Суетовская муниципальная средняя (полная) общеобразовательная школа
Ярцевского района Смоленской области

Задачи
на клетчатой бумаге

Выполнили:
учащиеся 8 класса
Гасимова С. И., Лущик В. А.
Максимова А. В., Петрова В. А.
Руководитель:
учитель математики
Буренкова Е. А.

Суетово – 2011

Формула Пика

Сколько узлов на отрезке?

Задачи на разрезание

Расстояние в «клетчатом» городе

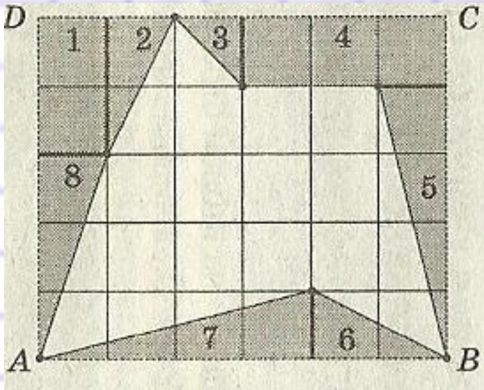
Игры на клетчатой бумаге

Интересные факты

Литература

Об авторах

Задачи на нахождение площади многоугольника. Формула Пика



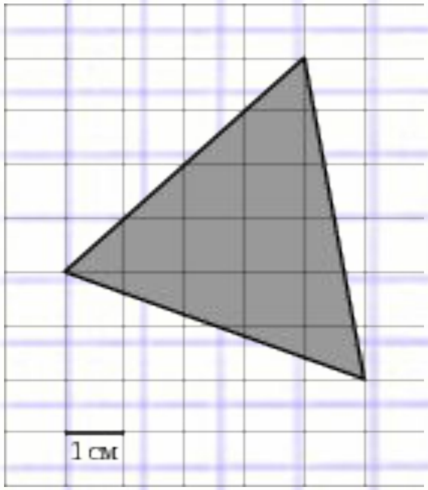
Линии, идущие по сторонам клеток, образуют сетку, а вершины клеток – узлы этой сетки. Нарисуем на листе многоугольник с вершинами в узлах и найдем его площадь. Искать её можно по-разному. Например, можно разрезать многоугольник на достаточно простые фигуры, найти их площадь и сложить.

Площади многоугольников, вершины которых расположены в узлах сетки, можно вычислять гораздо проще: обозначим через В количество узлов, лежащих внутри многоугольника, а через Г – количество узлов на его границе.

$$S = В + Г/2 - 1$$

Формула Пика

Порешаем…



Задача 1. В.6

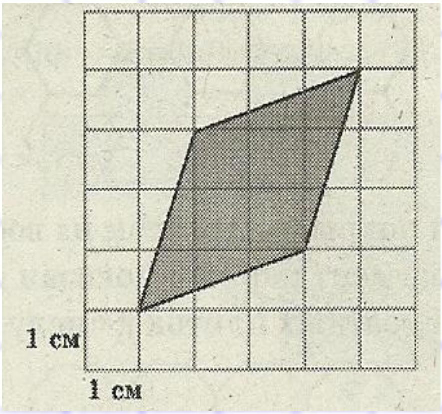
На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

Решение. По формуле Пика: $S = В + Г/2 - 1$

$В = 12$, $Г = 6$

$S = 12 + 6/2 – 1 = 14$ (см²)

Ответ: 14



Задача 2. Найдите площадь поля (в м²), изображённого на плане с квадратной сеткой 1 × 1см в масштабе 1 см – 200 м.

Решение. Найдём S площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге по формуле Пика: $S = В + Г/2 - 1$

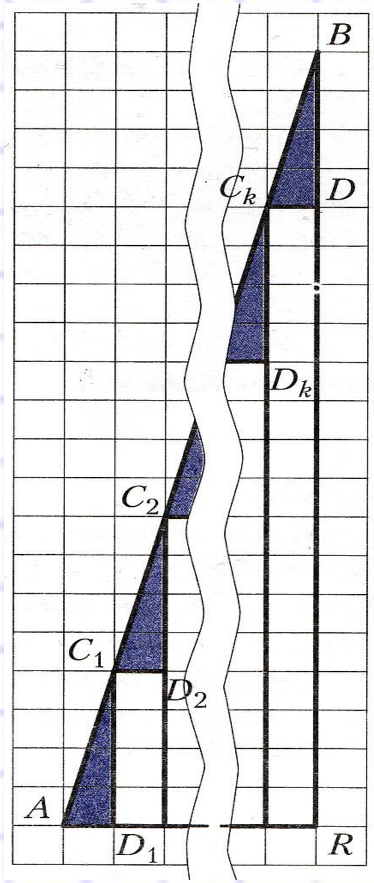
$В = 7$, $Г = 4$. $S = 7 + 4/2 – 1 = 8$ (см²)

