

Веревкина А.В.

Разложение электромагнитного  
поля резонатора по  
пространственно  
локализованным базисным  
функциям

Харьков - 2008

Электромагнитные взаимодействия описаны в терминах трехмерного (скалярно-векторного) потенциального формализма, Для краткости все уравнения приведены для векторного потенциала  $\vec{A}(t, x, y, z)$

Уравнение Д'Аламбера:

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Уравнение непрерывности тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Переход к полевому формализму:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

В работе исследуется прямоугольный резонатор с однородными граничными условиями (ГУ) первого, второго рода или периодичности на всех границах для всех составляющих потенциала

Решение уравнения Д'Аламбера осуществляется путем разложения потенциала в ряд по базисным функциям резонатора, зависящим от пространственных координат

Основным приближением модели является финитность спектра потенциала в области волновых чисел, обеспечивающая конечность указанного ряда

$$\left| \overset{\mathbb{N}}{k} \right| \leq k_{max} < \infty \quad \overset{\mathbb{N}}{A}(t, x, y, z) = \mathbf{u}_g(t) \overset{\mathbb{N}}{\mathbf{A}}_g(x, y, z)$$

Наиболее известными базисными функциями являются собственные функции резонатора, определяемые как решения задачи о собственных значениях для оператора Лапласа  $-\Delta^2$  :

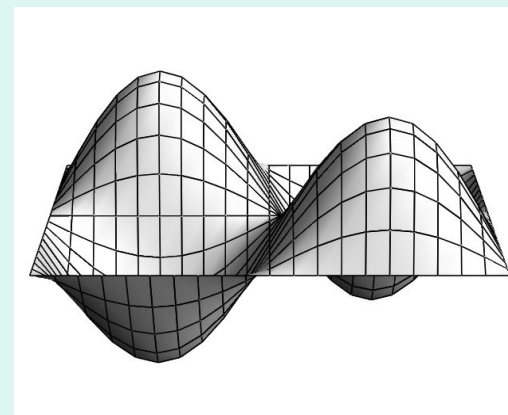
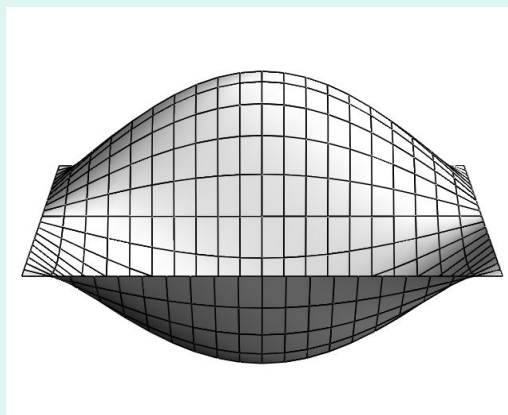
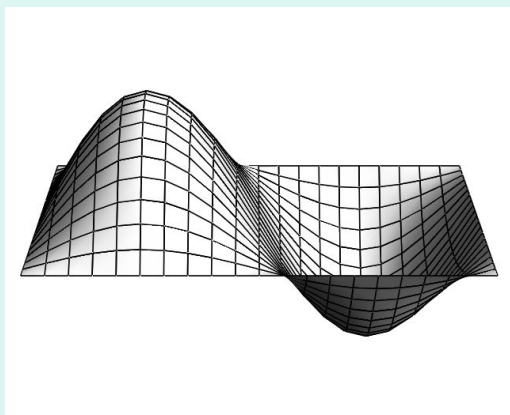
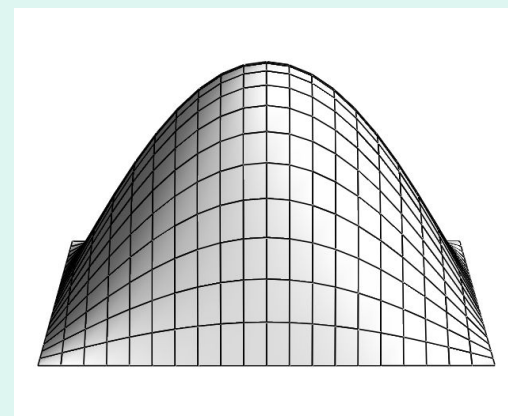
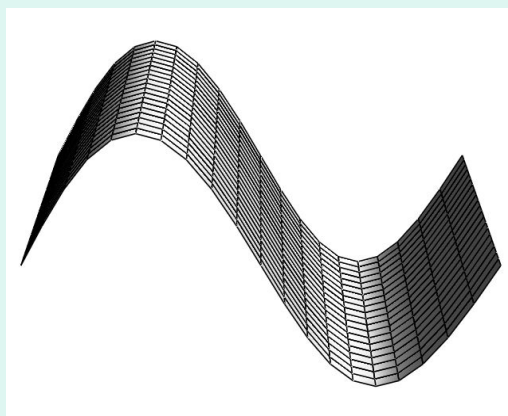
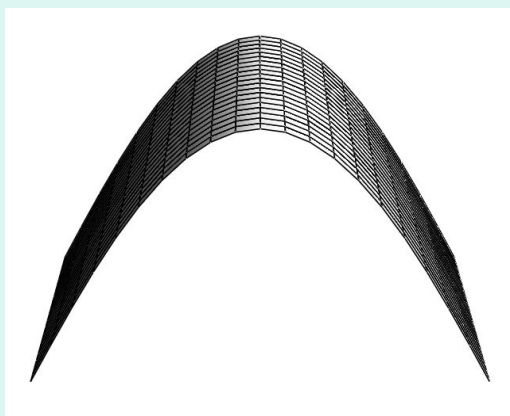
$$\nabla^2 A_{em} + k_{em}^2 A_{em} = 0, \quad m = 0 \dots N - 1$$

