Основные понятия «Теории вероятностей»

Определения и примеры

Теория и практика

Люди играют с кубиком, в "орла или решку", во всевозможные лотереи поскольку уверены в том, что эти игры справедливы, т.е. возможный результат каждого события имеет одинаковую вероятность – в противном случае эти игры просто бы не существовали.

Теория и практика

Если подброшенная на ваших глазах реальная монета 100 раз или хотя бы 10 подряд упала "орлом" вверх, то вы можете быть уверены, что она "неправильная", возможно, фальшивая – у нее явно смещен центр тяжести

Математические модели

математическая модель "монета":

выпадение "орла" или "решки " имеет одинаковую вероятность .

На заре зарождения теории вероятностей были скептики – исследователи, сомневавшиеся в этом вполне очевидном для нас факте и очень много раз подбрасывали монету, но всегда убеждались, что "орел" выпадает в половине случаев.

Количество выпадений "орла" при многократном подбрасывания монеты

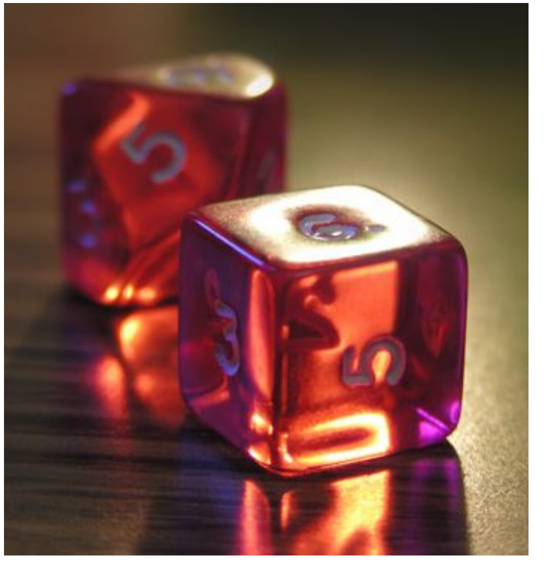
- **10 006** раз –
  для первых **20 000** бросаний,
- **9 996** раз–
  для вторых **20 000** бросаний,
- **20 002** раз–
  для всех **40 000** бросаний.

В любом случае частота выпадения "орла" была очень близка к половине.

Математические модели

математическая модель «игральная кость»:

выпадение каждой грани при многократном бросании кубика имеет одинаковую вероятность .



События и испытания

- Предметом исследования в теории вероятностей являются ***события***, появляющиеся при определенных условиях, которые можно воспроизводить неограниченное количество раз.
- Каждое осуществление этих условий называют ***испытанием***

Примеры

Примеры испытаний и событий

- ***Испытание*** – бросание игральной кости
- **Событие** – выпадение шестерки *или* выпадение четного числа очков
- ***Испытание*** – взвешивание тела на аналитических весах
- **Событие** – ошибка измерения не превзойдет заранее заданного числа

Вероятность случайного события

Степень объективной возможности случайного события можно измерять числом.

Это число называется **вероятностью случайного события.**

Около этого числа группируются относительные частоты данного случайного события

События могут быть

- Достоверные
- Невозможные
- Случайные

- Несовместные
- Независимые
- Противоположные

Достоверные события

Событие называется **достоверным,** если оно наступает всегда, при любом испытании.

Вероятность достоверного события всегда равна 1.

Примеры достоверных событий

Примеры достоверных событий

1. На игральном кубике выпадет меньше семи очков;
2. После лета наступит осень.

Невозможные события

Событие называют **невозможным**, если оно не наступает никогда, то есть благоприятных исходов для него 0.

Вероятность невозможного события равна 0 .

Примеры невозможных событий

Примеры невозможных событий

1. Падение монеты на ребро
2. Выпадение на игральной кости семерки

Случайные события

Событие называется **случайным**, если при одних и тех же условиях оно может как произойти, так и не произойти.

Примеры случайных событий

Примеры случайных событий

1. Выпадение на игральном кубике четного числа очков;
2. Выпадение орла при бросании монеты;
3. Выигрышное сочетание чисел на карточках русского лото.

Несовместные события

События A и B называются **несовместными**, если они не могут наступить одновременно, или, на языке множеств, $A \cap B = \varnothing$.