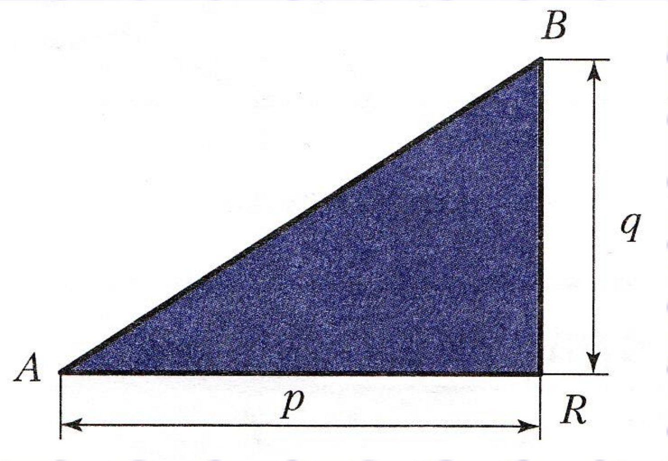
1 см² - 200² м²; $S = 40000 \cdot 8 = 320\ 000$ (м²)

Ответ: 320 000 м²

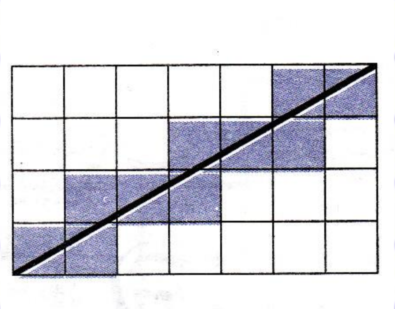
Сколько узлов на отрезке?

Теорема. Если p и q взаимно просты, то между A и B на отрезке AB нет узлов сетки. Если же наибольший общий делитель p и q равен n, где n > 1 (НОД (p, q) = n > 1), то на отрезке AB между точками A и B расположены ровно (n – 1) узлов сетки.





Порешаем…



Задача 1.

В прямоугольнике 4×7, нарисованном на клетчатой бумаге, провели диагональ. Сколько клеточек она разрезала?

Задачу 1 легко решить, просто «водя пальцем по картинке»

Задача 2. В прямоугольнике размером 200×300, нарисованном на клетчатой бумаге, провели диагональ. Сколько клеточек она разрезала на две части?

Решение.

Вдоль диагонали прямоугольника 200×300 можно расположить 100 прямоугольников 2×3, и в каждом из них, очевидно, диагональ будет рассекать по 4 клетки. Поэтому ответ к задаче 2 – четыреста клеток.

Задачи на разрезание

Классификация задач на разрезание:

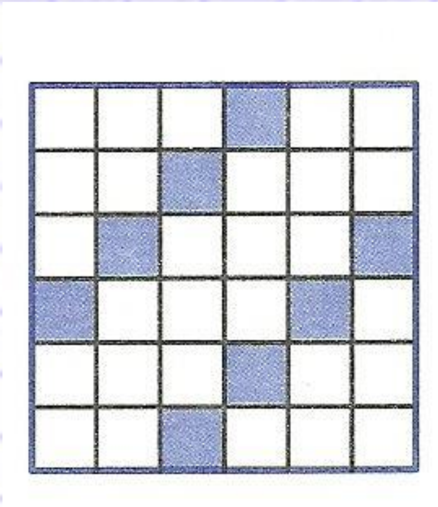
 * *Дробление* – требуется разрезать данную фигуру:
на заданное число равных между собой, или, как говорят математики, - конгруэнтных частей (фигур);
на заданное число конгруэнтных и подобных ей фигур (такие фигуры получили название «делящихся»);
определённым количеством прямых на максимально возможное число частей, не обязательно равных.
Возможны и другие вариации условий разрезания, так как фантазия человека не имеет ограничений.

 * *Квадрирование* – разрезание фигуры на возможно меньшее число частей, из которых затем можно сложить квадрат.

