

# **ЭФФЕКТ КАЗИМИРА: ОТ НАНОТЕХНОЛОГИЙ ДО ФИЗИКИ ВСЕЛЕННОЙ**

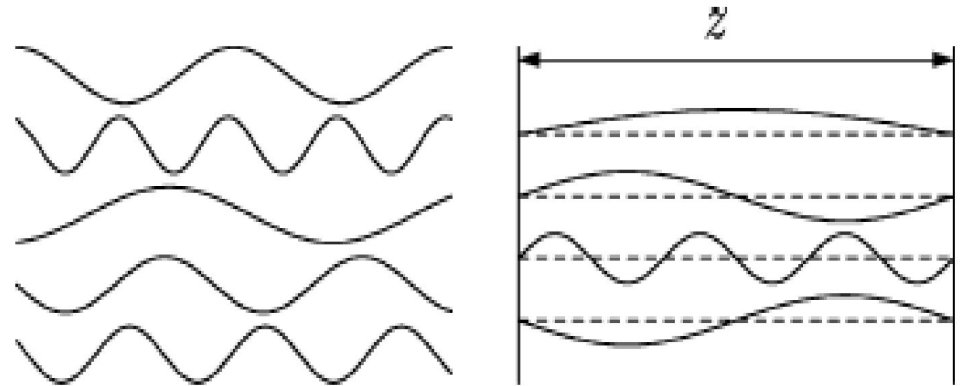
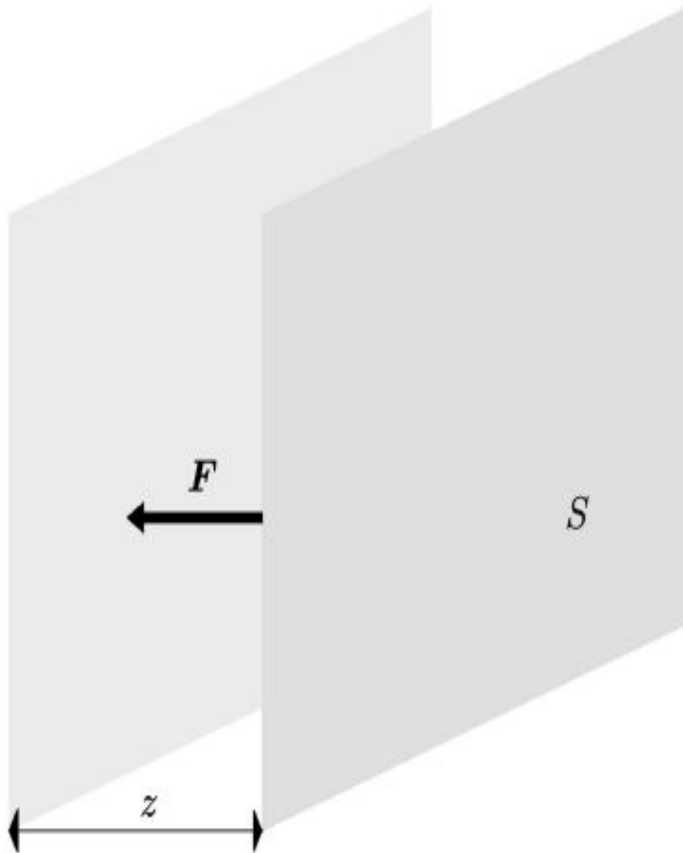
**В. М. Мостепаненко**

**Астрофизический отдел ГАО РАН**

# Содержание

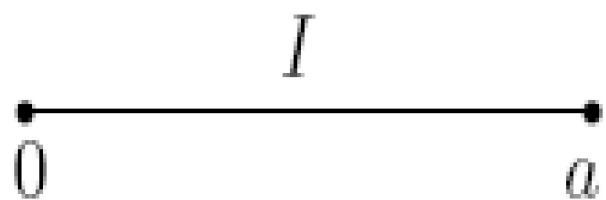
1. Введение
2. Две параллельные пластины из идеального металла
3. Космологические модели
4. Теория Лифшица сил Ван-дер-Ваальса и Казимира
5. Сравнение теории Лифшица с экспериментальными данными
6. Ограничения на поправки к закону тяготения Ньютона и параметры темной материи из эффекта Казимира
7. Заключение

# 1. ВВЕДЕНИЕ



**Сила Казимира возникает за счет изменения спектра нулевых колебаний электромагнитного поля материальными границами**

**Casimir, 1948**

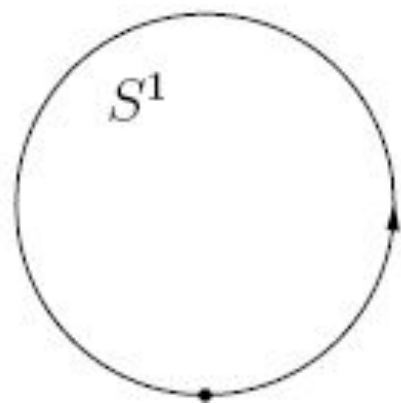


$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, a) = 0$$

$$\omega_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n - a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} k \right) = -\frac{\pi}{24a}$$

$$F = -\frac{\partial E}{\partial a} = -\frac{\pi}{24a^2}$$



$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, a)$$

$$\partial_x \varphi(t, x)|_{x=0} = \partial_x \varphi(t, a)|_{x=a}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$E = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n - a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} k \right) = -\frac{\pi}{6a}$$

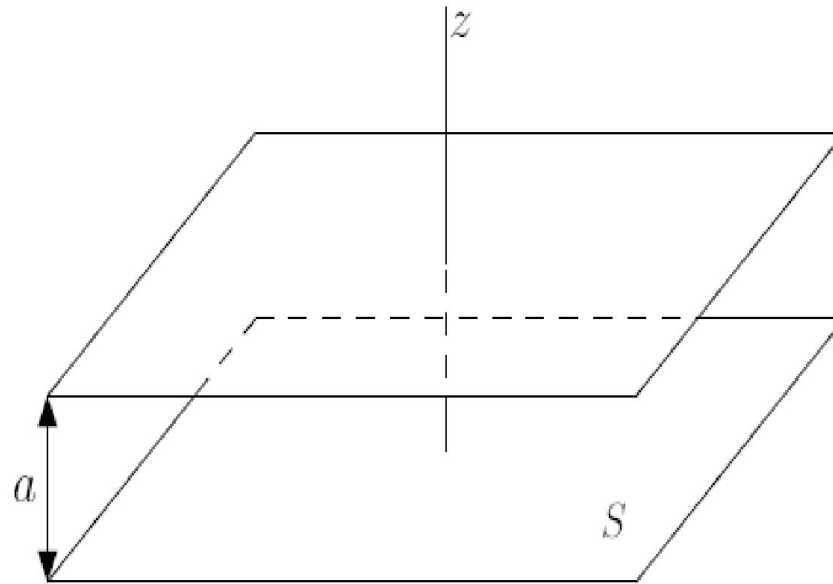
# Нанотехнологии

**Микро- и наноэлектромеханические устройства:**

- слипание близко расположенных элементов;**
- сила Казимира как движущая сила на малых расстояниях.**

Chan, Aksyuk, Kleiman, Bishop, Capasso, Science, 2001;  
Phys. Rev. Lett., 2001.