Примеры несовместных событий

Примеры несовместных событий

1. При бросании двух кубиков выпадение нечетной суммы очков и равных чисел на обоих кубиках;
2. Из короба с разноцветными шарами вытащить 2 шара. Несовместными будут события: оба шара красные и оба шара синие.

Независимые события

События А и В называются **независимыми**, если вероятность их произведения равна произведению их вероятностей: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Примеры независимых событий

Примеры независимых событий

1. На обоих кубах выпадет шестерка;
2. При подбрасывании двух монет выпадут два орла;
3. При вытаскивании двух шаров из урны оба шара будут красными.

Противоположные события

С каждым событием *А* связано **противоположное событие**, состоящее в том, что событие *А* ***не*** осуществляется.

Противоположные события, очевидно, несовместны.
Сумма вероятностей противоположных событий равна 1

Примеры противоположных событий

Примеры противоположных событий

1. На кубике выпадет четное число и на кубике выпадет нечетное число;
2. Монета упала орлом вверх и монета упала вверх решкой;
3. Лампа горит и лампа не горит.

Примеры задач на вычисление вероятностей случайных событий

З а д а ч а № 1.

Бросаются два кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6.

Р е ш е н и е .

Решение задачи №1 (н а ч а л о)

Бросаются два кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6.

Результат каждого бросания – это пара чисел **(*a*, *b*)**, где ***a*** и ***b*** – числа от **1** до **6**. Поэтому все поле событий состоит из **6х6 = 36** элементов

Решение задачи № 1 (продолжение)

Благоприятным исходом для рассматриваемого события является любая пара (a, b), для которой $a + b = 6$.

Подсчитаем, скольկими способами число 6 можно представить в виде суммы двух натуральных чисел от 1 до 6.

Это можно сделать пятью следующими способами:

$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1$,

Таким образом, вероятность заданного события равна 5/36.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Примеры задач на вычисление вероятностей случайных событий

З а д а ч а № 2.

Один стрелок делает 80% попаданий, а другой (при тех же условиях стрельбы) 70%. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка стреляют в нее одновременно. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной их двух пуль.

Р е ш е н и е (1 способ)

Р е ш е н и е (2 способ)

Р е ш е н и е (3 способ)

Решение задачи №2 (1 способ)

Один стрелок делает 80% попаданий, а другой (при тех же условиях стрельбы) 70%. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка стреляют в нее одновременно. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной их двух пуль.

Допустим, что производится 100 двойных выстрелов. Примерно в 80 из них цель будет поражена первым стрелком. Остается около 20 выстрелов, в которых этот стрелок даст промах. Так как второй стрелок поражает в среднем 70 раз из 100 выстрелов и, значит, 7 раз из 10 выстрелов, то мы можем ожидать, что в тех 20 выстрелах, в которых первый стрелок даст промах, второму удастся поразить цель примерно 14 раз. Таким образом, при всей сотне выстрелов цель окажется пораженной 80 + 14 = 94 раза. Вероятность поражения цели при одновременной стрельбе этих двух стрелков равна поэтому 94%, или 0,94.

Решение задачи №2 (2 способ)

Один стрелок делает 80% попаданий, а другой (при тех же условиях стрельбы) 70%. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка стреляют в нее одновременно. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной их двух пуль.

<ins>Вероятность попадания</ins>

Первого стрелка 0,8

Второго стрелка 0,7

<ins>Вероятность ***не*** попадания</ins>

Первого стрелка 1 - 0,8 = 0,2

Второго стрелка 1 - 0,7 = 0,3

<ins>Цель будет поражена, если</ins>

первый стрелок попадет, а второй нет $0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$
второй стрелок попадет, а первый нет $0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14$
оба стрелка попадут $0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$

Значит, цель будет поражена с вероятностью
$0{,}24 + 0{,}14 + 0{,}56 = 0{,}94$

Решение задачи №2 (3 способ)

Один стрелок делает 80% попаданий, а другой (при тех же условиях стрельбы) 70%. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка стреляют в нее одновременно. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной их двух пуль.

