Институт систем обработки изображений РАН

ИСОИ РАН

Интегральные представления решения системы уравнения Максвелла в виде спектра поверхностных электромагнитных волн

2008

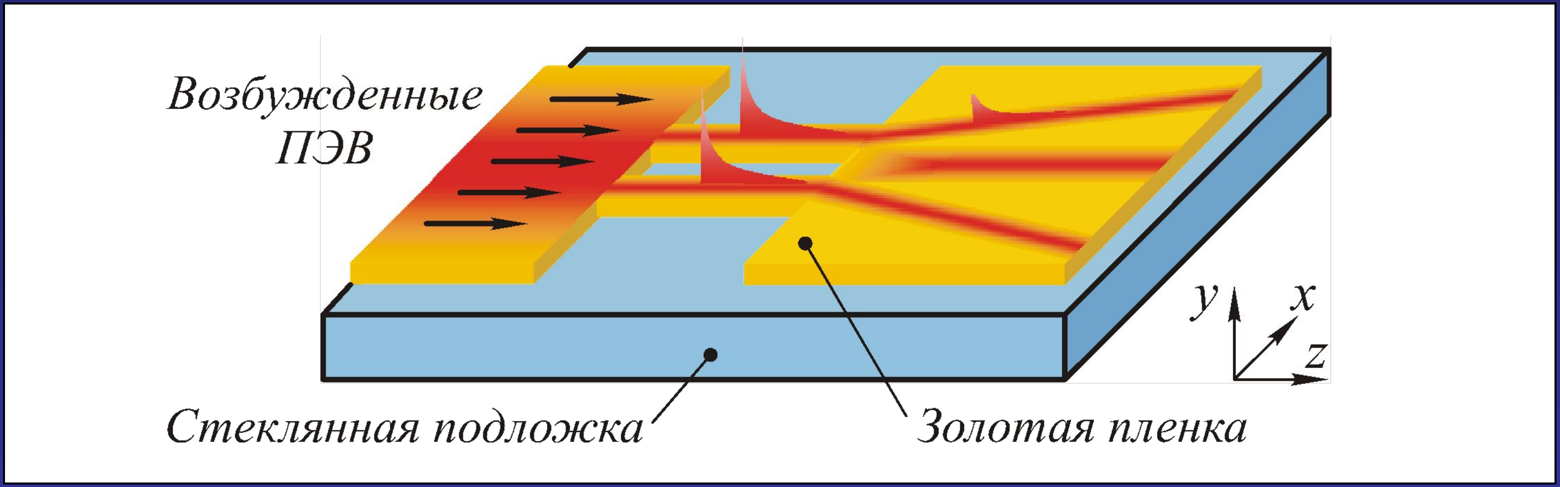
Авторский коллектив

Н.Л.Казанский,
д.ф.-м.н

Л.Л.Досколович,
д.ф.-м.н

С.И.Харитонов,
к.ф.-м.н

Постановка задачи



[1] Barnes W L, Dereux A and Ebbesen T W 2003 Surface plasmon subwavelength optics *Nature* 424 824-30

[2] Berini P, Charbonneau R and Lahoud N 2007 Long-range surface plasmons on ultrathin membranes *Nano Lett.* 7 1376-80

[3] Lee I M, Jung J, Park J, Kim H and Lee B 2007 Dispersion characteristics of channel plasmon polariton waveguides with step-trench-type grooves *Opt. Express* 15 16596-603

Уравнения поверхностных волн

$$\mathbf{E}(x,y,z) = F(y,z)\exp(ik_0\alpha x),$$

$$\mathbf{H}(x,y,z) = G(y,z)\exp(ik_0\alpha x), \qquad (1)$$

$$curl(\mathbf{H}) = -ik_0\varepsilon\mathbf{E}, \quad curl(\mathbf{E}) = ik_0\mathbf{H}, \qquad (2)$$

$$F_y = \frac{-1}{ik_0(\varepsilon-\alpha^2)}\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} + \alpha\frac{\partial G_x}{\partial y}\right) \qquad G_y = \frac{1}{ik_0(\varepsilon-\alpha^2)}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \alpha\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$F_z = \frac{1}{ik_0(\varepsilon-\alpha^2)}\left(\frac{\partial G_x}{\partial y} - \alpha\frac{\partial G_x}{\partial z}\right) \qquad G_z = \frac{-1}{ik_0(\varepsilon-\alpha^2)}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \alpha\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)$$

.

$$(3)$$

Дисперсионное уравнение

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} + k_0^2(\varepsilon - \alpha^2)F_x = 0,$$
$$\frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial z^2} + k_0^2(\varepsilon - \alpha^2)G_x = 0. \qquad (4)$$

$$G_x^{(i)}(y,z) = \eta_i \cdot \exp\left(ik_0 \beta z\right)\exp\left(-k_0 \gamma_i \operatorname{sgn}(y)\, y\right),$$
$$F_x^{(i)}(y,z) = \varepsilon_i \cdot \exp\left(ik_0 \beta z\right)\exp\left(-k_0 \gamma_i \operatorname{sgn}(y)\, y\right), \qquad (5)$$

$$\left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} + \frac{\gamma_2}{\omega_2}\right)\left(\frac{\varepsilon_1 \gamma_1}{\omega_1} + \frac{\varepsilon_2 \gamma_2}{\omega_2}\right) - \alpha^2 \beta^2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)^2 = 0 \qquad (6)$$