## 2. ДВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ ИДЕАЛЬНОГО МЕТАЛЛА



$$\mathbf{E}_t(t, \mathbf{r})|_S = \mathbf{B}_n(t, \mathbf{r})|_S = 0$$

## ВАКУУМНАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ T=0

$$E_0 = \int_V d\mathbf{r} \langle 0 | T_{00}^{(1)}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_J \omega_J = \sum_J \omega_J$$

$$\omega_{k_{\perp}, n}^2 = k_{\perp}^2 + k_{zn}^2$$

$$\text{with } k_{zn} = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



$$E_0(a) = \left( \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi} \omega_{k_\perp,0} + \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi} \sum_{n=1}^\infty \omega_{k_\perp,n} \right) S$$

**После перенормировки, т.е. вычитания вклада пустого пространства, имеем:**

$$E(a) \equiv E_{\text{IM}}(a) = -\frac{\pi^2}{720a^3}$$

$$P(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -\frac{\pi^2}{240a^4}$$

## Две идеально-металлические пластины

при ненулевой  $T$ :

$$\mathcal{F}_0(a, T) = \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \omega_{k_\perp, 0} + k_B T \ln \left( 1 - e^{-\omega_{k_\perp, 0}/k_B T} \right) \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \omega_{k_\perp, n} + k_B T \ln \left( 1 - e^{-\omega_{k_\perp, n}/k_B T} \right) \right] \right\} S$$

**После перенормировки:**

$$\mathcal{F}(a, T) = \frac{k_B T}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty}{}' \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \ln \left( 1 - e^{-2a \sqrt{k_{\perp}^2 + \xi_l^2}} \right)$$

$$\xi_l = 2\pi k_B T l$$

$$P(a, T) = -\frac{\partial \mathcal{F}(a, T)}{\partial a} = -\frac{2k_B T}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty}{}' \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \frac{\sqrt{k_{\perp}^2 + \xi_l^2}}{e^{2a \sqrt{k_{\perp}^2 + \xi_l^2}} - 1}$$

$$S(a, T) = -\frac{\partial \mathcal{F}(a, T)}{\partial T} = -\frac{1}{T} \mathcal{F}(a, T) + \frac{k_B}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \xi_l^2 \ln \left( 1 - e^{-2a \xi_l} \right)$$

**Предел низких температур:**  $T \ll T_{\text{eff}} = \frac{1}{2ak_B}$

$$\mathcal{F}(a, T) = -\frac{\pi^2}{720a^3} \left[ 1 + \frac{45\zeta_R(3)}{\pi^3} \left( \frac{T}{T_{\text{eff}}} \right)^3 - \left( \frac{T}{T_{\text{eff}}} \right)^4 \right]$$

$$P(a, T) = -\frac{\pi^2}{240a^4} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{T}{T_{\text{eff}}} \right)^4 \right]$$

$$S(a, T) = \frac{3\zeta_R(3)k_B}{8\pi a^2} \left( \frac{T}{T_{\text{eff}}} \right)^2 \left[ 1 - \frac{4\pi^3}{135\zeta_R(3)} \frac{T}{T_{\text{eff}}} \right]$$

**Предел высоких температур:**

$$T \gg T_{\text{eff}}$$

$$\mathcal{F}(a, T) = -\frac{k_{\text{B}}T}{8\pi a^2} \zeta_{\text{R}}(3)$$

$$P(a, T) = -\frac{k_{\text{B}}T}{4\pi a^3} \zeta_{\text{R}}(3)$$

$$S(a, T) = \frac{k_{\text{B}}}{8\pi a^2} \zeta_{\text{R}}(3)$$

### 3. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

#### Вселенная Эйнштейна и закрытая модель Фридмана

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a_0^2 [dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \\ &= a_0^2 [d\eta^2 - dr^2 - \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \end{aligned}$$

$$\underline{T = 0}$$

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle = \frac{1}{4\pi^2 a_0^3} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \omega_k, \quad \omega_k^2 = m^2 + \frac{k^2}{a_0^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi^2 a_0^4} \int_{ma_0}^{\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{\exp(2\pi\xi) - 1} \sqrt{\xi^2 - m^2 a_0^2}$$

**Мамаев, Мостепаненко, Старобинский, ЖЭТФ,  
1976**

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V}, \quad \text{where} \quad E = \varepsilon V, \quad V = 2\pi^2 a_0^3$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi^2 a_0^4} \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{\exp(2\pi\xi) - 1} = \frac{1}{480\pi^2 a_0^4}$$

$$P = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{1440\pi^2 a_0^4}$$



## Инфляция за счет эффекта Казимира

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

топология 3-тора: отождествлены точки

$$(x + lL, y + nL, z + pL), \quad l, n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\varepsilon(a) = -\frac{A}{a^4(t)L^4}, \quad A = 0.8375$$

Из уравнений Эйнштейна с космологической постоянной  $\Lambda$

$$a(t) = \frac{1}{L} \left( \frac{8\pi G A}{\Lambda} \right)^{1/4} \left[ \cosh \left( 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) \right]^{1/2}$$

Зельдович, Старобинский, Письма в АЖ, 1984

$$\underline{T \neq 0}$$

$$F = V\varepsilon + k_B T \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \ln \left( 1 - e^{-\frac{\omega_k}{k_B T}} \right)$$

Dowker, Critchley, Phys. Rev. D, 1977

$$\underline{a_0 k_B T \ll 1}$$

$$F \approx V\varepsilon - k_B T e^{-\frac{1}{a_0 k_B T}}$$

$$U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{F}{T} \right) \approx V\varepsilon + \frac{1}{a_0} e^{-\frac{1}{a_0 k_B T}}$$

$$\underline{a_0 k_B T \gg 1}$$

$$F \approx -\frac{\pi^2}{90} V (k_B T)^4, \quad U \approx \frac{\pi^2}{30} V (k_B T)^4$$

## Модифицированная перенормировка

$$F^{\text{ren}} = F - F_M$$

$$F_M = -\frac{\pi^2}{90}(k_B T)^4 V$$

**Bezerra, Klimchitskaya, Mostepanenko, Romero,  
Phys. Rev. D, 2011**

# **Тепловой эффект Казимира для спинорного и электромагнитного полей в закрытой модели Фридмана**

## **Новые аспекты:**

- спинорный эффект Казимира при высокой  $T$  не обладает классическим пределом;**
- электромагнитный эффект Казимира при высокой  $T$  имеет классический предел.**

Bezerra, Mostepanenko, Mota, Romero, Phys. Rev. D, 2011.

