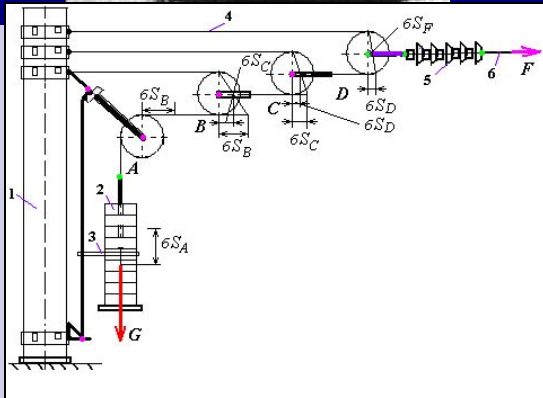
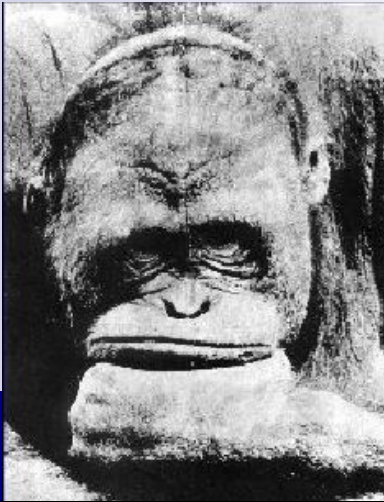


Бондаренко А.Н.



Курс лекций по теоретической механике

Динамика (II часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.

Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.

Завершение – Esc.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru.

Москва - 2007

■ Лекция 10.

Пример решения задач на использование теоремы об изменении кинетической энергии системы.
Потенциальное силовое поле.

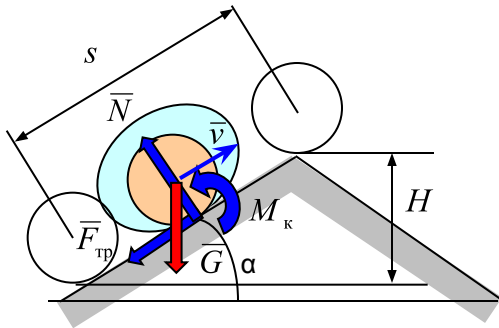
Силовая функция.

Потенциальная энергия системы.

Закон сохранения механической энергии.

Лекция 10

- Пример решения задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии для системы** – Массивный бумажный рулон радиуса R , приведенный в движение толчком, катится без проскальзывания по инерции вверх по наклонной шероховатой плоскости под углом α к горизонту с некоторой начальной скоростью. Коэффициент трения качения f_k . Определить начальную скорость рулона, необходимую для того, чтобы он мог перевалить через вершину высотой H от начального положения.



Дано: α, f_k, H, R
Найти: v_0

1. Выбираем объект - рулон
2. Отбрасываем связи – опорную плоскость
3. Заменяем связи реакциями – $N, F_{тр}, M_k$
4. Добавляем активные силы – G
5. Записываем теорему об изменении кинетической энергии для твердого тела:

$$T - T_0 = A^e$$

Тогда кинетическая энергия в начальный момент времени:

$$T_0 = \frac{Mv_{C0}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \left(\frac{v_{C0}}{R} \right)^2 = \frac{3Mv_{C0}^2}{4}$$

Работа сил, приложенных к объекту, равна: $A^e = A_N + A_{F_{тр}} + A_G + A_{M_k}$.

Работа нормальной реакции равна нулю: $A_N = 0$.

Работа силы трения скольжения равна нулю (приложена в МЦС): $A_{F_{тр}} = 0$.

Работа силы тяжести: $A_G = -G\Delta h = -MgH$.

Работа момента сопротивления качению: $A_{M_k} = -M_k \cdot (\varphi - \varphi_0)$.

Момент сопротивления качению: $M_k = f_k N = f_k G \cos \alpha = f_k Mg \cos \alpha$.

Разность углов поворота рулона: $\varphi - \varphi_0 = \frac{s}{R} = \frac{H}{R \sin \alpha}$.

Кинетическая энергия на вершине равна нулю: $T = 0$.

Кинетическая энергия в начальный момент времени равна:

$$T_0 = \frac{Mv_{C0}^2}{2} + \frac{I_{zC}\omega_{z0}^2}{2}$$

Момент инерции массы сплошного цилиндра равен:

$$I_{zC} = \frac{MR^2}{2}$$

Угловая скорость равна: $\omega_{z0} = \frac{v_{C0}}{R}$

Подставляем определенные величины в теорему:

$$-\frac{3Mv_{C0}^2}{4} = -MgH - f_k Mg \cos \alpha \frac{H}{R \sin \alpha},$$

После некоторых сокращений и преобразований получаем:

$$v_{C0} = \sqrt{\frac{4}{3} gH \left(1 + f_k \frac{\text{ctg} \alpha}{R} \right)}.$$

Заметим, что выражение для начальной скорости не зависит от массы рулона.

Масса рулона, как мера инертности, будет

влиять на величину усилия, которое должно быть приложено к телу, чтобы сообщить ему указанную начальную скорость.

- **Потенциальное силовое поле**
- **Силовое поле** – пространство, в каждой точке которого на материальную точку действуют силы, зависящие от координат точки.
- **Стационарное силовое поле** – действующие силы которого не зависят от времени, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ (поле силы тяжести, поле силы упругости).
- **Нестационарное силовое поле** - действующие силы которого зависят от времени, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z, t)$ (электромагнитное поле).

Лекция 10 (продолжение – 10.2)

- **Потенциальное силовое поле** – в котором существует функция, в каждой точке пространства удовлетворяющая соотношениям:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \text{где } U = U(x, y, z) \text{ – силовая функция.}$$

Силовая функция определяется с точностью до постоянной: $X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial(U+C)}{\partial x}; Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial(U+C)}{\partial y}; Z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial(U+C)}{\partial z}.$

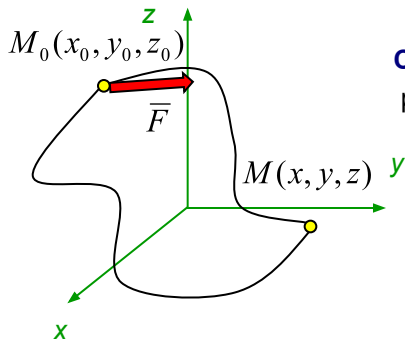
- **Основные свойства силовой функции:**

1. **Элементарная работа силы потенциального поля равна полному дифференциалу силовой функции:** $\delta A = dU,$

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. = dU.$$

2. **Полная работа силы потенциального поля не зависит от траектории перемещения точки и равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях:**

$$A_{M_0M} = U - U_0, \quad A = \int_{M_0}^M \delta A = \int_{M_0}^M \delta U = U \Big|_{M_0}^M = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U - U_0.$$



Следствие: Работа силы потенциального поля при перемещении точки по замкнутой траектории равна нулю:

$$A_{M_0M} + A_{MM_0} = (U - U_0) + (U_0 - U) = 0.$$

Потенциальная энергия системы – функция, характеризующая запас энергии (потенциальной энергии) в данной точке потенциального силового поля.

Потенциальная энергия равна работе сил потенциального поля, действующих на материальную точку, при ее перемещении из данного положения в начальное (нулевое). Для системы материальных точек потенциальная энергия равна сумме работ сил потенциального поля на всех перемещениях точек системы в начальное положение.

Величина потенциальной энергии в начальном положении принимается равной нулю: $\Pi(x_0, y_0, z_0) = 0.$

В произвольной точке потенциальная энергия является функцией координат: $\Pi(x, y, z).$

Тогда по определению:

$$\Pi = A_{MM_0} = -A_{M_0M} = -(U - U_0) = U_0 - U. \quad \Pi = U_0 - U.$$

– связь потенциальной энергии с силовой функцией.