Интегральные представления в виде спектра поверхностных волн

$$G_x(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\alpha)\exp(ik_0\alpha x)\exp(ik_0\beta(\alpha)z)\,d\alpha \qquad (7)$$

$$I(\alpha) = \frac{k_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_x(x,0)\exp(-ik_0\alpha x)\,dx \qquad (8)$$

$$G_x(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(u,0)\,G(x-u,z)\,du \qquad (9)$$

$$G(x,z) = \frac{k_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_0\alpha x)\exp(ik_0\beta(\alpha)z)\,d\alpha \qquad (10)$$

Интеграл Кирхгофа для поверхностных плазмонов

$$G(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\left(x\eta + \sqrt{k_{spp}^2 - \eta^2}\,z\right)\right)d\eta = \tag{11}$$

$$= \frac{i k_{spp} z}{2\sqrt{x^2+z^2}} H_1^1\left(k_{spp}\sqrt{x^2+z^2}\right),$$

Асимптотические представления для функции Грина

$$G(x,z)=\sqrt{\frac{ik_{spp}}{2\pi\sqrt{x^2+z^2}}}\,\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\exp\left(ik_{spp}\sqrt{x^2+z^2}\right) \qquad (12)$$

Приближение Френеля

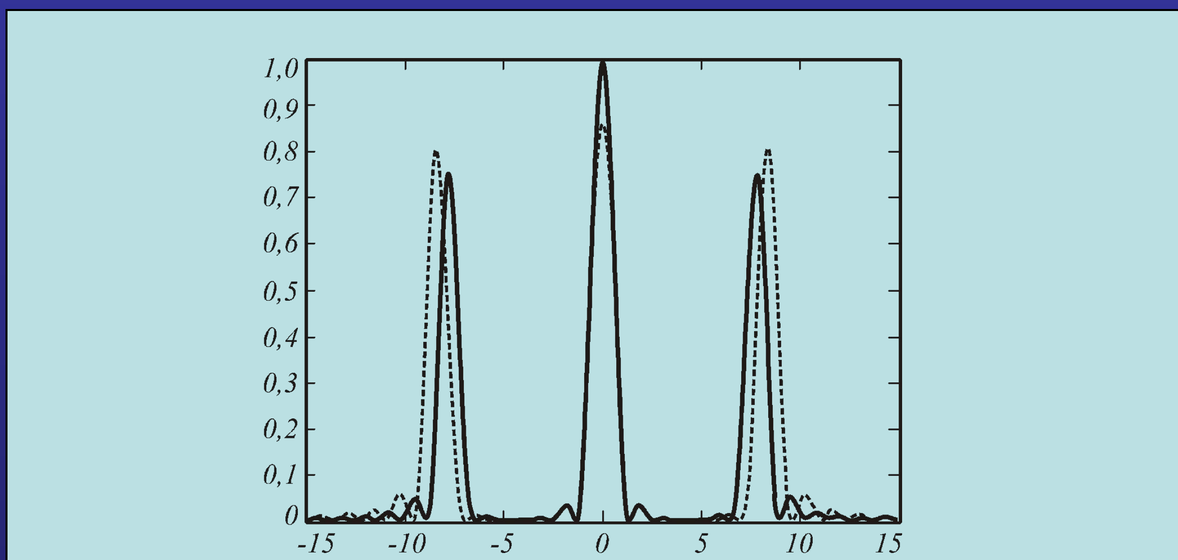
$$G(x,z)=\sqrt{\frac{ik_{spp}}{2\pi z}}\exp\left(ik_{spp}z\right)\exp\left(\frac{ik_{spp}x^2}{2z}\right) \qquad (13)$$

Приближение Фраунгофера

$$G_x(x,z)=\exp\left(ik_{spp}z\right)\exp\left(\frac{ik_{spp}x^2}{2z}\right)\sqrt{\frac{ik_{spp}}{2\pi z}}\int_{-\infty}^{+\infty}G_x(u,0)\exp\left(-\frac{ik_{spp}xu}{z}\right)du \qquad (14)$$

Дифракция плазмонов на периодической решетке

$$H_x(x,z) = \exp\left(ik_{spp}z\right)\exp\left(\frac{ik_{spp}x^2}{2z}\right)\sqrt{\frac{ik_{spp}}{2\pi z}}\,2R\sum_n c_n \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{2\pi n}{d} - \frac{k_{spp}x}{z}\right)R\right) \tag{15}$$



Конические поверхностные плазмоны

Решение в первой среде

$$E_z = a_e Z_m\left(k\beta r\right)exp\left(k\gamma_1 z\right)exp\left(im\varphi\right) = a_e Q(r,\varphi)exp\left(k\gamma_1 z\right) \qquad (1a)$$