## 4. ТЕОРИЯ ЛИФШИЦА СИЛ ВАН ДЕР ВААЛЬСА И КАЗИМИРА

### Уравнения Максвелла

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) &= 0, & \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= 0\end{aligned}$$

### Граничные условия

$$\begin{aligned}E_{1t}(t, \mathbf{r}) &= E_{2t}(t, \mathbf{r}), & D_{1n}(t, \mathbf{r}) &= D_{2n}(t, \mathbf{r}) \\ B_{1n}(t, \mathbf{r}) &= B_{2n}(t, \mathbf{r}), & B_{1t}(t, \mathbf{r}) &= B_{2t}(t, \mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t - t', \mathbf{r}) \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt'$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$$

$$\mathcal{F}(a, T) = \frac{k_B T}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_E(\xi_l), \quad P(a, T) = -\frac{\partial \mathcal{F}(a, T)}{\partial a},$$

$$\xi_l = 2\pi \frac{k_B T l}{\hbar}$$

**мацубаровские  
частоты**

$$\Phi_E(x) = \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \sum_{\alpha} \ln \left[ 1 - r_{\alpha}^{(1)}(ix, k_{\perp}) r_{\alpha}^{(2)}(ix, k_{\perp}) e^{-2aq} \right]$$

$$q \equiv q(ix, k_{\perp}) = \sqrt{k_{\perp}^2 + x^2/c^2}$$

**Лифшиц, ЖЭТФ,  
1955**



**Коэффициенты отражения для двух независимых поляризаций:**

$$r_{\text{TM}}^{(n)}(ix, k_{\perp}) = \frac{\varepsilon^{(n)}(ix)q - k^{(n)}}{\varepsilon^{(n)}(ix)q + k^{(n)}}$$

$$r_{\text{TE}}^{(n)}(ix, k_{\perp}) = \frac{\mu^{(n)}(ix)q - k^{(n)}}{\mu^{(n)}(ix)q + k^{(n)}}$$

$$k^{(n)} \equiv k^{(n)}(ix, k_{\perp}) = \sqrt{k_{\perp}^2 + \varepsilon^{(n)}(ix)\mu^{(n)}(ix)\frac{x^2}{c^2}}$$

## Модели диэлектрической проницаемости, зависящей от частоты

$$\varepsilon_c(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^K \frac{g_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

Проницаемость диэлектриков, определяемая связанными электронами

$$\varepsilon_d(\omega) = \varepsilon_c(\omega) + i \frac{4\pi\sigma_0(T)}{\omega}$$

Проницаемость диэлектриков с учетом статической проводимости

$$\varepsilon_D(\omega) = \varepsilon_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega[\omega + i\gamma(T)]}$$

Проницаемость модели Друде для металлов

$$\varepsilon_p(\omega) = \varepsilon_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Проницаемость плазма модели для металлов

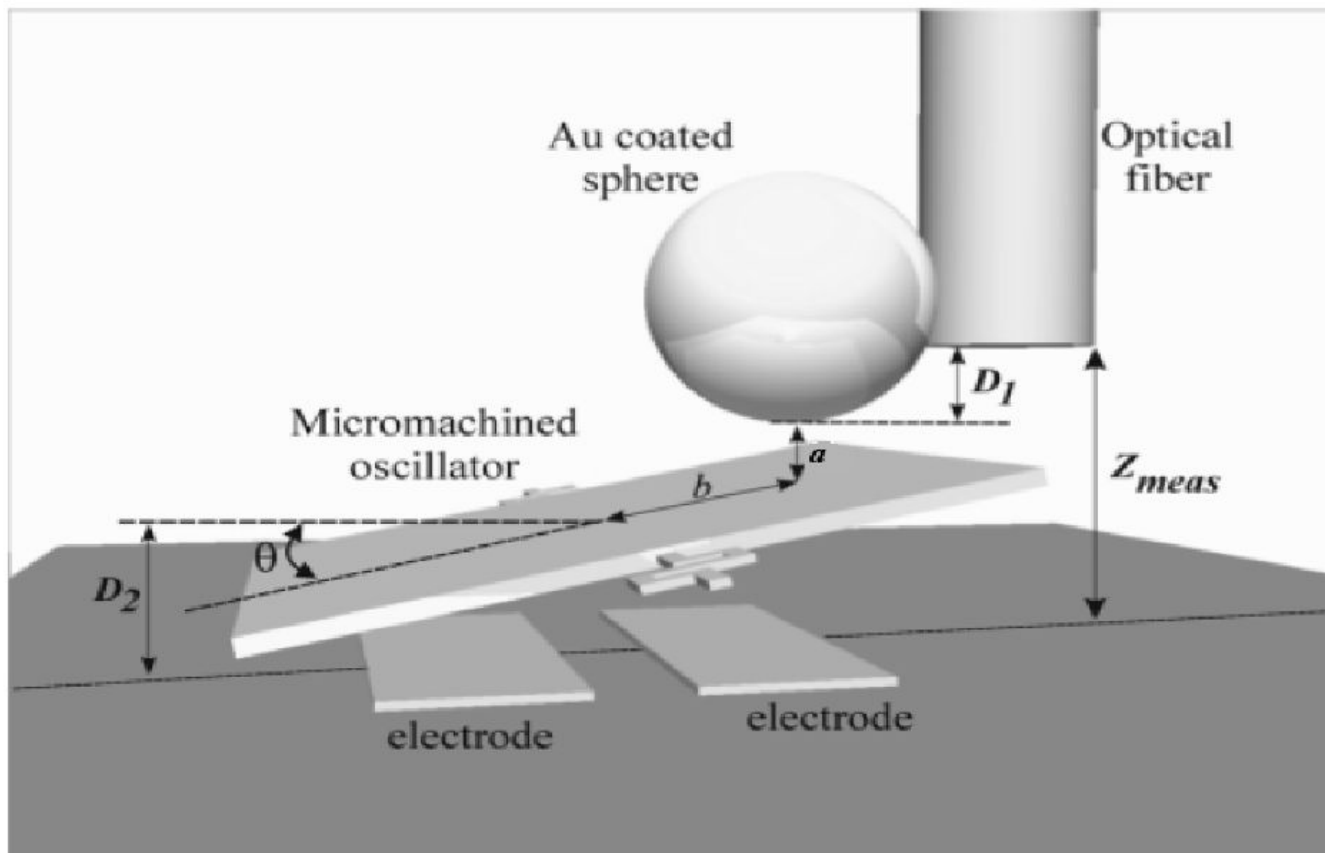
**Теория Лифшица с  $\varepsilon_d$  или  $\varepsilon_D$  нарушает теорему Нернста**

## 5. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИФШИЦА С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

### 5.1 Измерение давления Казимира с помощью микромеханического осциллятора

$$P(a, T) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial F_{sp}(a, T)}{\partial a}$$