 * *Трансформирование* – требуется разрезать одну фигуру так, чтобы их её частей можно было сложить вторую заданную фигуру (не квадрат).

В отдельный подвид можно выделить очень популярные задачи на *разрезание шахматной доски,* которые отличаются от остальных задач на разрезание тем, что на доске есть раскраска квадратов, и это накладывает дополнительные требования при поиске решения.

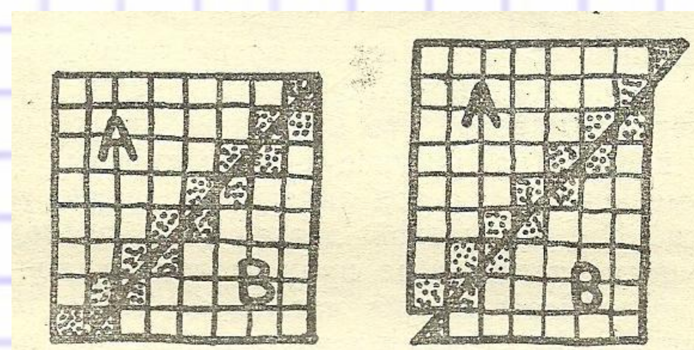
Порешаем…



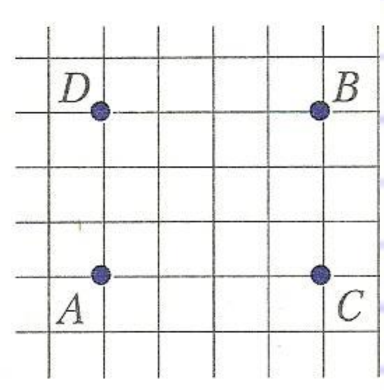
Задача 1. Можно ли разрезать квадрат 6×6 на полоски 1×4 ?
Решение. Используем раскраску, показанную на рисунке. Любая полоска 1×4, положенная на такую доску, покроет ровно одну чёрную клетку. Следовательно, если бы мы разрезали квадрат на полоски, то чёрных клеток оказалось бы столько же, сколько полосок. Но число полосок должно быть равно $(6 \cdot 6) : 4 = 9$, а чёрных клеток на этом рисунке 8! Значит разрезание невозможно.

Парадокс шахматной доски

Шахматная доска разрезается наискосок, как это изображено на левой половине рисунка 9, а затем часть В сдвигается влево вниз, как это показано на правой половине рисунка. Первоначальная площадь равнялась 64 кв. ед, теперь же она равна 63. Куда исчезла одна недостающая квадратная единица?



Расстояние в «клетчатом» городе

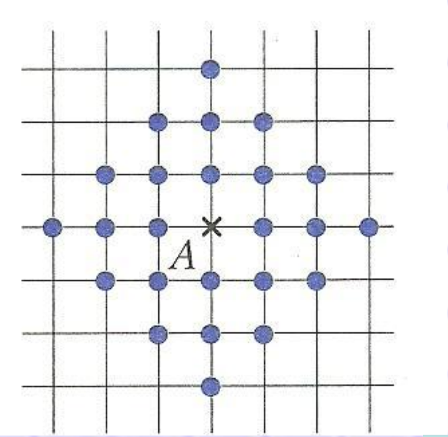


Возьмём хорошо знакомый нам листок клетчатой бумаги и представим себе, что это – город, линии сетки – улицы. Давайте прогуляемся по этому городу, ходя только по улицам (порядки в этом городе очень строгие). Длину клетки будем считать равной 1. Как нам быстрее всего попасть с перекрёстка A на перекрёсток B?

Можно, например, пройти из A в C, а потом – из C в B. Можно было идти через D, а можно – и более замысловатым путём. Что же мы теперь назовём расстоянием от A до B? Конечно, длину кратчайшего пути: 4 + 3 = 7.

А теперь представим себе, что у нас в запасе есть время проделать путь длиной 3. В каких узлах мы можем побывать, выйдя из A? (Или: из каких узлов можно добраться до A, пройдя путь не более 3?)

Ответ на этот вопрос изображён на рисунке



Порешаем…

Задача 2. Какое наибольшее количество котов можно разместить в узлах сетки на территории квадрата 4×4, чтобы расстояние между любыми двумя из них было не менее 2 (иначе коты подерутся)?

