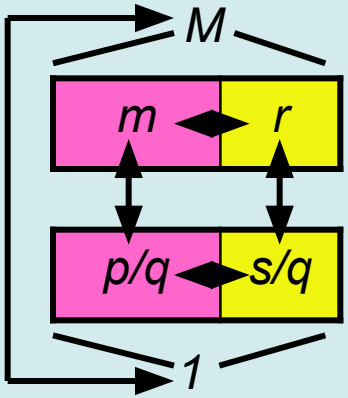
Ответ: *m = 3,5 кг; r = 4,2 кг; s/q = 6/11.*

Задача №4.

Найдите массу медно-никелевого сплава *M* и массу меди *m*, если масса меди составляет *p/q = 5/11* частей от массы сплава, а масса никеля равна *r = 4,2 кг*. Какую часть (*s/q*) массы сплава составляет масса никеля?

Краткое условие

Дано: *r = 4,2 кг;*
p/q = 5/11.
Найти: *M, m, s/q.*



Решение.

1) *s/q = 1 – p/q = 1 – 5/11 = 6/11;*

2) $M = r : \frac{s}{q} = 4{,}2 : \frac{6}{11} = \frac{42}{10} : \frac{6}{11} =$

$= \frac{21}{5} : \frac{6}{11} = \frac{21 \cdot 11}{5 \cdot 6} = \frac{7 \cdot 11}{5 \cdot 2} = \frac{77}{10} = 7{,}7\ (кг);$

3) *m = M – r = 7,7 – 4,2 = 3,5 (кг).*

Проверка: *m : M = 3,5 : 7,7 = 5/11 = p/q.*

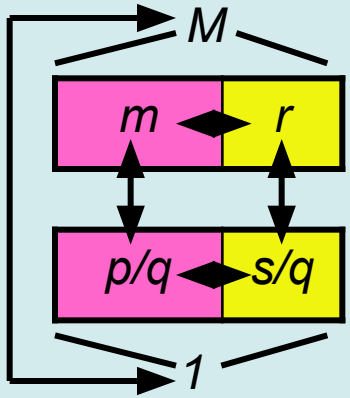
Ответ: *M = 7,7 кг; m = 3,5 кг; s/q = 6/11.*

Задача №5.

Найдите массу медно-никелевого сплава *M,* если масса меди *m=3,5 кг,* масса никеля *r = 4,2 кг.* Какую часть (*p/q*) масса меди и какую часть (*s/q*) масса никеля составляют от массы сплава?

Краткое условие

Дано: *m = 3,5 кг;*
r = 4,2 кг.
Найти: *M, p/q, s/q.*



Решение.

1) $M = m + r = 3,5 + 4,2 = 7,7$ (кг);

2) $p/q = m : M = 3,5 : 7,7 = 5/11$;

3) $s/q = r : M = 4,2 : 7,7 = 6/11$.

Проверка: $p/q + s/q = 5/11 + 6/11 = 1$.

Ответ: $M = 7,7$ кг; $p/q = 5/11$; $s/q = 6/11$.

Список параметров для конструирования задач на части и варианты условий, получаемых из их комбинаций

№	Число (M)	Часть числа (m)	Остаток (r)	Какую часть числа взяли (p/q)	Какая часть числа осталась (s/q)
6	16	12	4	3/4	1/4
6.1	**16**	**?**	**?**	**3/4**	**?**
6.2	**16**	**?**	**?**	**?**	**1/4**
6.3	**?**	**12**	**?**	**3/4**	**?**
6.4	**?**	**12**	**?**	**?**	**1/4**
6.5	**16**	**?**	**4**	**?**	**?**
6.6	**?**	**12**	**4**	**?**	**?**

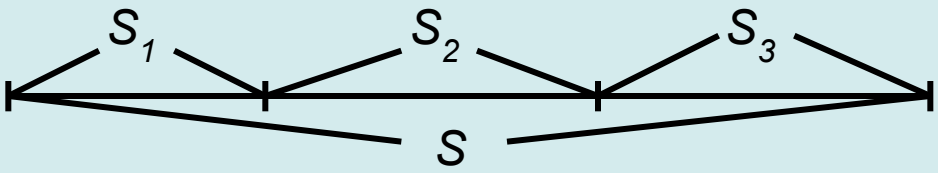
Списки параметров для конструирования задач на части