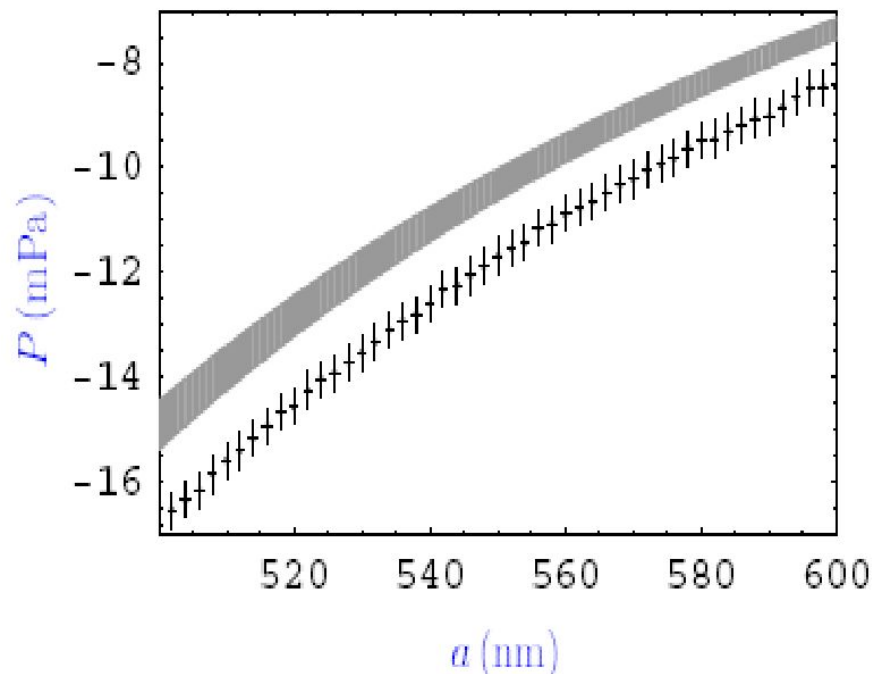
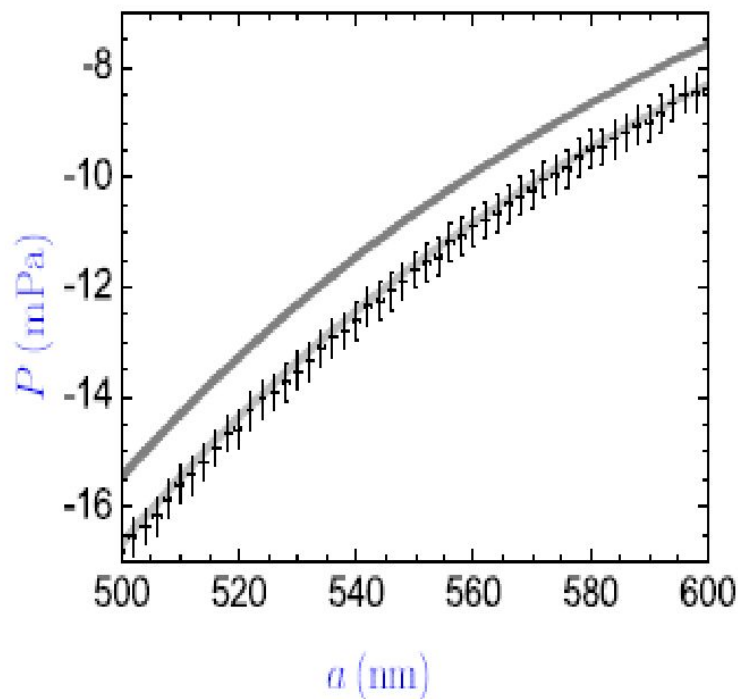
Decca, Lopez, Fischbach, Klimchitskaya, Krause, Mostepanenko, Phys. Rev. D (2003); Ann. Phys. (2005); Phys. Rev. D (2007); Eur. Phys. J. C (2007); Decca, Lopez, Osquiguil, IJMPA (2010).



**Схематическое изображение микромеханического осциллятора**

# Сравнение между теорией и экспериментом

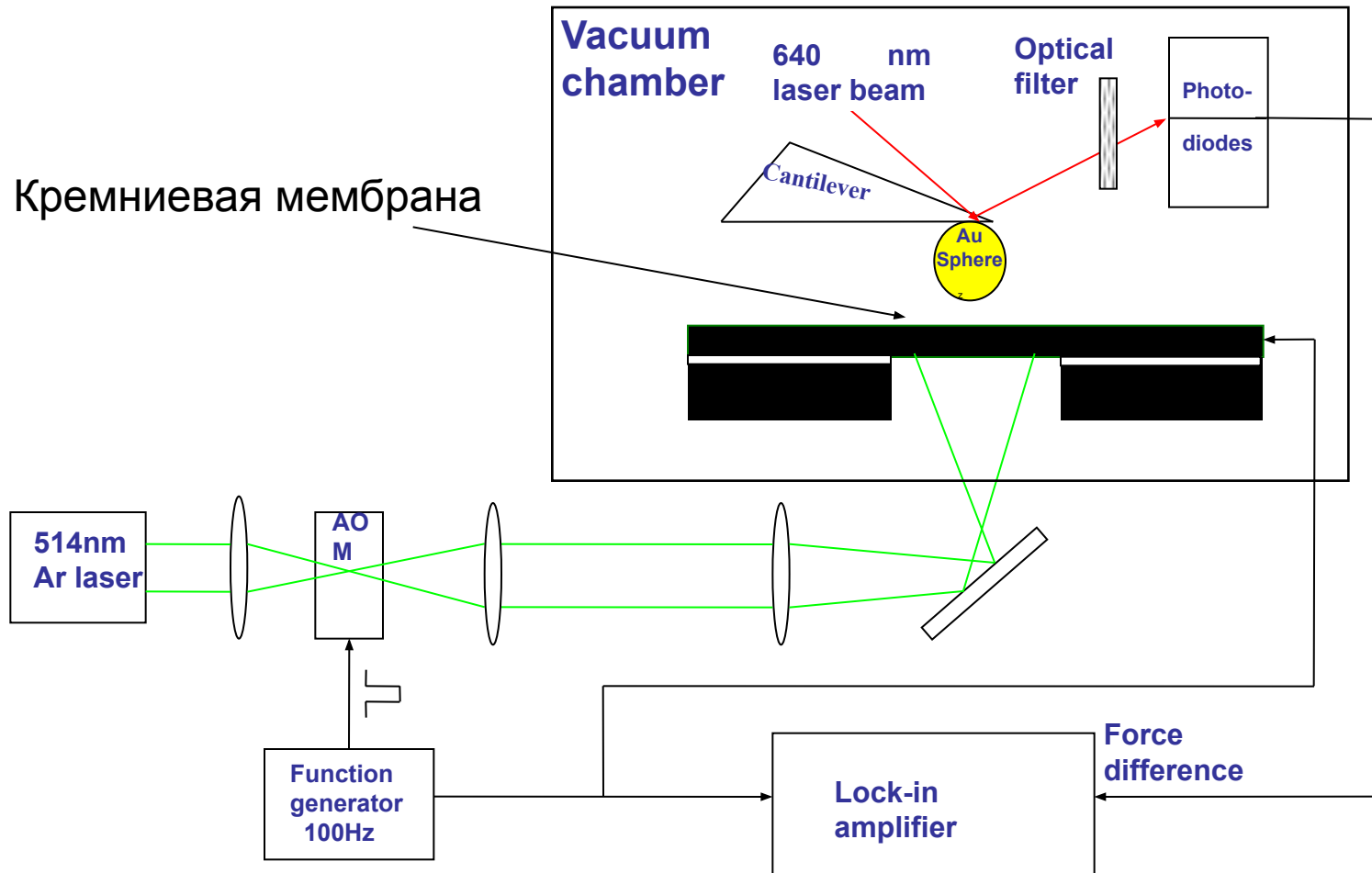
(первый метод)



Относительная погрешность измерений (с 95% достоверностью) изменяется от 0.19% на 162 nm до 0.9% на 400 nm и 9% на 746 nm.