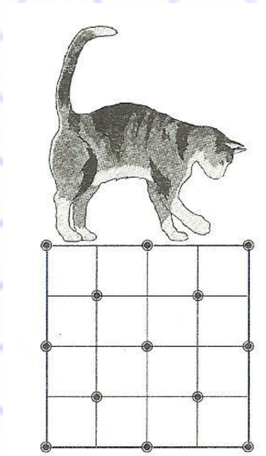


Рис. 1

Решение.

Без особого труда мы сумеем поделить территорию квадрата между 13 котами (рис. 1)

А вот 14 котов мирно ужиться на этой территории уже не смогут. Докажем это. Поделим всю территорию, кроме центра квадрата, на 4 непересекающиеся зоны (рис. 2).

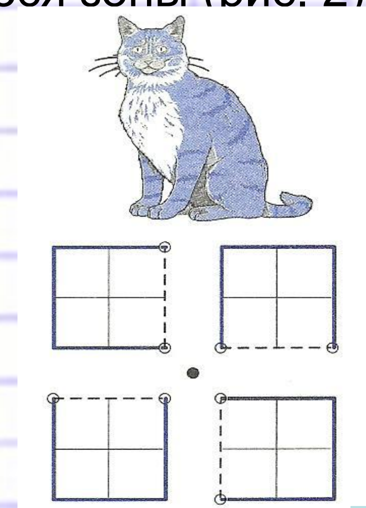


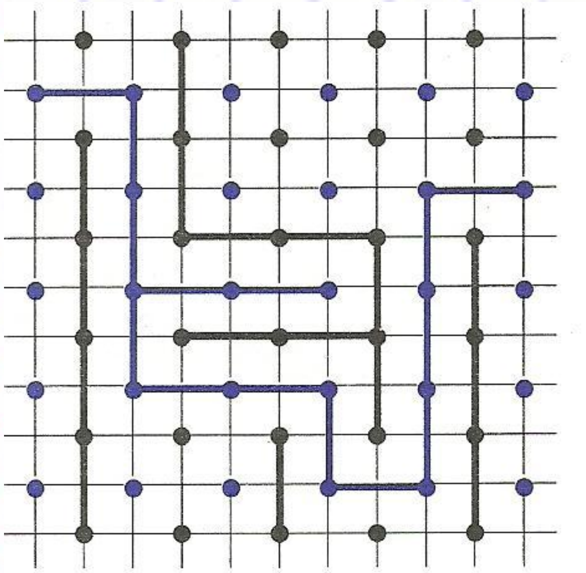
Рис. 2

Если даже одного из 14 котов поселить в центре квадрата, то остальных 13 придётся разместить по этим зонам. Значит, в какой-то зоне окажется хотя бы 4 кота.

Перебирая различные варианты расселения 4 котов в какой-нибудь из этих зон, легко увидеть, что это невозможно.

Игры на клетчатой бумаге

Бридж-ит («переброс мостик!»)



На рисунке показана доска для игры в бридж-ит. Участники игры по очереди проводят вертикальные или горизонтальные линии, соединяющие две соседние точки «своего» цвета: один игрок соединяет синими линиями синие точки, другой – чёрными линями чёрные точки.

Линии противников нигде не должны пересекаться.

Выигрывает тот, кто первым построит ломаную, соединяющую две противоположные стороны доски «своего» цвета.

Так на рисунке выиграли «синие».

В этой игре у начинающего игру есть выигрышная стратегия.

Порешаем…

Крестики - нолики

Популярная игра в крестики – нолики состоит в следующем. Двое по очереди рисуют на листе клетчатой бумаги крестики и нолики. Первый игрок

орой – нолики.

, кто первым поставит

ичество своих знаков в ряд (по

тали или диагонали).

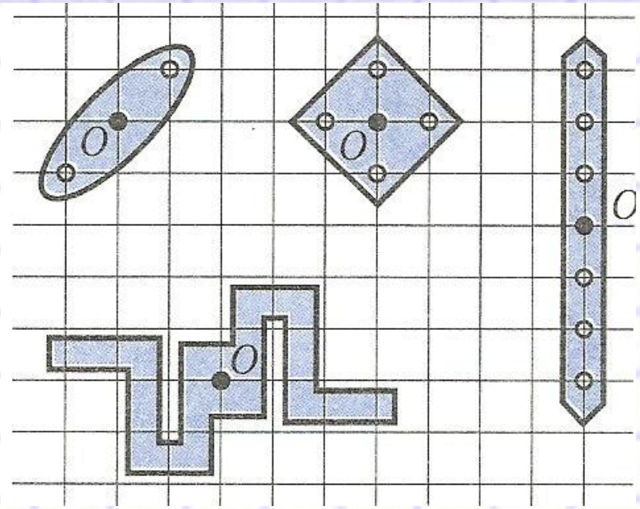
ача относится к этой игре.

