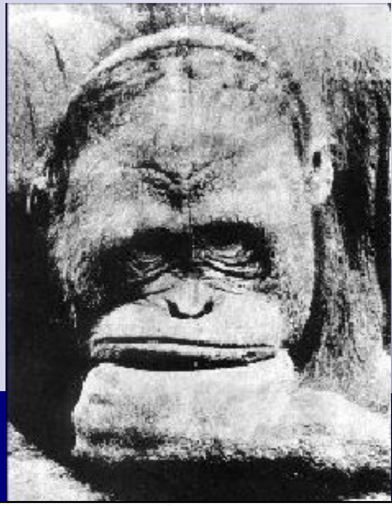
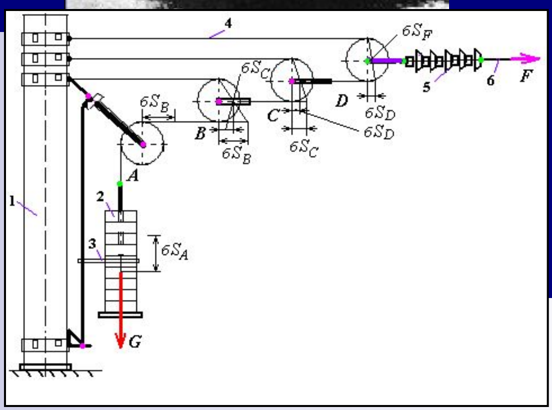
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий

Бондаренко А.Н.



Курс лекций по теоретической механике



Динамика (II часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.
Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.
Завершение – Esc.
Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

- Лекция 10.

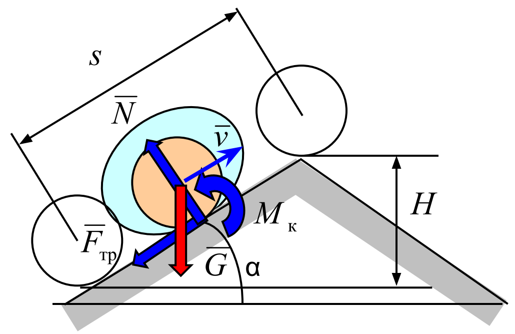
Пример решения задач на использование теоремы об изменении кинетической энергии системы. Потенциальное силовое поле.

Силовая функция.

Потенциальная энергия системы.

Закон сохранения механической энергии.

- **Пример решения задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии для системы** – Массивный бумажный рулон радиуса *R*, приведенный в движение толчком, катится без проскальзывания по инерции вверх по наклонной шероховатой плоскости под углом α к горизонту с некоторой начальной скоростью. Коэффициент трения качения f_k. Определить начальную скорость рулона, необходимую для того, чтобы он мог перевалить через вершину высотой *H* от начального положения.



Дано: α, f_k, *H*, *R*

Найти: v_0

1. Выбираем объект - рулон
2. Отбрасываем связи – опорную плоскость
3. Заменяем связи реакциями – *N*, $F_{тр}$, $M_к$
4. Добавляем активные силы – *G*
5. Записываем теорему об изменении кинетической энергии для твердого тела:

$$\boxed{T - T_0 = A^e}$$

Кинетическая энергия на вершине равна нулю: $T = 0.$

Кинетическая энергия в начальный момент времени равна:

$$\boxed{T_0 = \frac{Mv_{C0}^2}{2} + \frac{I_{zC}\omega_{z0}^2}{2}}$$

Момент инерции массы сплошного цилиндра равен: $I_{zC} = \dfrac{MR^2}{2}$

Угловая скорость равна: $\omega_{z0} = \dfrac{v_{C0}}{R}$

Тогда кинетическая энергия в начальный момент времени: $T_0 = \dfrac{Mv_{C0}^2}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{MR^2}{2}\left(\dfrac{v_{C0}}{R}\right)^2 = \dfrac{3Mv_{C0}^2}{4}.$

Работа сил, приложенных к объекту, равна: $A^e = A_N + A_{F тр} + A_G + A_{M к}.$

Работа нормальной реакции равна нулю: $A_N = 0.$

Работа силы трения скольжения равна нулю (приложена в МЦС): $A_{F тр} = 0.$

Работа силы тяжести: $A_G = -G\Delta h = -MgH.$

Работа момента сопротивления качению: $A_{M к} = -M_к \cdot (\varphi - \varphi_0).$

Момент сопротивления качению: $M_к = f_к N = f_к G\cos\alpha = f_к Mg\cos\alpha.$

Разность углов поворота рулона: $\varphi - \varphi_0 = \dfrac{s}{R} = \dfrac{H}{R\sin\alpha}.$

Подставляем определенные величины в теорему:

$$-\frac{3Mv_{C0}^2}{4} = -MgH - f_к Mg\cos\alpha \frac{H}{R\sin\alpha},$$

После некоторых сокращений и преобразований получаем:

$$\boxed{v_{C0} = \sqrt{\frac{4}{3}gH(1 + f_к\frac{ctg\alpha}{R})}.}$$

Заметим, что выражение для начальной скорости не зависит от массы рулона. Масса рулона, как мера инертности, будет влиять на величину усилия, которое должно быть приложено к телу, чтобы сообщить ему указанную начальную скорость.

- **Потенциальное силовое поле**
- **Силовое поле** – пространство, в каждой точке которого на материальную точку действуют силы, зависящие от координат точки.
- **Стационарное силовое поле** – действующие силы которого не зависят от времени, ***F*** = ***F***(*x, y,z*) (поле силы тяжести, поле силы упругости).
- **Нестационарное силовое поле** - действующие силы которого зависят от времени, ***F*** = ***F***(*x, y,z, t*) (электромагнитное поле).

- **Потенциальное силовое поле** – в котором существует функция, в каждой точке пространства удовлетворяющая соотношениям:

$$\boxed{X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},}$$

где $U = U(x, y, z)$ – **силовая функция**.

Силовая функция определяется с точностью до постоянной: $X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial (U+C)}{\partial x}; Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial (U+C)}{\partial y}; Z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial (U+C)}{\partial z}.$

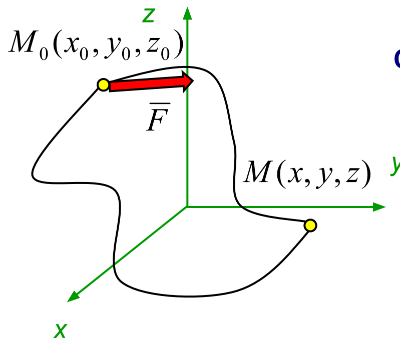
- **Основные свойства силовой функции:**

1. **Элементарная работа силы потенциального поля равна полному дифференциалу силовой функции:** $\boxed{\delta A = dU,}$

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. = dU.$$

2. **Полная работа силы потенциального поля не зависит от траектории перемещения точки и равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях:** $\boxed{A_{M_0M} = U - U_0,}$

$$A = \int_{M_0}^{M} \delta A = \int_{M_0}^{M} \delta U = U\Big|_{M_0}^{M} = U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0) = U - U_0.$$



Следствие: Работа силы потенциального поля при перемещении точки по замкнутой траектории равна нулю: $\boxed{A_{M_0M} + A_{MM_0} = (U - U_0) + (U_0 - U) = 0.}$

Потенциальная энергия системы – функция, характеризующая запас энергии (потенциальной энергии) в данной точке потенциального силового поля.

Потенциальная энергия равна работе сил потенциального поля, действующих на материальную точку, **при ее перемещении из данного положения в начальное** (нулевое). Для системы материальных точек потенциальная энергия равна сумме работ сил потенциального поля на всех перемещениях точек системы в начальное положение.

Величина потенциальной энергии в начальном положении принимается равной нулю: $\Pi(x_0,y_0,z_0) = 0$.
В произвольной точке потенциальная энергия является функцией координат: $\Pi(x,y,z)$.
Тогда по определению: $\Pi = A_{MM_0} = -A_{M_0M} = -(U - U_0) = U_0 - U.$ $\boxed{\Pi = U_0 - U.}$ – **связь потенциальной энергии с силовой функцией.**

С учетом: $\Pi(x_0,y_0,z_0) = 0$ соотношение связи можно записать как разность: $\boxed{\Pi - \Pi_0 = U_0 - U.}$

Таким образом, изменение потенциальной энергии равно и обратно по знаку изменению силовой функции. Тогда:

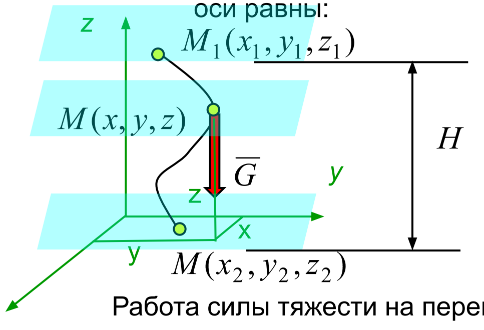
$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{aligned}}$$

$$\boxed{\delta A = dU = -d\Pi.}$$

Поскольку потенциальная энергия также определена с точностью до постоянной, то работа силы потенциального поля на перемещении из точки M_0 в точку M равна: $\boxed{A_{M_0M} = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.}$

Лекция 10 (продолжение 10.3)

- **Примеры потенциальных силовых полей**
- **Поле силы тяжести**. Сила тяжести, работа которой не зависит от траектории, является примером силы, имеющей **потенциал – геометрическое место точек пространства, в которых потенциальная энергия постоянна**. Проекции силы тяжести на координатные оси равны:



$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0; \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0; \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -G.$$

Последнее выражение есть дифференциальное уравнение, которое легко решается разделением переменных и интегрированием левой и правой частей:

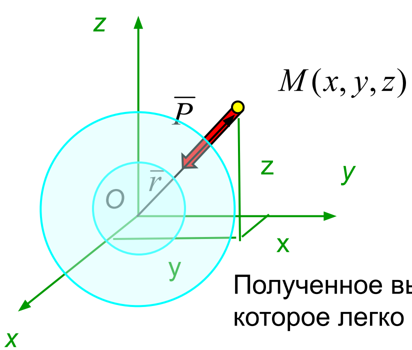
$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{d\Pi}{dz} = G \Rightarrow \Pi = Gz + C.$$

Эквипотенциальные поверхности (*П = const*) представляют собой **горизонтальные плоскости**. Сила тяжести направлена перпендикулярно к этим плоскостям в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

Работа силы тяжести на перемещении из точки M_1 в точку M_2: $A_{M_1M_2} = \Pi_1 - \Pi_2 = (Gz_1 + C) - (Gz_2 + C) = G(z_1 - z_2) = GH.$

- **Поле центральной силы притяжения.** Силы тяжести могут считаться параллельными и постоянными по величине только в небольшой области пространства в поле тяготения Земли и эквипотенциальные поверхности могут считаться плоскими только в пределах этой области. В случае рассмотрения силы притяжения к центру величина силы прямо пропорциональна массе и обратно пропорциональна квадрату расстояния между материальной точкой и центром тяготения *O*:

$$P = k\frac{m}{r^2}$$



Проекции силы притяжения на координатные оси равны:

$$X = -P\cos(\overline{P}, x) = -k\frac{m}{r^2}\frac{x}{r}; \quad Y = -P\cos(\overline{P}, y) = -k\frac{m}{r^2}\frac{y}{r}; \quad Z = -P\cos(\overline{P}, z) = -k\frac{m}{r^2}\frac{z}{r}.$$

Элементарная работа силы притяжения:

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz = -k\frac{m}{r^3}(xdx + ydy + zdz).$$

$$d(r^2) = d(x^2 + y^2 + z^2), \quad rdr = xdx + ydy + zdz.$$

Дифференциал потенциальной энергии: $d\Pi = -dU = -\delta A = k\frac{m}{r^3}rdr.$

Полученное выражение есть дифференциальное уравнение, которое легко решается интегрированием левой и правой частей:

$$d\Pi = k\frac{mdr}{r^2} \Rightarrow \Pi = -k\frac{m}{r} + C.$$

Эквипотенциальные поверхности (*П = const*) поля центрального тяготения представляют собой **сферические поверхности** с центром в точке *O*. Сила притяжения направлена по нормали к этим поверхностям в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

- **Закон сохранения механической энергии – При движении механической системы в стационарном потенциальном поле полная механическая энергия системы остается постоянной.**

По теореме об изменении кинетической энергии системы: $T_2 - T_1 = \sum A_k = \Pi_1 - \Pi_2.$ Отсюда: $\boxed{T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1 = const.}$

Сумму кинетической и потенциальной энергий называют **полной механической энергией системы**.