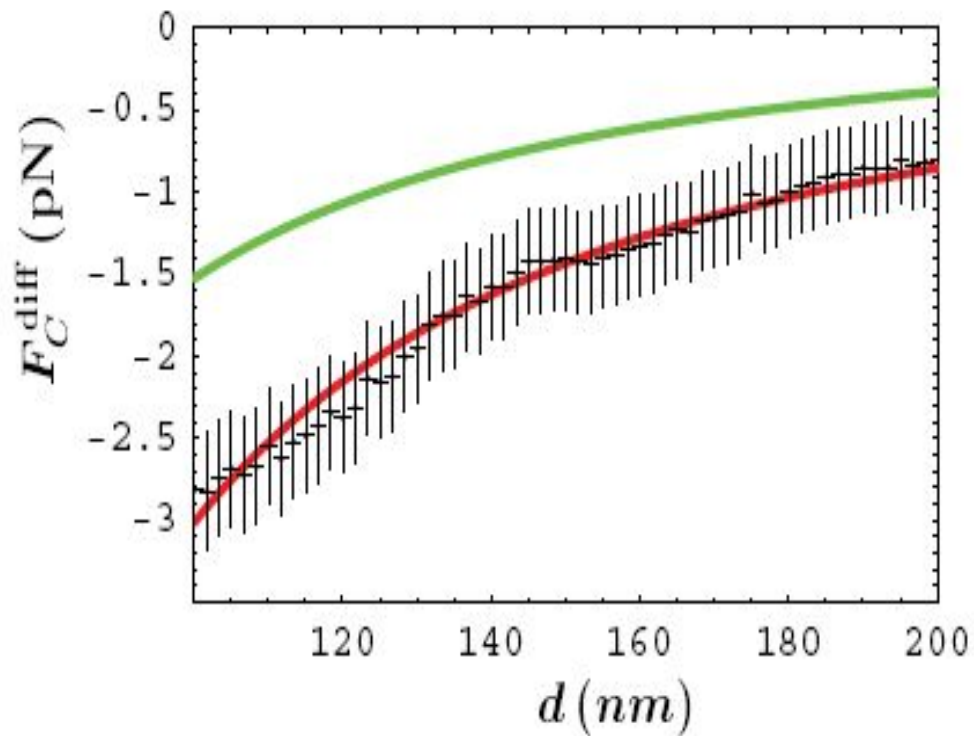
**Модель Друде исключена данными измерений с 95% достоверностью.**

## 5.2 Оптическая модуляция сил Казимира

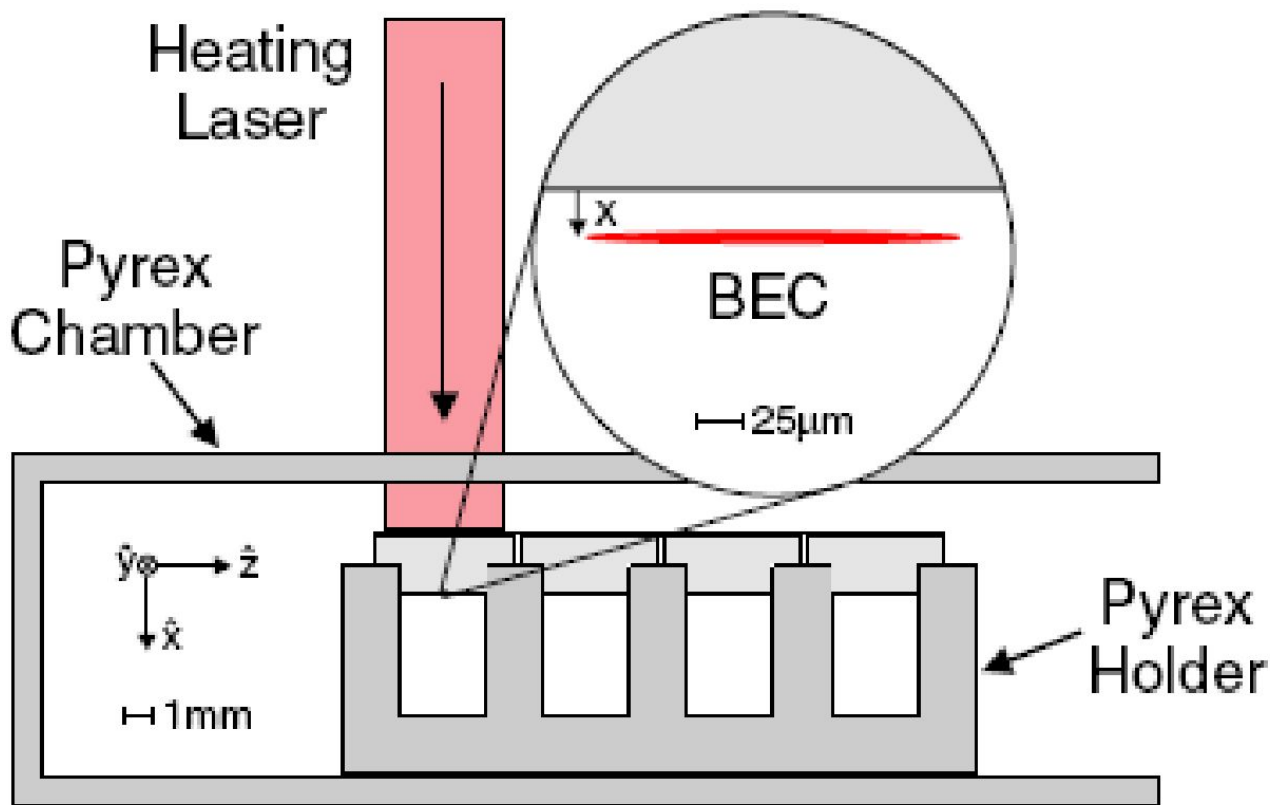


Chen, Klimchitskaya, Mostepanenko, Mohideen,  
Optics Express (2007); Phys. Rev. B (2007).