№	Число (M)	Часть числа (m)	Остаток (r)	Какую часть числа взяли (p/q)	Какая часть числа осталась (s/q)
7	30	18	12	3/5	2/5
8	36	15	21	5/12	7/12
9	14/15	2/5	8/15	3/7	4/7
10	1,6	0,48	1,12	3/10	7/10
11	39,6	8,4	31,2	7/33	26/33
12	4,62	0,9	3,72	15/77	62/77
13	85/12	51/14	289/84	18/35	17/35
14	98/15	35/9	119/45	25/42	17/42
15	51/14	9/4	39/28	21/34	13/34

Пример решения задачи о трехдневном пути

Задача № 16.

Турист прошел в 1-й день 9/25 всего пути, во 2-й день — на 6 км больше, чем в 1-й день. Чему равен весь путь (S), и сколько километров было пройдено в 1-й и 2-й дни пути отдельно (S_1 и S_2), если в 3-й день турист прошел S_3 =15 км?



Решение.

1) Примем за x путь S, пройденный туристом за 3 дня.
Тогда $S_1 = 9/25\ x$, $S_2 = 9/25\ x + 6$.

2) Так как $S = S_1 + S_2 + S_3$, *то можем составить уравнение:*
$x = 9/25\ x + (9/25\ x + 6) + 15$, *решая которое, получаем:* $x = 75$.

3) Итак, $S = 75$ *км,* $S_1 = 9/25 \cdot 75 = 27$ *(км),* $S_2 = 27 + 6 = 33$ *(км).*

Проверка: $S_1 + S_2 + S_3 = 27 + 33 + 15 = 75$ *(км)* $= S$.

Ответ: $S = 75$ *км,* $S_1 = 27$ *км,* $S_2 = 33$ *км.*

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 17.

Турист прошел в 1-й день 7/17 трехдневного пути, во 2-й день — 6/7 пути, пройденного в 1-й день. Чему равен весь путь (S), и сколько километров было пройдено в 1-й, 2-й и 3-й дни отдельно (S_1, S_2 и S_3), если в 3-й день турист прошел на 10 км меньше, чем во 2-й?

Задача № 18.

Турист прошел в 1-й день на 4 км меньше, чем во 2-й день, а в 3-й день — 2/5 пути, пройденного за два первых дня вместе. Сколько километров было пройдено в 1-й, 2-й и 3-й дни пути отдельно (S_1, S_2 и S_3), если всего за три турист прошел путь S = 84 км?

Задача № 19.

Турист прошел во 2-й день пути на 6 км больше, чем в 1-й день, а в 3-й день — 7/8 пути, пройденного во 2-й день. Сколько километров было пройдено в 1-й, 2-й и 3-й дни пути отдельно (S_1, S_2 и S_3), если всего за три турист прошел путь S = 86 км?

Ответы: *1) 85 км, 35 км, 30 км, 20 км. 2) 28 км, 32 км, 24 км.*
3) 26 км, 32 км, 28 км.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эрдниев П.М.* **Преподавание математики в школе. (Из опыта обучения методом укрупненных упражнений).** — М.: «Просвещение», 1978. — 304 с.

2. *Б.И. Вольфсон, В.М. Поркшеян, Л.И. Резницкий, С. М. Хартиев.* **Готовимся к экзамену по математике: Пособие-репетитор для старшеклассников и абитуриентов. — 4-е изд., доп. и перераб. —** Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. — 462 с. С. 19 – 26, 188 – 218.

3. *Вольфсон Б. И.* **Формирование семейств модифицируемых многопараметрических задач.** // Развивающие программы и методики работы с одаренными детьми. Сборник программ лауреатов 1 областного конкурса программ и методик работы с одаренными детьми. — Ростов-на-Дону, 2000. —160 с. С. 46 – 58.