при игре в крестики – нолики

ы хорошо он ни играл, не

может рассчитывать больше, чем на ничью, если его партнёр играет правильно.

Интересные факты



Факт 1.

Пусть выпуклый многоугольник имеет площадь больше 4 и начало координат является его центром симметрии. Тогда этот многоугольник содержит ещё хотя бы одну точку с целыми координатами. (*Теорема Минковского)*.

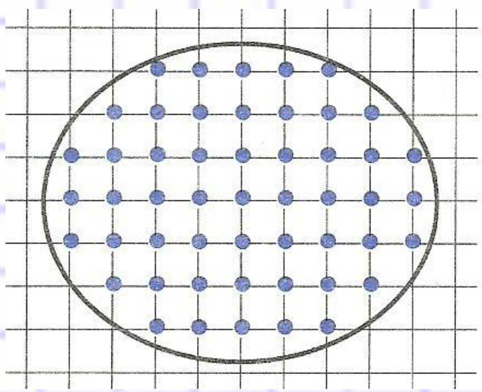
Эта теорема верна не только для выпуклых многоугольников, но и для выпуклых фигур – фигур, которые с любой парой своих точек содержат и весь отрезок с концами в этих точках. Например, круг и эллипс – выпуклые фигуры, а кольцо – нет.

Смысл этой теоремы состоит в том, что выпуклая фигура, «набирая» площадь 4, не сможет «избежать» захвата узлов сетки. Понятно, что для невыпуклых фигур это не так: они могут «набирать» площадь, «обходя» узлы сетки.

Интересные факты

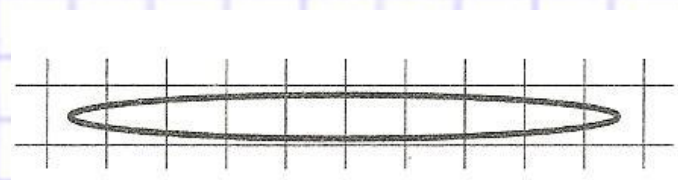
Факт 2. Пусть внутри выпуклой фигуры площади S и периметром 2p лежит узлов решётки. Тогда n > S – p.

Смысл этого факта таков: если мы захотим оградить на клетчатом листке участок (выпуклый) достаточно большой площади и мы сделаем это, «экономно» расходуя ограду, то на участке окажется довольно много узлов сетки. Если же мы будем расходовать ограду «неэкономно», сильно вытягивая участок, то узлов на участке может оказаться не так много (рис. 1 и 2).



Величина S – p велика. Узлов много!

Рис. 1



Площадь мала, а периметр велик. Узлов нет!

