

Институт систем обработки изображений РАН



**Интегральные представления решения  
системы уравнения Максвелла в виде  
спектра поверхностных  
электромагнитных волн**

# Авторский коллектив



**Н.Л.Казанский,**  
д.ф.-м.н

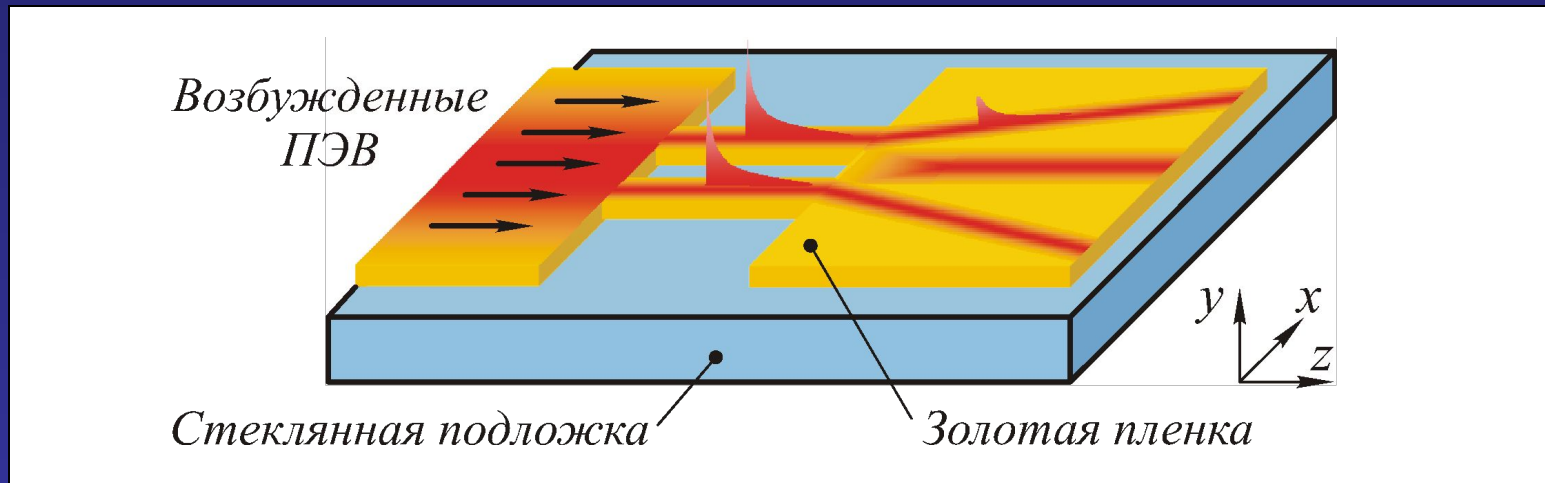


**Л.Л.Досколович,**  
д.ф.-м.н



**С.И.Харитонов,**  
к.ф.-м.н

# Постановка задачи



[1] Barnes W L, Dereux A and Ebbesen T W 2003 Surface plasmon subwavelength optics *Nature* 424 824-30

[2] Berini P, Charbonneau R and Lahoud N 2007 Long-range surface plasmons on ultrathin membranes *Nano Lett.* 7 1376-80

[3] Lee I M, Jung J, Park J, Kim H and Lee B 2007 Dispersion characteristics of channel plasmon polariton waveguides with step-trench-type grooves *Opt. Express* 15 16596-603

## Уравнения поверхностных волн

$$\mathbf{E}(x, y, z) = F(y, z) \exp(ik_0 a x),$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = G(y, z) \exp(ik_0 a x), \quad (1)$$

$$\text{curl}(\mathbf{H}) = -ik_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad \text{curl}(\mathbf{E}) = ik_0 \mathbf{H}, \quad (2)$$

$$F_y = \frac{-1}{ik_0(e^{-a^2})} \frac{\partial G_x}{\partial z} + a \frac{\partial G_x}{\partial y}$$

$$F_z = \frac{1}{ik_0(e^{-a^2})} \frac{\partial G_x}{\partial y} - a \frac{\partial G_x}{\partial z}$$

$$G_y = \frac{1}{ik_0(e^{-a^2})} \frac{\partial F_x}{\partial z} - a \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$G_z = \frac{-1}{ik_0(e^{-a^2})} \frac{\partial F_x}{\partial y} + a \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

(3)