Условие ортогональности собственных функций:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V dx dy dz A_{em} A_{em'}^* = \begin{cases} 0 & \text{для } m' \neq m \\ W_{em} & \text{для } m' = m \end{cases}$$

Ряд по собственным функциям называется рядом Фурье. Поскольку уравнение Д'Аламбера допускает разделение переменных, без ограничения общности далее можно рассматривать двух- или одномерную колебательную систему

# Примеры собственных функций двумерного прямоугольного резонатора:



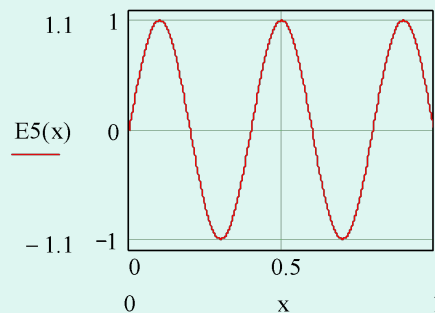
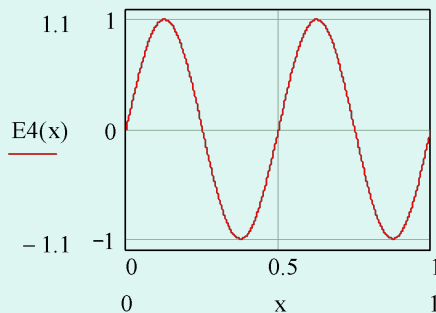
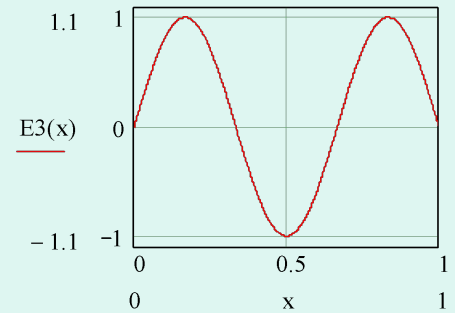
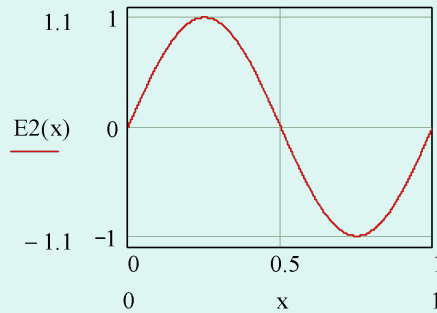
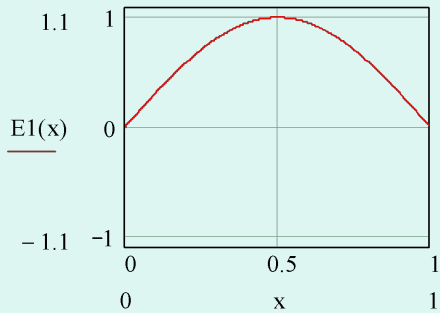
Эквивалент уравнения Д'Аламбера при разложении потенциала по собственным функциям:

$$\tilde{W}_{em} \frac{d^2 u_{em}}{dt^2} + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \tilde{W}_{em} k_{em}^2 u_{em} = \frac{1}{2} \int_V dx dy dz A_{em} \dot{j}$$

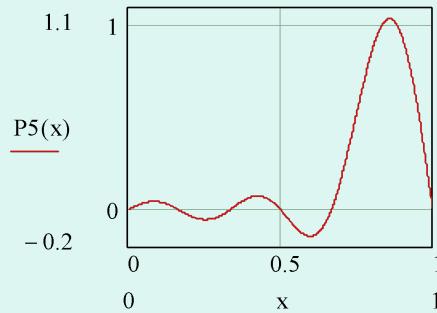
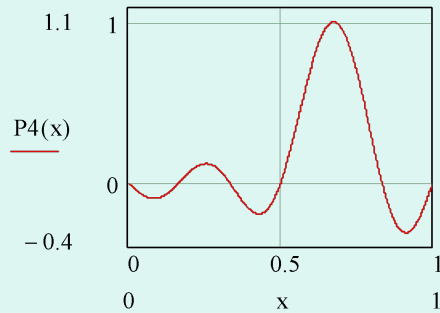
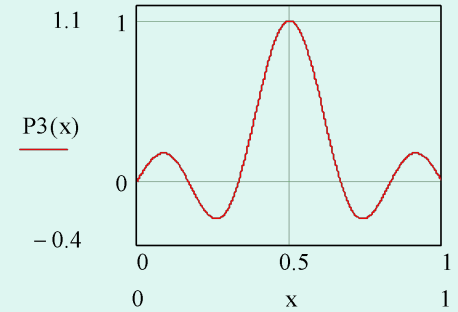
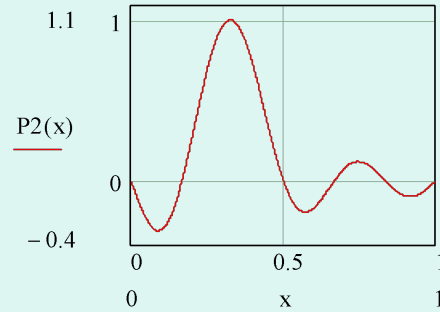
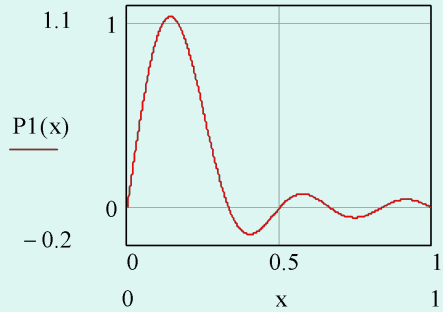
Достоинство собственных функций – ортогональность, позволяющая решать задачу о собственных значениях независимо для каждой из функций.

Недостаток – распределенность в пространстве, приводящая к медленной сходимости ряда Фурье для потенциала коротких (сверхширокополосных) электромагнитных импульсов

Парциальные функции определяются как локализованные в пространстве линейные комбинации собственных функций колебательной системы. Первые 5 собственных функций одномерной колебательной системы с однородными ГУ первого рода:



## 5 линейных комбинаций собственных функций:



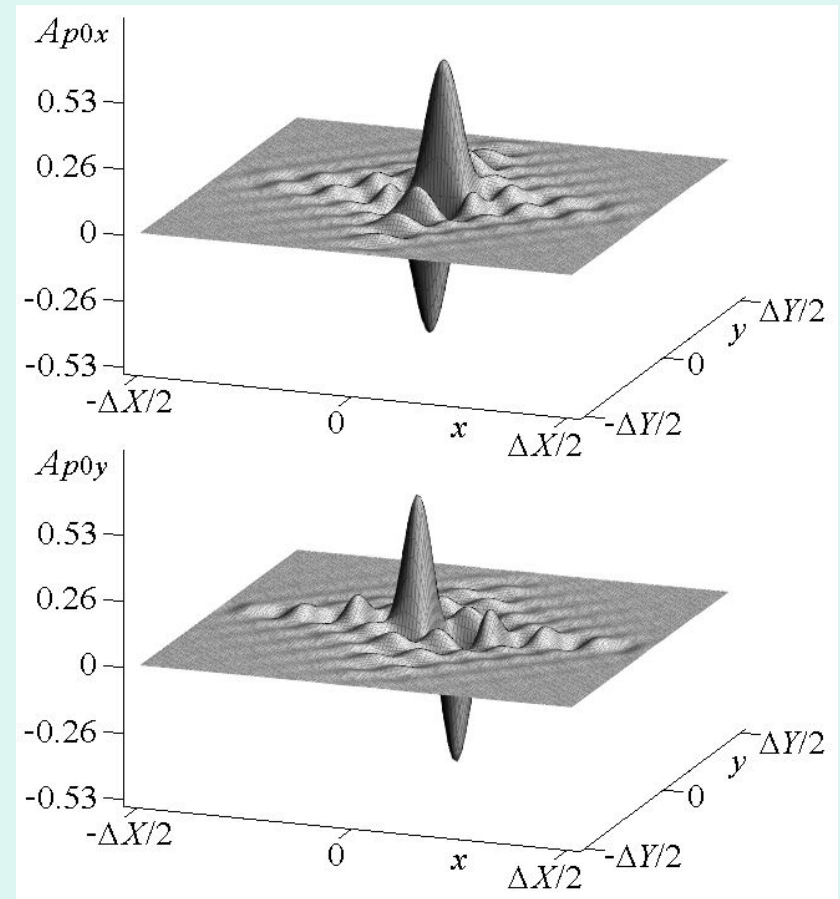
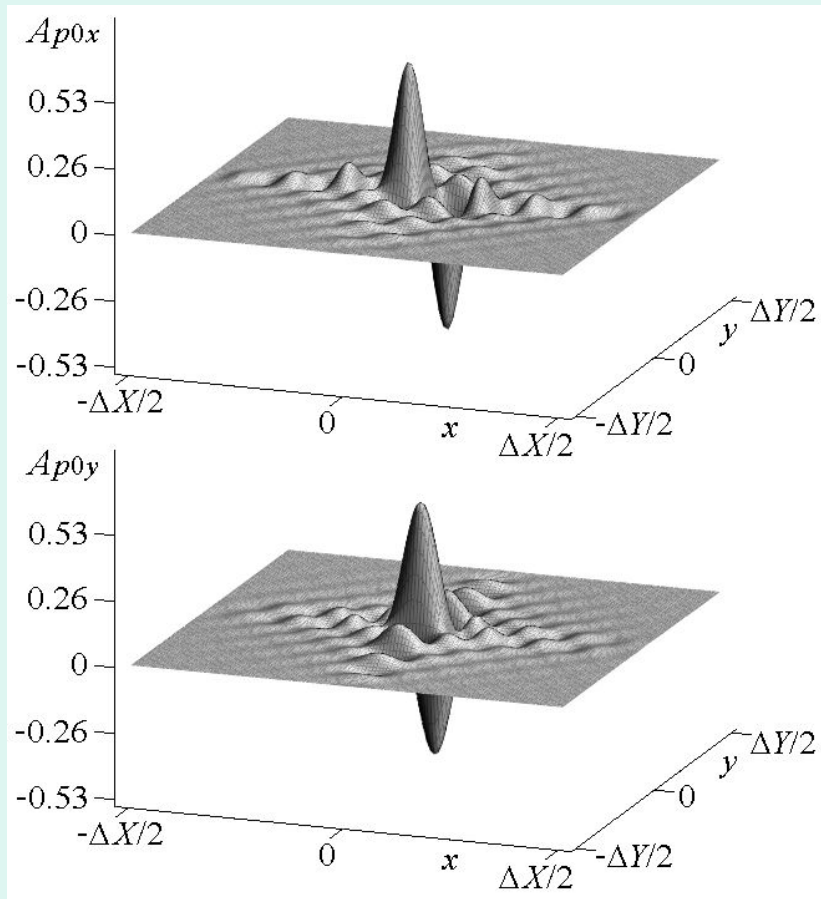
Взаимные преобразования собственных и  
парциальных функций:

