Логика

Уроки

Логика – наука о законах и формах мышления.

Слово «логика» произошло от древнегреческого logos, что означает «слово, мысль, понятие, рассуждение, закон».

Основные формы мышления: понятие, высказывание, умозаключение.

Понятие – это форма мышления, которая выделяет существенные признаки предмета или класса предметов, позволяющие отличать их от других («Вот стул на нем сидят, вот стол – за ним едят.»).

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Земля – планета солнечной системы. 3+5=19

Умозаключение – это форма мышления, с помощью которой из одного или несколько суждений может быть получено новое суждение (вывод). (Доказательство теорем в алгебре).

Английский математик **Джордж Буль** (1815-1864) изобрел своеобразную алгебру – систему обозначений и правил, применимую к всевозможным объектам, в частности к высказываниям. Эта алгебра называется его именем – алгебра Буля или булева алгебра.

Логическая переменная – это простое высказывание (содержит одну мысль), значение которой 0 (ложь, false) или 1 (истина, true), обозначается латинскими буквами.

Логическая функция – составное высказывание, полученное из простых высказываний, соединенных между собой с помощью логических операций.

Логические операции.

Логические операции над высказываниями выполняются на основе законов и правил булевой алгебры.

<u>Логическое умножение</u> КОНЪЮНКЦИЯ (⋀,&) определяет соединение логических выражений с помощью союза И.

Например: 1) А – “X>10”; В – “X< 30”; А и В - “10<X<30”.

2) А – “Компьютер предназначен для обработки информации”

В – “Компьютер предназначен для хранения информации”

А и В – “Компьютер предназначен для обработки и хранения информации”

3) Иванов посещает факультатив по математике и по физике.

Сложное высказывание **А и В** принимает значение - истина, когда оба высказывания принимают значение - истина.

<u>Логическое сложение</u> ДИЗЪЮНКЦИЯ (⋁) определяет соединение логических выражений с помощью союза ИЛИ.

Например: В библиотеке есть книги Беляева А.Р. или книги других фантастов. X≥0.

Иванов участвует в олимпиаде по математике или по физике.

Сложное высказывание **А или В** принимает значение **-** истина, когда хотя бы одно из высказываний принимает значение - истина.

<u>Отрицание ИНВЕРСИЯ - НЕ (¬)</u> изменяет значение логического высказывания на противоположное.

Например: 1) А – “а – простое числи”; не А – “неверно, что а – простое число.»

Логические операции.

<u>Импликация (логическое следование) (→) соответствует связке « если …, то …»</u>
Если А, то В, В необходимо для А, А достаточно для В, В тогда, когда А
Импликация истинна всегда, за исключением случая, когда А истинно, а В ложно**.**
Пример: Если идет дождь, то земля сухая. (ложь)
А - “х делится на 9”
В - “х делится на 3”
А → В - “если число х делится на 9, то оно делится на 3” (истина)

<u>Эквивалентность(равнозначность) (⇔, =) соответствует связке «тогда и только тогда, когда..»</u>. А тогда и только тогда, когда В

Результат эквивалентности будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных выражения одновременно истинны или ложны.

<u>Исключающая дизъюнкция «либо…, либо» ⊕,</u> (неэквивалентность) А ⊕В.
Результат будет истинным, когда одно из исходных выражений истинно, а другое ложно.
Пример: Пан или пропал.

Построение таблиц истинности.

Таблица истинности – таблица, определяющая значение сложного высказывания при всех возможных значениях простых высказываниях.

Для составления таблицы надо:

1. определить число переменных;
2. выяснить количество строк в таблице (вычисляется как 2^n, где n – количество переменных);
3. выяснить количество столбцов = количеств переменных + количество логических операций;
4. установить последовательность выполнения логических операций;
5. записать логические операции в таблицу истинности и определить для каждого значение;

Порядок выполнения логических операций:

1. операция в скобках;
2. отрицание;
3. логическое умножение;
4. логическое сложение;
5. импликация;
6. эквивалентность.

Составьте по булевому выражению $F=(A \vee B) \wedge \neg C$ таблицу истинности:

A	B	C	¬ C	A∨B	(A∨B)∧ ¬ C
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Самостоятельно: 1) $F=A \vee \overline{(}B \wedge C)$; 2) $F=A \wedge (\overline{B} \vee \wedge C)$; 3) $F\overline{=}(A \wedge B) \vee C$.

Законы алгебры логики.

Если логическое выражение содержит большое число операций, то составлять для него таблицу истинности достаточно сложно. В таких случаях формулы надо привести к нормальной форме. Формула имеет нормальную форму, если в ней отсутствуют знаки эквивалентности, импликации, двойного отрицания, знаки отрицания находятся только при логических переменных. Для приведения формулы к нормальной форме используют законы логики и правила преобразований.

Тождества.

$A + 0 = A$	**$A \& 0 = 0$**	
$A + 1 = 1$	**$A \& 1 = A$**	**$\overline{\overline{A}} = A$** **двойное отрицание**
$A + A = A$	**$A \& A = A$**	
$A + \overline{A} = 1$	**$A \& \overline{A} = 0$**	

Законы алгебры логики.

Переместительный закон

$A + B = B + A$ $A \& B = B \& A$

Сочетательный закон

$(A + B) + C = A + (B + C)$ $(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$

Распределительный закон

$(A + B) \& C = A \& C + B \& C$ дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции – аналог раскрытия скобок в алгебре

$A \& B + C = (A + C) \& (B + C)$ дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции – «чудо» логики, в алгебре аналога нет.

Закон де Моргана (закон отрицания)

$\overline{A + B} = \overline{A} \& \overline{B}$ $\overline{A \& B} = \overline{A} + \overline{B}$

Доказать на уроке, используя таблицы истинности.

$A \rightarrow B = \overline{B} \rightarrow A = \overline{A} + B$

$A \leftrightarrow B = A \& B + \overline{A} \& \overline{B} = (\overline{A} + B) \& (A + \overline{B})$

Задания:

1) Записать формулу, упростить:

1. А или (не А и В)
2. А и (не А или В)
3. (А или В) и (не В или А) и (не С или В)
4. (1 или (А или В)) или ((А или С) и 1)

Решение:

$A + (\overline{A} \& B) = (A + \overline{A})\&(A + B) = 1\& (A + B) = A + B;$

$A \& (\overline{A} + B) = A\&\overline{A} + A\&B = 0 + A\&B = A\&B;$

$(A + B)\&(\overline{B} + A)\&(\overline{C} + B) = (A\&\overline{B} + A\&A + B\&\overline{B} + B\&A)\&(\overline{C} + B) =$

$(A\&\overline{B} + A + 0 + B\&A)\& (\overline{C} + B) = A\&(\overline{B} + 1 + B)\& (\overline{C} + B) = A\&(\overline{C} + B);$

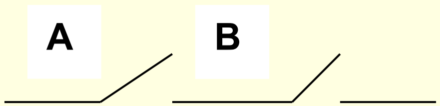
$(1 + (A + B)) + ((A + C)\&1) = 1 + (A + C) = 1.$

2) Доказать, используя таблицы истинности, второй распределительный закон $A\& B + C = (A + C)\& (B + C)$.

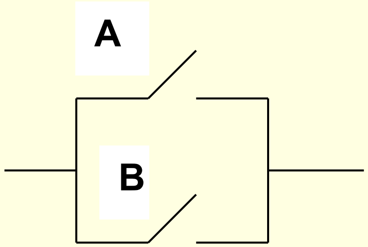
Логические схемы.

Над возможностями применения логики в технике ученые и инженеры задумывались давно. Американский логик Чарльз Сандерс Пирс первым осознал, что бинарная логика имеет сходства с работой электрических переключательных (контактных) схем. Компьютер работает на электричестве, любая информация представлена в компьютере в виде электрических импульсов. Рассмотрим реализацию логических элементов через электрические контактные схемы. Контакты обозначены латинскими буквами.

Последовательное соединение контактов. Цепь с последовательным соединением соответствует логической операции И (конъюнкции).



Параллельное соединение контактов Цепь с параллельным соединением соответствует логической операции ИЛИ (дизъюнкции).



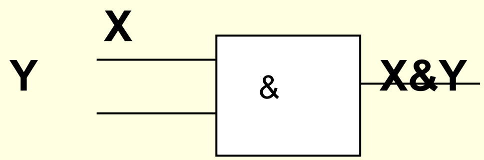
Логическая операция НЕ (инверсия) реализуется через контактную схему электромагнитного реле.

&

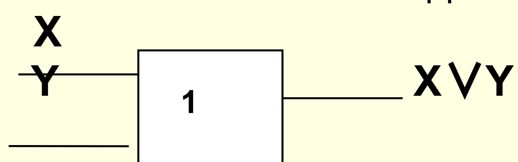
Логические схемы – схемы, выполняющие операции преобразования: запоминания, пересылки двоичных битов информации в компьютере

Логический элемент (вентиль) – часть электронной логической схемы, которая выполняет элементарную логическую операцию. К элементарным логическим операциям реализуемым на логических микросхемах относятся операции: и, или, не, и-или, и-не, или-не, и-или-не и др.

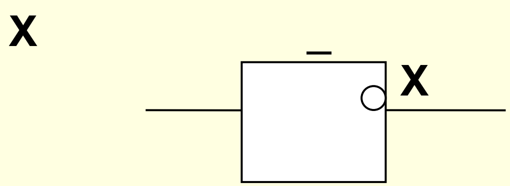
Логический элемент И - конъюнктор.&



Логический элемент ИЛИ – дизъюнктор.



Логический элемент НЕ – инвертор.

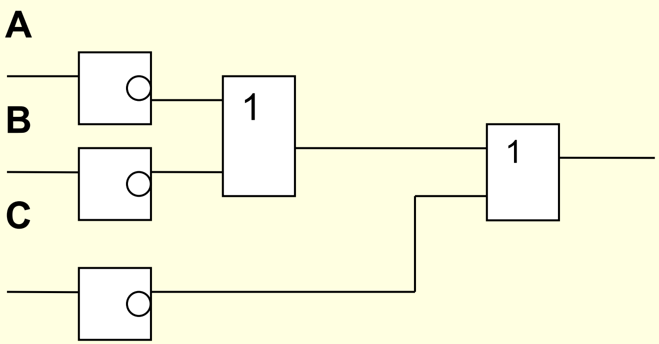


Задания:

Упростить логическое выражение.
Построить таблицу истинности.
Построить логическую схему.
Показать. Что схема работает в соответствии с таблицей истинности.

Выражение: $F = \overline{A\&B} + \overline{B\&C}$

Ответ: $F = \overline{A\&B} + \overline{B\&C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{B} + \overline{C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.



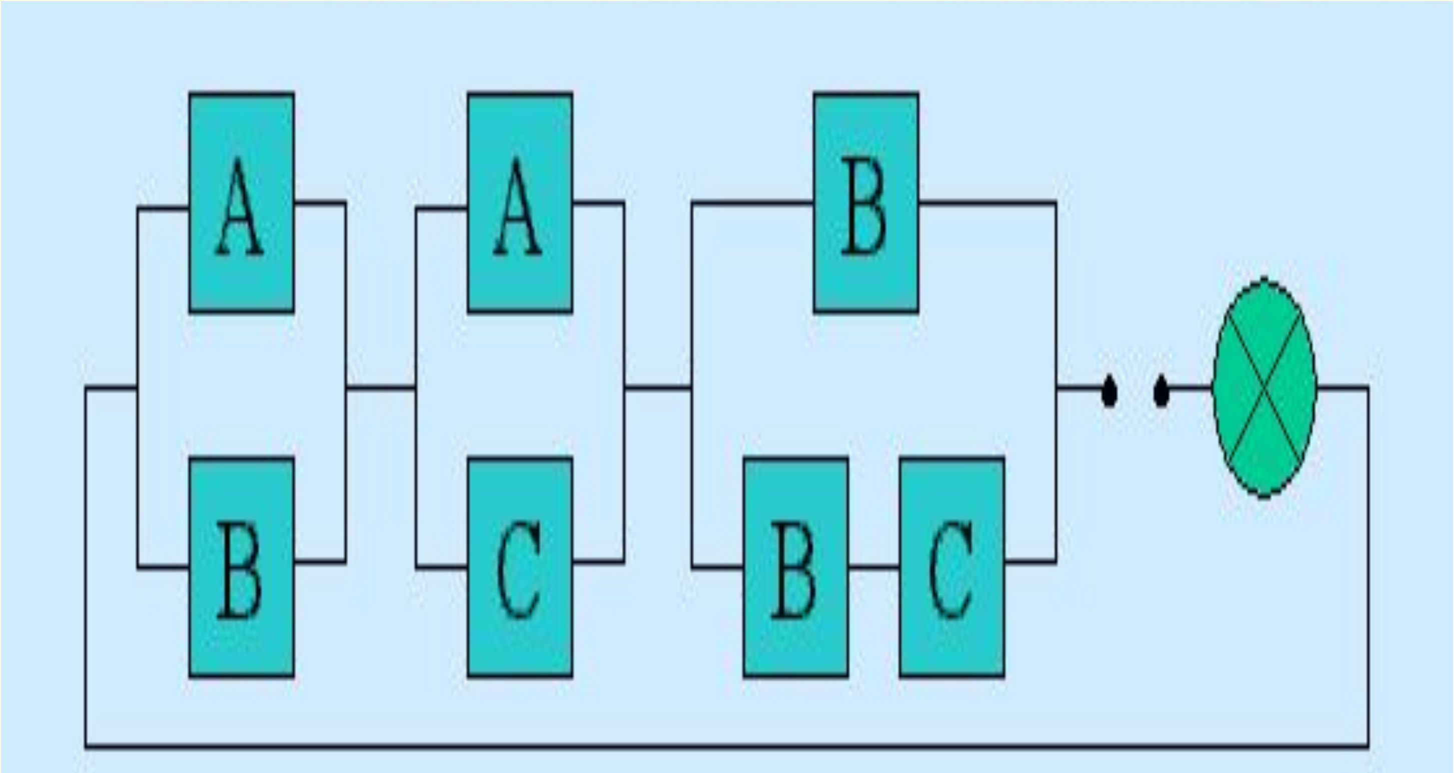
Задание для самостоятельной работы:

1) $F = \overline{X\&Y + Y\&Z} + Z\&\overline{X} = \overline{Y\&(X + Z)} + Z\&\overline{X} = \overline{Y} + \overline{X + Y} + Z\&\overline{X} =$

$\overline{Y} + \overline{X}\&\overline{Z} + Z\&\overline{X} = \overline{Y} + \overline{X}\&(\overline{Z} + Z) = \overline{Y} + \overline{X}$

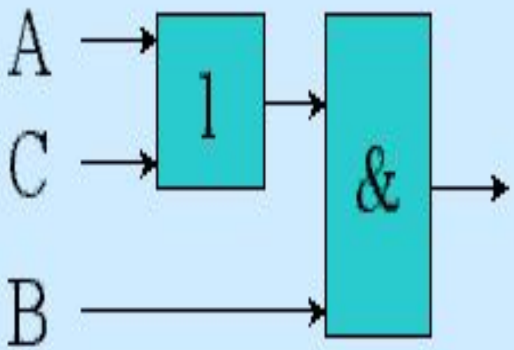
2) F = A&B + D + ¬(A + ¬B) = A&B + D + ¬ A&B = B&(A + ¬ A) + D = B + D.

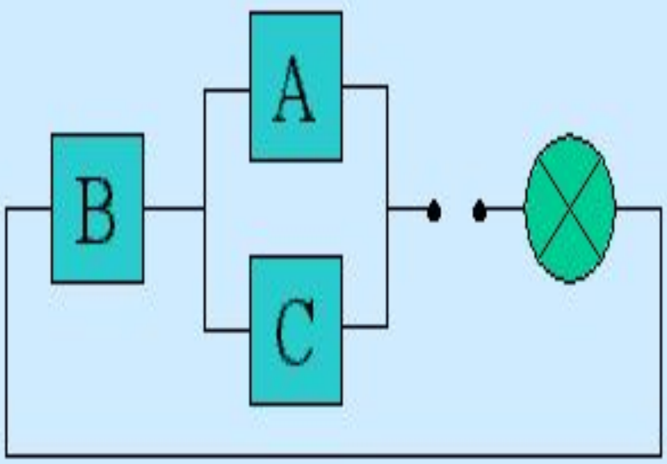
Упростить электрическую схему и построить электрическую и логическую схемы результата.



Решение

$$P=(A+B)(A+C)(B+BC)=B(A+C)$$





Алгебра логики дала в руки конструктора мощное средство разработки, анализа и совершенствования логических схем. Гораздо проще, быстрее и дешевле изучать свойства и доказывать правильность работы схемы с помощью выражающей ее формулы, чем создавать реальное техническое устройство. Именно в этом состоит смысл математического моделирования.

Сумматор –

это электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных чисел.

В целях максимального упрощения работы компьютера все многообразие математических операций в процессоре сводится к сложению двоичных чисел. Поэтому главной частью процессора является сумматор, который обеспечивает такое сложение. При сложении двоичных чисел образуется сумма в данном разряде, при этом возможен перенос в старший разряд. Обозначим слагаемые A и B, сумму S и перенос P. Построим таблицу сложения одноразрядных двоичных чисел с учетом переноса в старший разряд.

A	B	S	P
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Составим булево выражение по этой таблице:

$S = \bar{A}\&B + A\&\bar{B}$; $P = A\&B$

Упростим формулу для S:

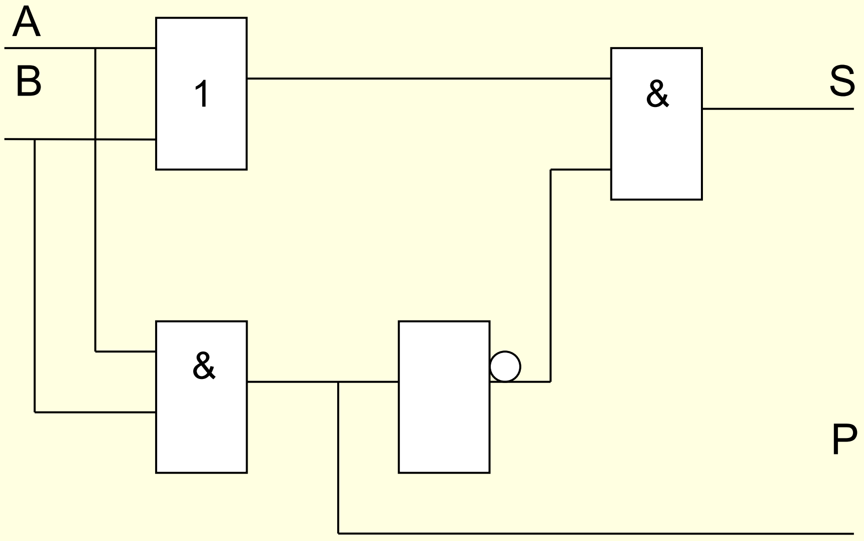
$\bar{A}\&B = \bar{A}\&A + \bar{A}\&B = \bar{A}\&(A + B)$,

$A\&\bar{B} = A\&\bar{B} + B\&\bar{B} = \bar{B}\&(A + B)$.

$S = \bar{A}\&B + A\&\bar{B} = \bar{A}\&(A + B) + \bar{B}\&(A + B) =$

$(A + B)\&(\bar{A} + \bar{B}) = (A + B)\&\overline{A\&B}$.

Схема сумматора

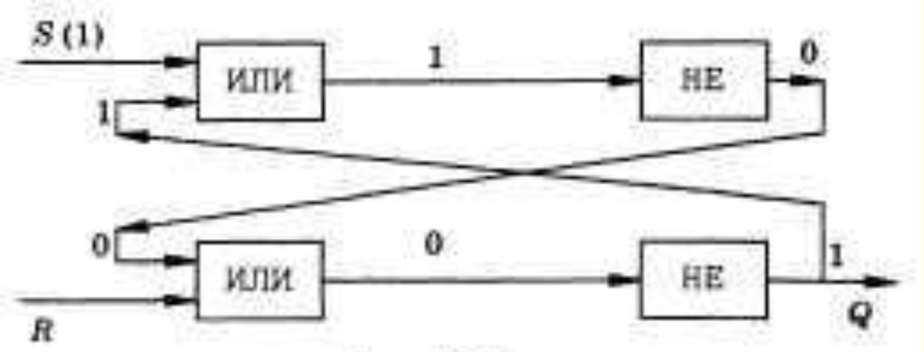


Триггер. Регистры.

Триггер – устройство памяти компьютера для хранения одного бита информации.

Это устройство позволяет запоминать, хранить и считывать информацию. Триггер может находиться в одном из двух устойчивых состояний, которые соответствуют логической»1» и логическому «0». Триггер способен почти мгновенно переходить из одного электрического состояния в другое и наоборот. Самый распространенный триггер – SR-триггер (S и R от английских слов set – установка, reset – сброс). Он имеет два входа S и R, два выхода Q и ¬Q. На каждый из входов подаются входные сигналы в виде кратковременных импульсов «1», отсутствие импульса – «0».

Для построения триггера достаточно двух логических элементов «ИЛИ» и двух элементов «НЕ».



Запрещено

При подаче сигнала на вход S триггер переходит в устойчивое единичное состояние.

При подаче сигнала на вход R триггер сбрасывается в устойчивое нулевое состояние.

При отсутствии входных сигналов триггер сохраняет тот сигнал, который был установлен входным импульсом.

Если на два входа подан сигнал, то появляется неоднозначный результат, поэтому такая комбинация запрещена.

S	R	Q	$\overline{Q}$	Режим триггера
0	0	Последнее значение		Хранение 1 бит
0	1	0	1	Установка «0»
1	0	1	0	Установка «1»
1	1	Запрещено		

Регистр

– это устройство, предназначенное для хранения многоразрядного двоичного числового кода, которым можно представлять и адрес, и команду, и данные. Если в регистр входит N триггеров, то можно запомнить N бит информации. Регистры содержатся в различных вычислительных узлах компьютера – процессоре, периферийных устройствах и т.д.