# Дисперсионное уравнение

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} + k_0^2(e - a^2)F_x = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial z^2} + k_0^2(e - a^2)G_x = 0.$$

$$G_x^{(j)}(y, z) = h_j \exp(ik_0bz) \exp(-k_0g_j \operatorname{sgn}(y)y), \quad (5)$$

$$F_x^{(j)}(y, z) = e_j \exp(ik_0bz) \exp(-k_0g_j \operatorname{sgn}(y)y),$$

$$\frac{g_1}{w_1} + \frac{g_2}{w_2} e_1 g_1 + \frac{e_2 g_2}{w_2} - a^2 b^2 \frac{e_1}{w_1} - \frac{1}{w_2} = 0 \quad (6)$$

# Интегральные представления в виде спектра поверхностных волн

$$G_x(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(a) \exp(ik_0 a x) \exp(ik_0 b(a) z) da \quad (7)$$

$$I(a) = \frac{k_0}{2\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(x, 0) \exp(-ik_0 a x) dx \quad (8)$$

$$G_x(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(u, 0) G(x - u, z) du \quad (9)$$

$$G(x, z) = \frac{k_0}{2\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_0 a x) \exp(ik_0 b(a) z) da \quad (10)$$

# Интеграл Кирхгофа для поверхностных плазмонов

$$\begin{aligned}
 G(x, z) &= \frac{1}{2\rho} \dot{O}_{\mp}^{+\mp} \exp\left(i\left(xh + \sqrt{k_{\text{spp}}^2 - h^2}z\right)\right) dh = \\
 &= \frac{ik_{\text{spp}}z}{2\sqrt{x^2 + z^2}} H_1^{(1)}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right) K_{\text{spp}} \sqrt{x^2 + z^2}
 \end{aligned} \tag{11}$$

# Асимптотические представления для функции Грина

$$G(x, z) = \sqrt{\frac{ik_{spp}}{2p\sqrt{x^2 + z^2}}} \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \exp\left(ik_{spp}\sqrt{x^2 + z^2}\right) \quad (12)$$

Приближение Френеля

$$G(x, z) = \sqrt{\frac{ik_{spp}}{2pz}} \exp(ik_{spp}z) \exp\left(\frac{ik_{spp}x^2}{2z}\right) \quad (13)$$

Приближение Фраунгофера

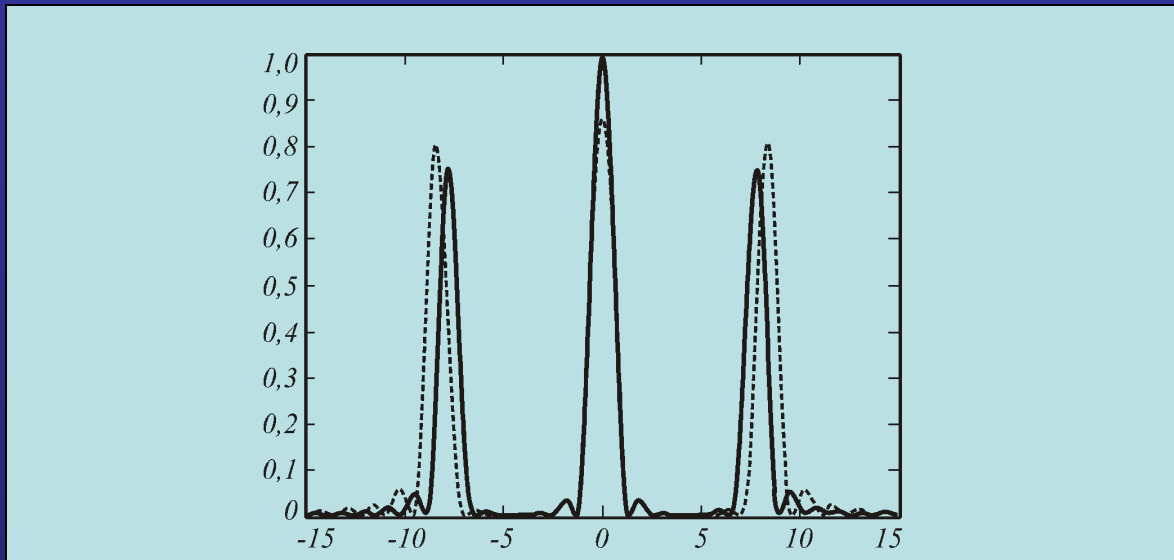
$$G_x(x, z) = \exp(ik_{spp}z) \exp\left(\frac{ik_{spp}x^2}{2z}\right) \sqrt{\frac{ik_{spp}}{2pz}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(u, 0) \exp\left(\frac{ik_{spp}xu}{z}\right) du \quad (14)$$



# Дифракция плазмонов на периодической решетке

$$H_x(x, z) = \exp(ik_{\text{spp}}z) \exp\left[\frac{ik_{\text{spp}}x^2}{2z}\right] \sqrt{\frac{ik_{\text{spp}}}{2pz}} 2R \sum_n c_n \operatorname{sinc}\left[\frac{2pn}{d} - \frac{k_{\text{spp}}x}{z}\right]$$

(15)



# Конические поверхностные плазмоны

Решение в первой среде

$$E_z = a_e Z_m(k\beta r) \exp(k\gamma_1 z) \exp(im\varphi) = a_e Q(r, \varphi) \exp(k\gamma_1 z) \quad (1a)$$

Решение во второй среде

$$E_z = b_e Z_m(k\beta r) \exp(-k\gamma_2 z) \exp(im\varphi) = b_e Q(r, \varphi) \exp(-k\gamma_2 z) \quad (2a)$$

$$E_r^i = \mp \frac{k}{\Delta(\gamma_i)} \gamma_i \frac{a_e \partial Q}{\partial r} \exp(\mp k\gamma_i z) \quad H_r^i = \frac{k}{\Delta(\gamma_i)} \frac{m\varepsilon_i a_e Q}{r} \exp(\mp k\gamma_i z) \quad (3a)$$

$$E_\varphi^i = \mp \frac{ik}{\Delta(\gamma_i)} \frac{m\gamma_i a_e Q}{r} \exp(\mp k\gamma_i z) \quad H_\varphi^i = \frac{ik}{\Delta(\gamma_i)} \varepsilon_i \frac{a_e \partial Q}{\partial r} \exp(\mp k\gamma_i z)$$

$$\Delta(\gamma_i) = k^2 \gamma_i^2 + k^2 \varepsilon \quad (4a)$$

# Дисперсионное уравнение для конических поверхностных плазмонов

$$\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1 = 0 \quad (5a)$$

$$\beta = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (6a)$$

Общее решение в виде спектра конических плазмонов

$$E_z = \sum_{m=1}^{\infty} a_m Z_m(k\beta r) \exp(im\varphi) \quad (7a)$$

# Прохождение через тонкую диэлектрическую пленку

$$E_3(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(im\varphi) \int_0^{\infty} f^m(\beta) J_m(k\beta\rho) \exp\left(ik\sqrt{\varepsilon_1 - \beta^2}z\right) d\beta$$

$$T = \frac{\exp(ik\gamma_2 d)}{\left(\frac{1}{T_{12}} \frac{1}{T_{23}} + \frac{R_{23}}{T_{23}} \frac{R_{12}}{T_{12}} \exp(2ik\gamma_2 d)\right)} \quad (8a) \quad \gamma_i = \sqrt{\varepsilon_i - \beta^2}$$

$$\frac{1}{T_{23}} = \frac{\varepsilon_2 \left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} + \frac{\gamma_3}{\varepsilon_3}\right)}{2\gamma_2} \quad (9a)$$

$$\frac{R_{23}}{T_{23}} = \frac{\varepsilon_2 \left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} - \frac{\gamma_3}{\varepsilon_3}\right)}{2\gamma_2} \quad (10a)$$

$$R_{12} = \frac{\left(\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} - \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\right)}{\left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} + \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\right)} \quad \frac{R_{12}}{T_{12}} = \frac{\varepsilon_2 \left(\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} - \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\right)}{2\gamma_1} \quad T_{12} = \frac{2\gamma_1}{\varepsilon_1 \left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} + \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\right)}$$

# Анализ коэффициента прохождения

$$T = \frac{C}{\left( A(\beta_0^2 - \beta^2) + BC^2 \right)} \quad (11a) \quad A = \frac{\varepsilon_2}{4\gamma_2^0 T_{12}^0} \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\varepsilon_2 \varepsilon_2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_3}}{\tilde{2} \varepsilon_3 \varepsilon_3} \right)$$

$$B = \frac{R_{23}^0}{T_{23}^0} \frac{R_{12}^0}{T_{12}^0} \quad C = \exp(ik\gamma_2^0 d) \quad \beta_0 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_3 + \varepsilon_2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}$$

Условие максимального прохождения

$$\frac{1}{T_{12}} \frac{1}{T_{23}} + \frac{R_{23}}{T_{23}} \frac{R_{12}}{T_{12}} \exp(2ik\gamma_2 d) = 0$$

(12a)