# Разность между силами Казимира при освещенной и не освещенной лазерным светом мембране

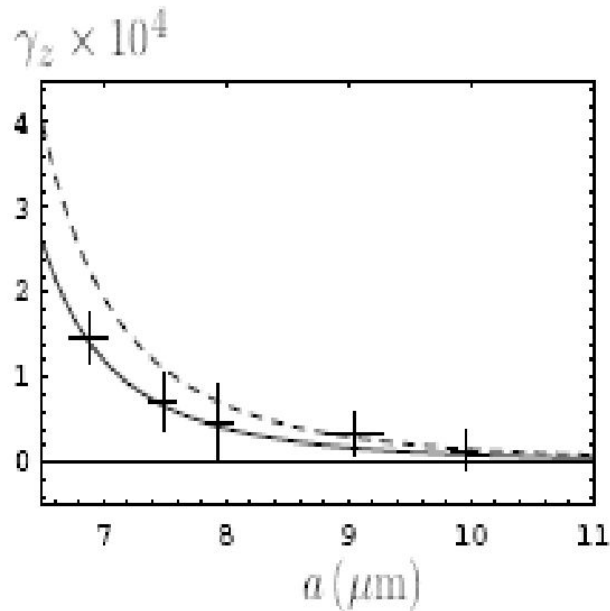


## 5.3. Измерение силы Казимира-Полдера

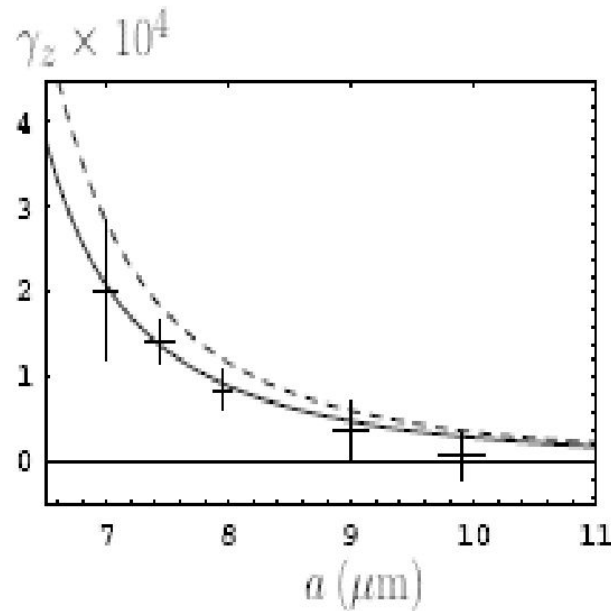




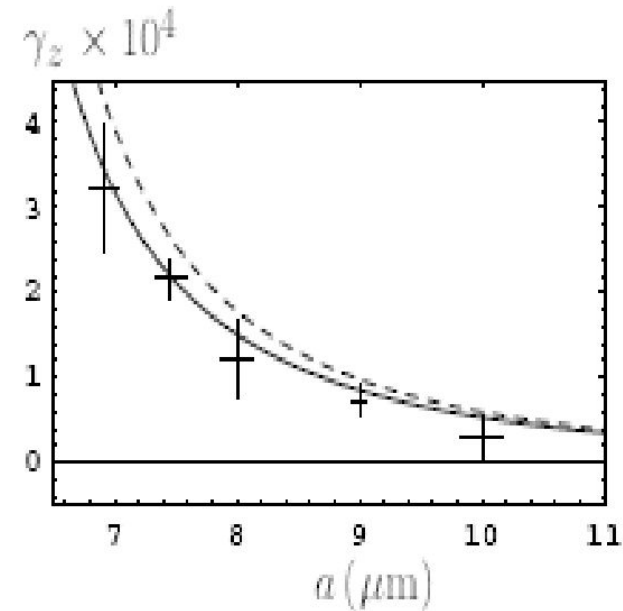
# Сдвиг частоты колебаний центра масс конденсата Бозе-Эйнштейна атомов Rb