С учетом: $\Pi(x_0, y_0, z_0) = 0$ соотношение связи можно записать как разность:

$$\Pi - \Pi_0 = U_0 - U.$$

Таким образом, изменение потенциальной энергии равно и обратно по знаку изменению силовой функции. Тогда:

Поскольку потенциальная энергия также определена с точностью до постоянной, то работа силы потенциального поля на перемещении из точки M_0 в точку M равна:

$$A_{M_0M} = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

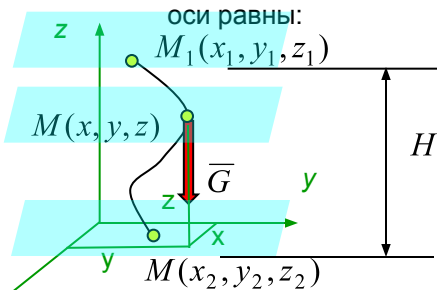
$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{aligned}$$

$$\delta A = dU = -d\Pi.$$

Лекция 10 (продолжение 10.3)

■ Примеры потенциальных силовых полей

- **Поле силы тяжести.** Сила тяжести, работа которой не зависит от траектории, является примером силы, имеющей **потенциал – геометрическое место точек пространства, в которых потенциальная энергия постоянна**. Проекция силы тяжести на координатные



$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0; \\ Y &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0; \\ Z &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -G. \end{aligned}$$

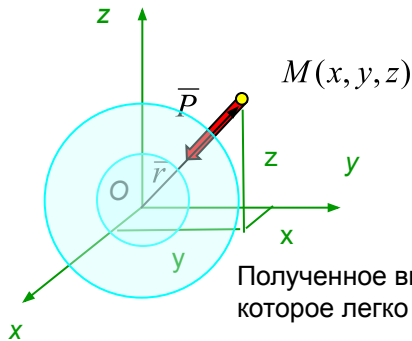
Последнее выражение есть дифференциальное уравнение, которое легко решается разделением переменных и интегрированием левой и правой частей:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{d\Pi}{dz} = G \quad \Rightarrow \quad \Pi = Gz + C.$$

Эквипотенциальные поверхности ($\Pi = const$) представляют собой **горизонтальные плоскости**. Сила тяжести направлена перпендикулярно к этим плоскостям в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

Работа силы тяжести на перемещении из точки M_1 в точку M_2 : $A_{M_1 M_2} = \Pi_1 - \Pi_2 = (Gz_1 + C) - (Gz_2 + C) = G(z_1 - z_2) = GH$.

- **Поле центральной силы притяжения.** Силы тяжести могут считаться параллельными и постоянными по величине только в небольшой области пространства в поле тяготения Земли и эквипотенциальные поверхности могут считаться плоскими только в пределах этой области. В случае рассмотрения силы притяжения к центру величина силы прямо пропорциональна массе и обратно пропорциональна квадрату расстояния между материальной точкой и центром тяготения O :



Проекция силы притяжения на координатные оси равны:

$$\begin{aligned} X &= -P \cos(\bar{P}, x) = -k \frac{m}{r^2} \frac{x}{r}; \\ Y &= -P \cos(\bar{P}, y) = -k \frac{m}{r^2} \frac{y}{r}; \\ Z &= -P \cos(\bar{P}, z) = -k \frac{m}{r^2} \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

Полученное выражение есть дифференциальное уравнение, которое легко решается интегрированием левой и правой частей:

$$P = k \frac{m}{r^2}$$

Элементарная работа силы притяжения:

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz = -k \frac{m}{r^3} (xdx + ydy + zdz).$$

$$d(r^2) = d(x^2 + y^2 + z^2), \quad r dr = xdx + ydy + zdz.$$

Дифференциал

потенциальной энергии: $d\Pi = -dU = -\delta A = k \frac{m}{r^3} r dr.$

$$d\Pi = k \frac{m dr}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \Pi = -k \frac{m}{r} + C.$$

Эквипотенциальные поверхности ($\Pi = const$) поля центрального тяготения представляют собой **сферические поверхности** с центром в точке O . Сила притяжения направлена по нормали к этим поверхностям в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

- **Закон сохранения механической энергии – При движении механической системы в стационарном потенциальном поле полная механическая энергия системы остается постоянной.**

По теореме об изменении кинетической энергии системы: $T_2 - T_1 = \sum A_k = \Pi_1 - \Pi_2$. Отсюда:

$$T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1 = const.$$

Сумму кинетической и потенциальной энергий называют **полной механической энергией системы**.