Решение во второй среде

)

$$E_z = b_e Z_m\left(k\beta r\right)exp\left(-k\gamma_2 z\right)exp\left(im\varphi\right) = b_e Q(r,\varphi)exp\left(-k\gamma_2 z\right) \qquad (2a)$$

$$E_r^i = \square \frac{k}{\Delta\left(\gamma_i\right)}\gamma_i \frac{a_e \partial Q}{\partial r} exp\left(\square k\gamma_i z\right) \qquad H_r^i = \frac{k}{\Delta\left(\gamma_i\right)}\frac{m\varepsilon_i a_e Q}{r} exp\left(\square k\gamma_i z\right)$$

(3a)

$$E_\varphi^i = \square \frac{ik}{\Delta\left(\gamma_i\right)}\frac{m\gamma_i a_e Q}{r} exp\left(\square k\gamma_i z\right) \qquad H_\varphi^i = \frac{ik}{\Delta\left(\gamma_i\right)}\varepsilon_i \frac{a_e \partial Q}{\partial r} exp\left(\square k\gamma_i z\right)$$

$$\Delta\left(\gamma_i\right) = k^2\gamma_i^2 + k^2\varepsilon \qquad (4a)$$

Дисперсионное уравнение для конических поверхностных плазмонов

$$\gamma_1\varepsilon_2+\gamma_2\varepsilon_1=0$$ (5a)

$$\beta=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$ (6a)

Общее решение в виде спектра конических плазмонов

$$E_z=\sum_{m=1}^{\infty}a_m Z_m(k\beta r)\exp(im\varphi)$$ (7a)

Прохождение через тонкую диэлектрическую пленку

$$E_3(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty} exp(im\varphi)\int_0^{\infty} f^m(\beta) J_m(k\beta\rho)\, exp\left(ik\sqrt{\varepsilon_1-\beta^2}\,z\right)d\beta$$

$$T=\frac{exp(ik\gamma_2 d)}{\left(\frac{1}{T_{12}}\frac{1}{T_{23}}+\frac{R_{23}}{T_{23}}\frac{R_{12}}{T_{12}}exp(2ik\gamma_2 d)\right)} \quad (8a) \qquad \gamma_i=\sqrt{\varepsilon_i-\beta^2}$$

$$\frac{1}{T_{23}}=\frac{\varepsilon_2\left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}+\frac{\gamma_3}{\varepsilon_3}\right)}{2\gamma_2} \quad (9a) \qquad \frac{R_{23}}{T_{23}}=\frac{\varepsilon_2\left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}-\frac{\gamma_3}{\varepsilon_3}\right)}{2\gamma_2} \quad (10a)$$

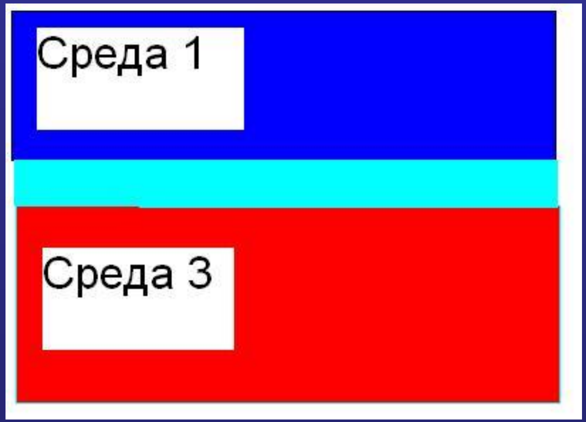
$$R_{12}=\frac{\left(\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}-\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\right)}{\left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}+\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\right)} \qquad \frac{R_{12}}{T_{12}}=\frac{\varepsilon_2\left(\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}-\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\right)}{2\gamma_1} \qquad T_{12}=\frac{2\gamma_1}{\varepsilon_1\left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}+\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\right)}$$

Анализ коэффициента прохождения

$$T=\frac{C}{\left(A\left(\beta_0^2-\beta^2\right)+BC^2\right)}\qquad(11a)\qquad A=\frac{\varepsilon_2}{4\gamma_2^0T_{12}^0}\left(\frac{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_2}}{\tilde{\varepsilon}_2\varepsilon_2}+\frac{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_3}}{\tilde{\varepsilon}_3\varepsilon_3}\right)$$

$$B=\frac{R_{23}^0}{T_{23}^0}\frac{R_{12}^0}{T_{12}^0}\qquad C=exp\left(ik\gamma_2^0d\right)\qquad \beta_0=\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_3+\varepsilon_2}$$

$$\varepsilon'_3=\frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}\qquad \varepsilon'_2=\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}$$



Условие максимального прохождения

$$\frac{1}{T_{12}}\frac{1}{T_{23}}+\frac{R_{23}}{T_{23}}\frac{R_{12}}{T_{12}}exp\left(2ik\gamma_2d\right)=0$$

(12a)