$$\mathbf{A}_e = [F] \mathbf{A}_p$$

$$\mathbf{A}_p = [F]^{-1} \mathbf{A}_e$$



# Примеры парциальных функций двумерного прямоугольного резонатора:



Парциальные функции можно определить также как локализованные в пространстве решения задачи о взаимных значениях для оператора Лапласа  $-\square^2$  :

$$\nabla^2 \mathbf{A}_p^{\square} + [k_p^2] \mathbf{A}_p^{\square} = 0$$

Задача о  $m$ -м собственном значении матрицы  $N \times N$  взаимных волновых чисел парциальных осцилляторов ( $m = 0 \dots N - 1$ ) :

$$[k_p^2] \mathbf{F}_{em} = k_{em}^2 \mathbf{F}_{em}$$

$\mathbf{F}_{em}$  –  $m$ -й собственный вектор матрицы взаимных волновых чисел, он же  $m$ -я строка матрицы  $[F]$

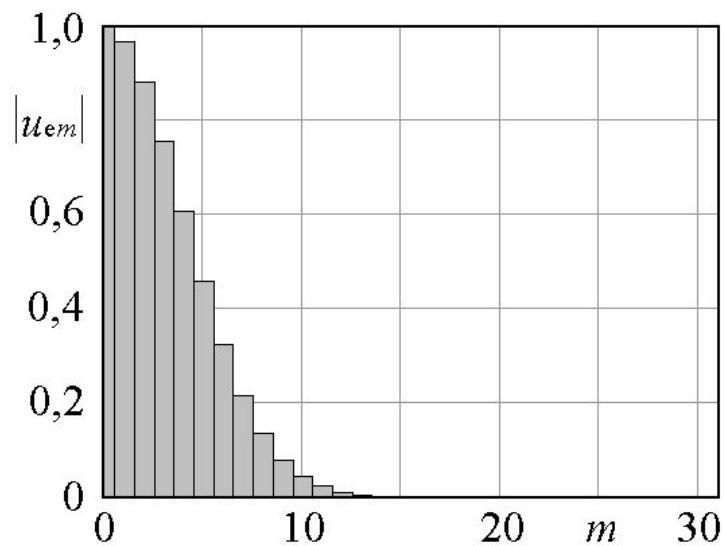
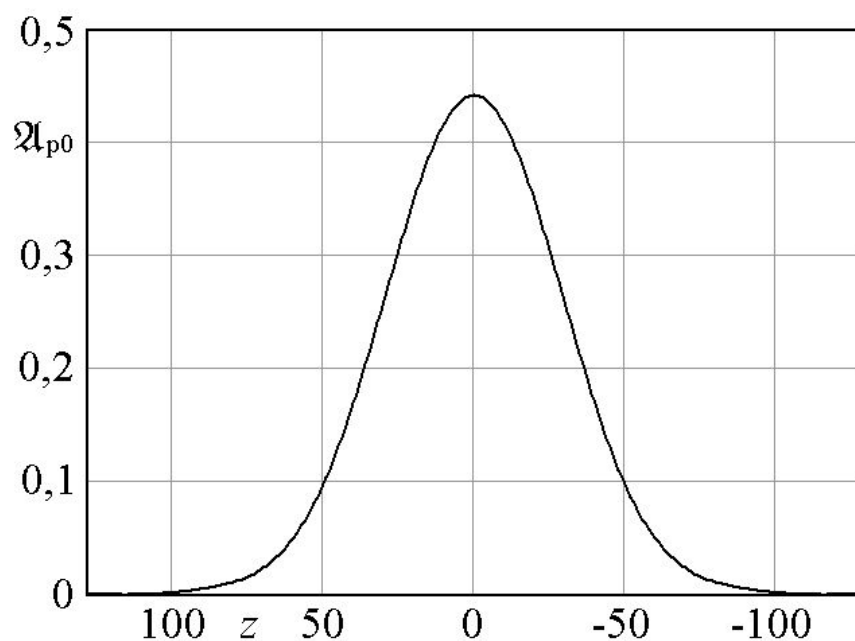
Расчет матрицы взаимных значений:

$$[\tilde{W}_p] = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V dx dy dz \mathbf{A}_p \mathbf{A}_p^T$$

$$[W_p] = \frac{1}{2\mu_0} \int_V dx dy dz (-\nabla^2 \mathbf{A}_p) \mathbf{A}_p^T$$

$$[k_p^2] = \varepsilon_0 \mu_0 [W_p] [\tilde{W}_p]^{-1}$$

Ограниченная в пространстве парциальная функция  
одномерной колебательной системы и ее спектр в  
базисе собственных функций этой системы:



## Собственные значения одномерной колебательной системы с периодическими ГУ:

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>0</b>	<b>+0,0000000</b>	<b>+0,0000000</b>	<b>+0,0000004</b>
<b>1</b>	<b>+0,0000376</b>	<b>+0,0000377</b>	<b>+0,0000377</b>
<b>2</b>	<b>+0,0000376</b>	<b>+0,0000377</b>	<b>+0,0000383</b>
<b>3</b>	<b>+0,0001506</b>	<b>+0,0001506</b>	<b>+0,0001507</b>
<b>4</b>	<b>+0,0001506</b>	<b>+0,0001506</b>	<b>+0,0001510</b>
<b>5</b>	<b>+0,0003388</b>	<b>+0,0003388</b>	<b>+0,0003389</b>
<b>6</b>	<b>+0,0003388</b>	<b>+0,0003388</b>	<b>+0,0003391</b>
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>
<b>27</b>	<b>+0,0073793</b>	<b>+0,0073789</b>	<b>+0,0073946</b>
<b>28</b>	<b>+0,0073793</b>	<b>+0,0073789</b>	<b>+0,0074361</b>
<b>29</b>	<b>+0,0084711</b>	<b>+0,0085766</b>	<b>+0,0085294</b>
<b>30</b>	<b>+0,0084711</b>	<b>+0,0085766</b>	<b>+0,0087103</b>
<b>31</b>	<b>+0,0096383</b>	<b>+0,0096353</b>	<b>+0,0096803</b>

Собственные значения одномерной колебательной системы с ГУ второго рода:

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>0</b>	<b>+0,0000000</b>	<b>+0,0000000</b>	<b>+0,0000003</b>
<b>1</b>	<b>+0,0000094</b>	<b>+0,0000094</b>	<b>+0,0000096</b>
<b>2</b>	<b>+0,0000376</b>	<b>+0,0000377</b>	<b>+0,0000380</b>
<b>3</b>	<b>+0,0000847</b>	<b>+0,0000849</b>	<b>+0,0000852</b>
<b>4</b>	<b>+0,0001506</b>	<b>+0,0001509</b>	<b>+0,0001509</b>
<b>5</b>	<b>+0,0002353</b>	<b>+0,0002358</b>	<b>+0,0002358</b>
<b>6</b>	<b>+0,0003388</b>	<b>+0,0003395</b>	<b>+0,0003396</b>
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>
<b>28</b>	<b>+0,0073793</b>	<b>+0,0073894</b>	<b>+0,0073958</b>
<b>29</b>	<b>+0,0079158</b>	<b>+0,0079417</b>	<b>+0,0079668</b>
<b>30</b>	<b>+0,0084711</b>	<b>+0,0085696</b>	<b>+0,0085492</b>
<b>31</b>	<b>+0,0090453</b>	<b>+0,0092720</b>	<b>+0,0093444</b>
<b>32</b>	<b>+0,0096383</b>	<b>+0,0096507</b>	<b>+0,0096766</b>