<u>Вероятность попадания</u>
Первого стрелка 0,8
Второго стрелка 0,7

<u>Вероятность ***не*** попадания</u>
Первого стрелка 1 - 0,8 = 0,2
Второго стрелка 1 - 0,7 = 0,3

<u>Цель ***не*** будет поражена, если</u>
оба стрелка ***не*** попадут $0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

Значит, цель ***будет поражена*** с вероятностью
$1 - 0{,}06 = 0{,}94$

Условная вероятность

Условной вероятностью события В при условии А называют отношение

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Вероятность <u>события В в новых условиях</u>: когда уже известно, что событие А произошло.

Условная вероятность

<u>Формула вычисления</u> вероятности события В при условии, что произошло событие А, но могло иметь место еще и событие С.

$$P(B|A) = \frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A|B)\cdot P(B) + P(A|C)\cdot P(C)}$$

Пример использования такой обобщенной формулы рассмотрен далее.

Примеры задач на вычисление вероятностей случайных событий

З а д а ч а № 3.

Пусть в некотором классе **25** учеников, из них

2 "отличника",
12 "твердых хорошистов",
9 "троечников",
а остальные 2 – "отстающие".

Проверяя контрольную работу, учитель поставил 5 за одну работу, которая оказалась неподписанной. Прав ли он, считая, что она принадлежит "отличнику", если вероятность получения пятерки соответственно равна:

Отличник 0,9
Хорошист 0,7
Троечник 0,3
Отстающий 0,1?

Р е ш е н и е .

Решение задачи №3 (н а ч а л о)

Если событие ***A*** – это ***поставленная пятерка за "анонимную" работу***, то надо найти условную вероятность события ***P(B|A),***

где ***B*** – событие, при котором ***неподписанная работа принадлежит одному из отличников*** .

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A|B)\cdot P(B)+P(A|C)\cdot P(C)+P(A|D)\cdot P(D)+P(A|E)\cdot P(E)},$$

буквами ***C, D, E*** обозначены события, при которых ***пятерку получил соответственно "хорошист", "троечник" и "отстающий".***

Решение задачи №3 (продолжение)

По условию

Из **25** учеников
2 "отличника",
12 "хорошистов",
9 "троечников",
2 "отстающие".

Неподписанная работа принадлежит

B - одному из отличников ,
C - одному из хорошистов ,
D - одному из троечников ,
E - одному из отстающих .

Значит,

$$P(B)=\frac{2}{25}$$

$$P(C)=\frac{12}{25}$$

$$P(D)=\frac{9}{25}$$

$$P(E)=\frac{2}{25}$$

Решение задачи №3 (продолжение)

<u>По условию</u>

Из **25** учеников
2 "отличника",
12 "хорошистов",
9 "троечников",
2 "отстающие".

<u>Неподписанная работа принадлежит</u>

B - одному из отличников ,
C - одному из хорошистов ,
D - одному из троечников ,
E - одному из отстающих .

Учитывая то, что анонимную работу написал <u>только один ученик,</u> рассмотрим вероятность того, что

работу написал ***отличник,***
а <u>не</u> хорошист, <u>не</u> троечник и <u>не</u> отстающий

$$P(A/B) = 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}1701$$

$$P(A/C) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}0441$$

работу написал ***хорошист,***

$$P(A/D) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}0081$$

работу написал ***троечник,***

$$P(A/E) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}0021$$

работу написал ***отстающий.***

Решение задачи №3 (окончание)

Подставим полученные значения в формулу

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A|B)\cdot P(B)+P(A|C)\cdot P(C)+P(A|D)\cdot P(D)+P(A|E)\cdot P(E)},$$

$$P(B)=\frac{2}{25} \qquad P(C)=\frac{12}{25} \qquad P(D)=\frac{9}{25} \qquad P(E)=\frac{2}{25}$$

$$P(A/B)=0{,}9\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}1701 \qquad P(A/D)=0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}9=0{,}0081$$

$$P(A/C)=0{,}1\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}0441 \qquad P(A/E)=0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1=0{,}0021$$

$$P(B/A)=\frac{\frac{2}{25}\cdot 0{,}1701}{0.1701\cdot\frac{2}{25}+0{,}0441\cdot\frac{12}{25}+0{,}0081\cdot\frac{9}{25}+0{,}0021\cdot\frac{2}{25}}=0{,}36$$

Продолжение следует….

Предлагаем посмотреть следующую часть презентации

«Занимательные вероятностные задачи»