$$T_p = T_e = 310 \text{ K}$$



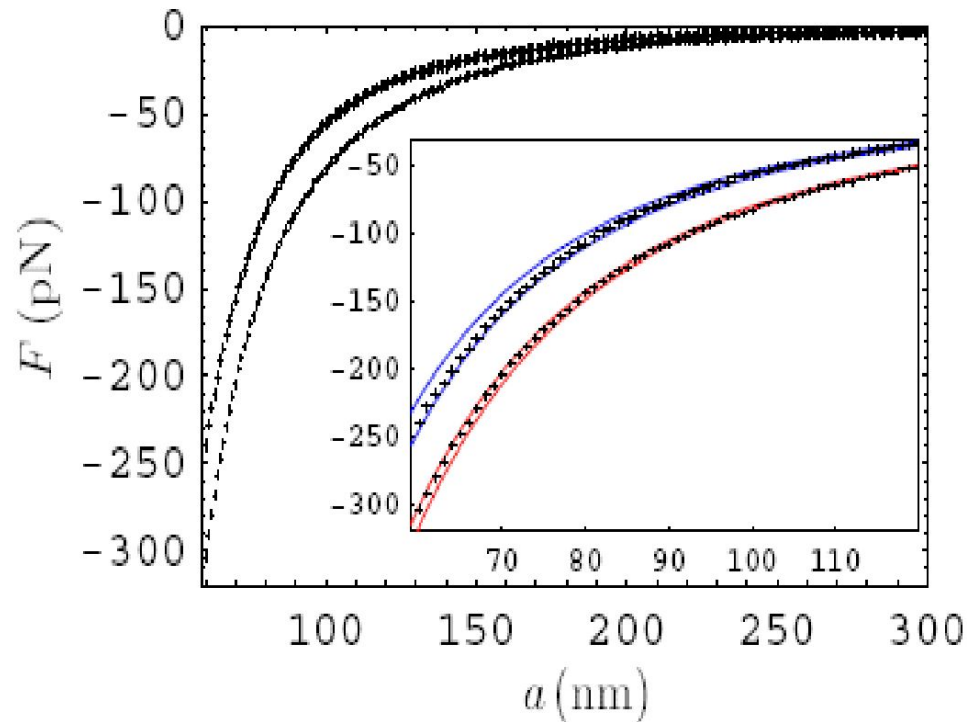
$$T_p = 479 \text{ K}$$



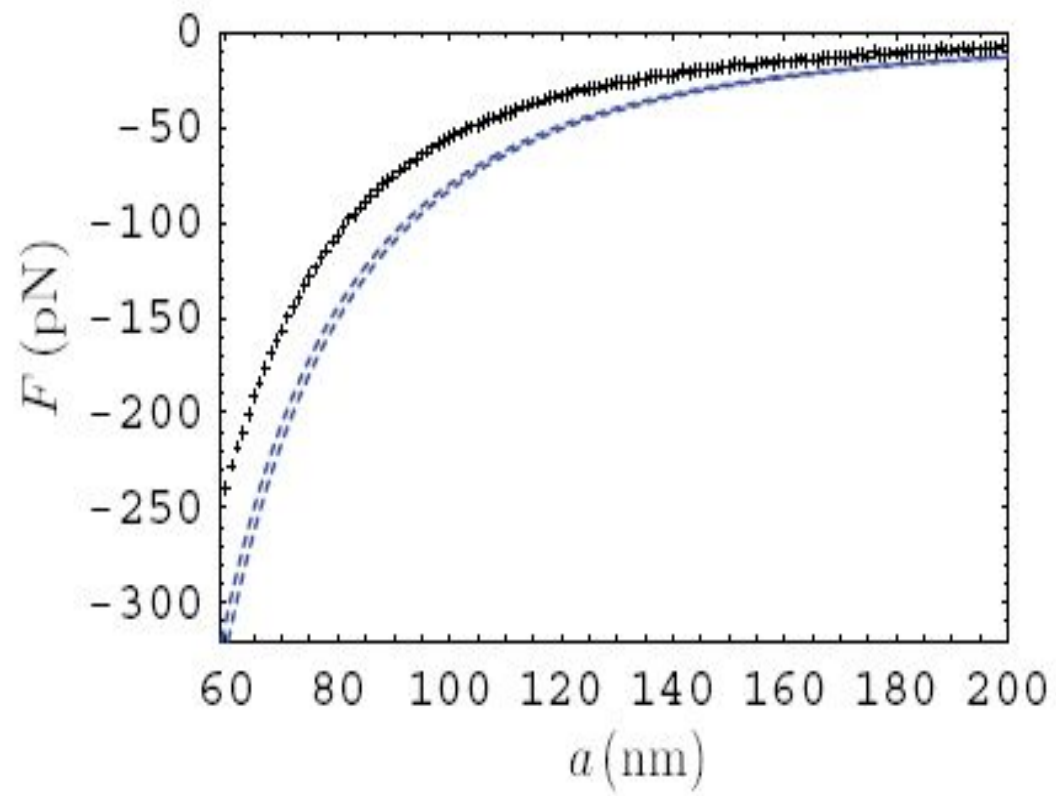
$$T_p = 605 \text{ K}$$

Obrecht, Wild, Antezza, Pitaevskii, Stringari, Cornell,  
Phys.Rev.Lett. (2007);  
Klimchitskaya, Mostepanenko, J. Phys. A (2008).

## 5.4 Сила Казимира между Au сферой и ITO пластиной



**Chang, Banishev, Klimchitskaya, Mostepanenko, Mohideen, Phys. Rev. Lett., (2011);  
Banishev, Chang, Castillo-Garza, Klimchitskaya, Mostepanenko, Mohideen, Phys. Rev. B (2012)**



## 6. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОПРАВКИ К ЗАКОНУ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА И ПАРАМЕТРЫ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ ИЗ ЭФФЕКТА КАЗИМИРА

Поправки типа Юкавы к закону Ньютона:

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left( 1 + \alpha e^{-r/\lambda} \right)$$

Поправки степенного типа к закону Ньютона:

$$V_l(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left[ 1 + \Lambda_l \left( \frac{r_0}{r} \right)^{l-1} \right]$$

## Степенные и юкавовские потенциалы происходят из:

### 1) Обмен легкими и безмассовыми элементарными частицами

- арион;
- скалярный аксион;
- гравифотон;
- дилатон;
- голдстино;
- модули.

Эти частицы могут давать вклад в темную материю и энергию.

## 2) Многомерные теории с низкоэнергетическим масштабом компактификации

$$R_* \sim \frac{1}{E_{\text{Pl}}^{(D)}} \left( \frac{E_{\text{Pl}}}{E_{\text{Pl}}^{(D)}} \right)^{2/N} \sim 10^{(32-17N)/N} \text{ cm}$$

$$D \equiv 4 + N, \quad E_{\text{Pl}} = G^{-1/2} \sim 10^{19} \text{ GeV}$$

$$E_{\text{Pl}}^{(D)} = G_D^{-1/(2+N)}, \quad G_D = G\Omega_N \sim GR_*^N$$

$$\text{For } N = 1 \quad R_* \sim 10^{15} \text{ cm}$$

$$N = 2 \quad R_* \sim 1 \text{ mm}$$

$$N = 3 \quad R_* \sim 5 \text{ nm}$$

Arkani-Hamed, Dimopoulos,  
Dvali, Phys. Rev. D, 1999

**Сила типа Юкавы между двумя макротелами:**

$$E_{\text{Yu}}(a) = G\alpha\rho_1\rho_2 \int_{V_1} \int_{V_2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \frac{e^{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/\lambda}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$F_{\text{Yu}} = -\frac{\partial E_{\text{Yu}}(a)}{\partial a}$$

## 6.1 Ограничения из нормальной силы Казимира между пробными телами с гладкими поверхностями

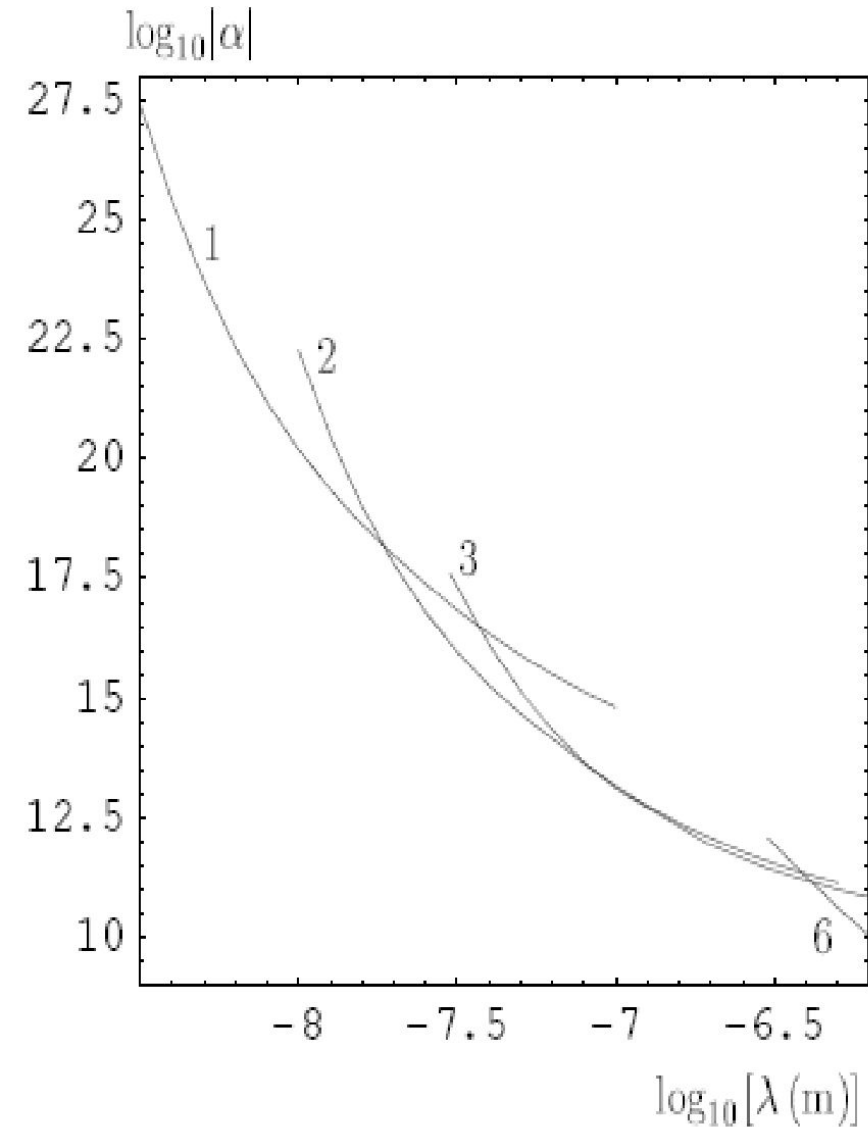
Измеряется сила Казимира или ее градиент:

$$F_C(a, T) \quad \text{or} \quad F'_C(a, T) = \frac{\partial F_C(a, T)}{\partial a}$$