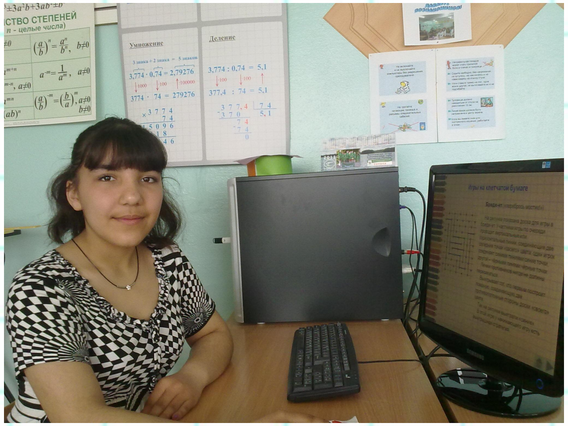
Рис. 2

Список литературы

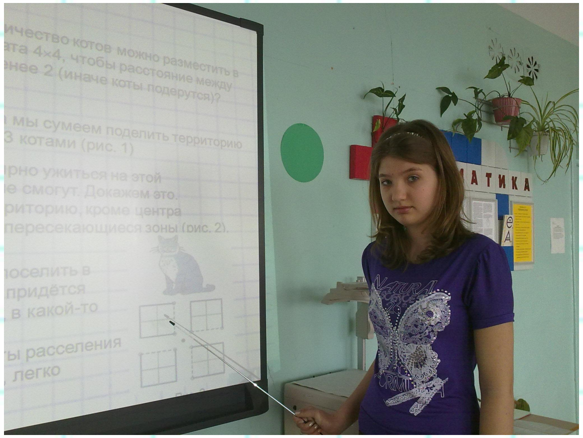
1. *Болотин И. Б., Добрышина Л. Ф.* Смоленские математические олимпиады школьников (готовимся к ЕГЭ). Смол. гос. ун-т; Смоленск: СмолГУ, 2008.
2. Геометрия на клетчатой бумаге. Малый МЕХмат МГУ. Режим доступа: http://mmmf.msu.ru/archive/20082009/KanunnikovKuznetsov/2.html
3. *Григорьева Г. И.* Подготовка школьников к олимпиадам по математике: 5 – 6 классы. Метод. пособие. – М.: Глобус, 2009.
4. *Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л.* Математические соревнования. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1970.
5. *Екимова М. А. ,Кукин Г. П.* Задачи на разрезание. М.: МЦНМО, 2002. Режим доступа: http://www.math.ru/lib/files/pdf/kukin.pdf
6. *Жарковская Н. М., Рисс Е. А*. Геометрия клетчатой бумаги. Формула Пика // Математика, 2009, № 17, с. 24-25.
7. Задачи открытого банка заданий по математике ФИПИ, 2010 – 2011. Режим доступа: http://mathege.ru/or/ege/ShowProblems.html?posMask=32
8. *Игнатьев Е. И.* В царстве смекалки. – М.: Наука, 1982.
9. Кенгуру – 2010. Задачи, решения, итоги. Режим доступа: http://russian-kenguru.ru/load
10. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2000.
11. *Рисс Е. А.* Математический клуб «Кенгуру» Выпуск № 8 (изд. второе). – Санкт-Петербург, 2009.
12. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Геометрия на клетчатой бумаге. – М.: Чистые пруды, 2009.
13. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Геометрические задачи с практическим содержанием. – М.: Чистые пруды, 2010.
14. *Смирнов В. А.* ЕГЭ. Математика. Задача В6. Планиметрия. Р/т. – М.: МЦНМО, 2011.
15. *Трошин В. В.* Занимательные дидактические материалы по математике. Сборник заданий. Выпуск 2. – М.: Глобус, 2008.
16. *Гарднер М.* Математические чудеса и тайны. – М.: Наука, 1986.

Об авторах

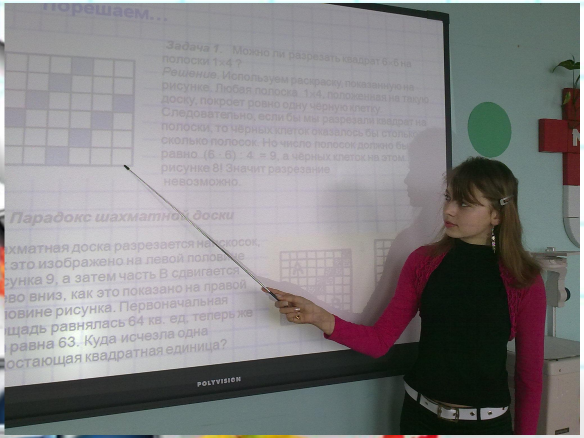
Работу выполнили ученицы 8 класса Суетовской средней школы
Ярцевского района Смоленской области



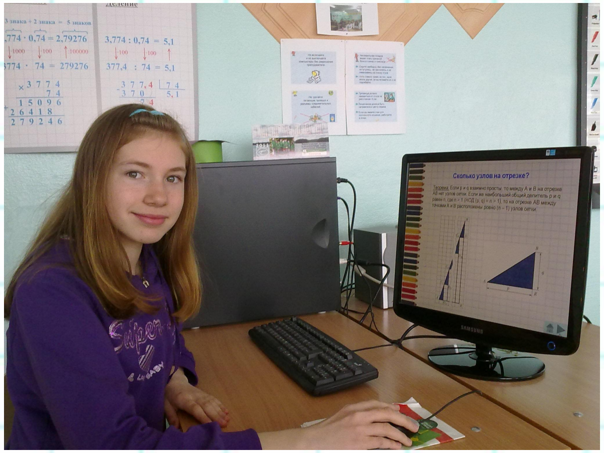
Гасимова София



Лущик
Виктория



Максимова
Алина



Петрова Валерия