Ограничения на силу Юкавы следуют из неравенств:

$$|F_{\text{Yu}}(a)| \leq \Delta^{\text{tot}} F_C(a, T) \quad \text{or} \quad |F'_{\text{Yu}}(a)| \leq \Delta^{\text{tot}} F'_C(a, T)$$

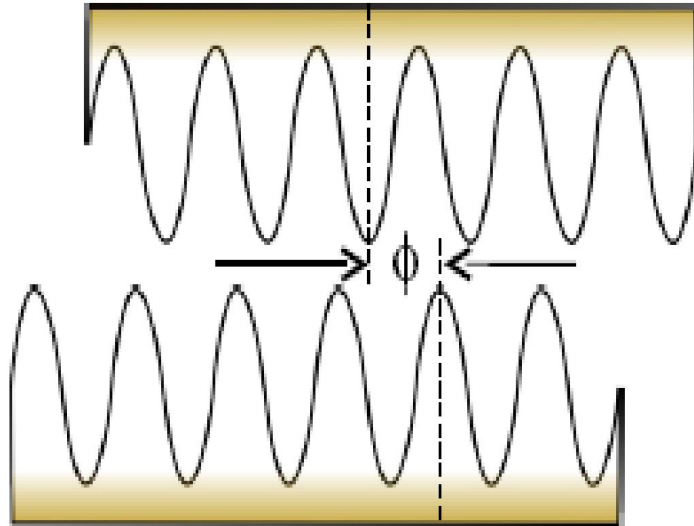




**Сильнейшие ограничения на поправки типа Юкавы к закону тяготения Ньютона,**

**полученные из измерений сил Казимира с использованием АСМ (линия 1), из измерений давления Казимира с помощью микромеханического осциллятора (линия 2), и из эксперимента с нулевой силой Казимира (линия 3). Линия 6 показывает ограничения из эксперимента с крутильным маятником.**

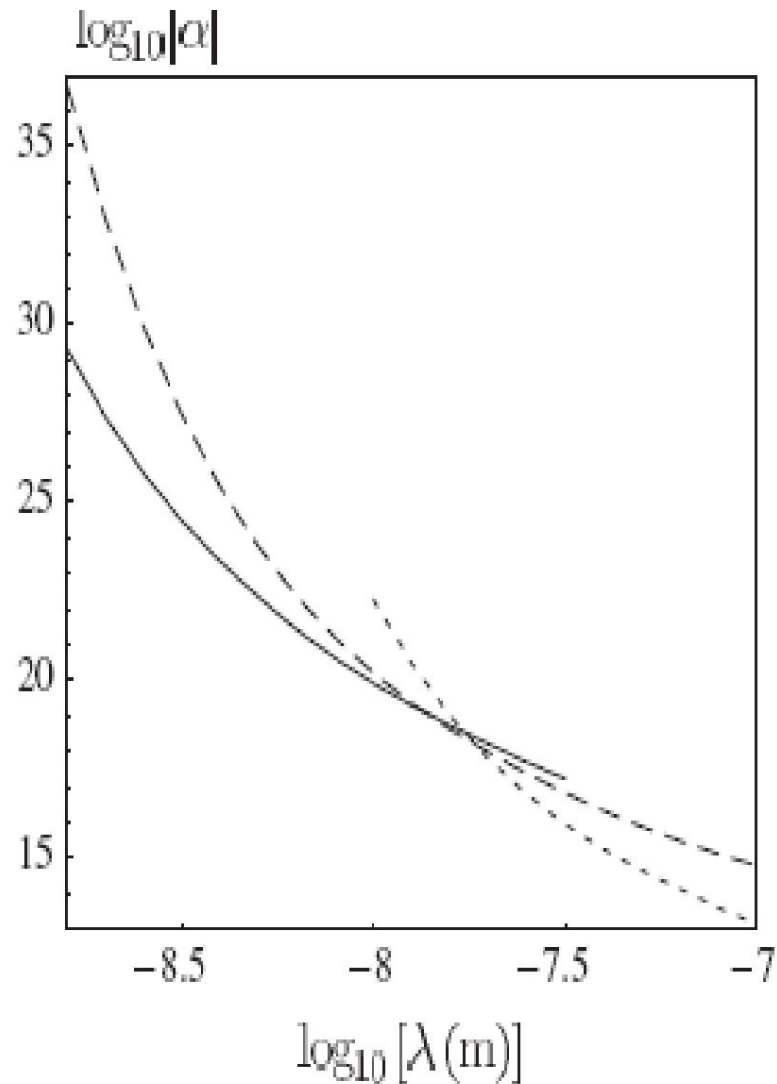
## 6.2 Ограничения из горизонтальной силы Казимира



$$F_{\text{lat}}(a, T, \Phi) = - \frac{\partial \mathcal{F}(a, T, \Phi)}{\partial \Phi}$$

Golestanian, Kardar, Phys. Rev. Lett., 1997;  
Chen, Mohideen, Klimchitskaya, Mostepanenko, Phys. Rev. Lett., 2002;  
Phys. Rev. A, 2002;

Chiu, Klimchitskaya, Marachevsky, Mostepanenko, Mohideen,  
Phys. Rev. B, 2009; Phys. Rev. B, 2010.



## Ограничения на параметры взаимодействия Юкавы

из измерений горизонтальной силы Казимира между профилированными поверхностями (сплошная линия),

из измерений нормальной силы Казимира с помощью АСМ (прерывистая линия),  
и с помощью микромеханического осциллятора (точечная линия).

Bezerra, Klimchitskaya, Mostepanenko, Romero, Phys. Rev. D, 2010;  
Phys. Rev. D,  
2011.

# 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эффект Казимира --- это междисциплинарное физическое явление. Помимо приложений к

--- нанотехнологиям

--- физике твердого тела

--- космологическим моделям Вселенной

--- физике темной материи,

которых мы коснулись,

он играет важную роль в

- статистической физике
- атомной спектроскопии
- физике элементарных частиц
- физике поверхности
- математической физике.

**Это позволяет предсказать большое будущее исследованиям в данном направлении.**

INTERNATIONAL SERIES OF MONOGRAPHS ON PHYSICS • 145

# Advances in the Casimir Effect

---

M. BORDAG  
G. L. KLIMCHITSKAYA  
U. MOHIDEEN  
V. M. MOSTEPANENKO



OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS