Ф у н к ц и и

Теория:

Область определения

Областью определения D(y) **функции** ***y = f(x)*** **называется множество значений аргумента** ***x*****, для которого выражение** ***f(x)*** **определено (имеет смысл).**

Область определения любого многочлена – ***R*** **.**

Области определения основных элементарных функций:

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

$$D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0, +\infty).$$

$$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R.$$

$$D(\log_a x) = (0, +\infty).$$

$$D(\sin x) = D(\cos x) = R.$$

$$D(a^x) = R.$$

$$D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1, 1].$$

$$D(\operatorname{arctg} x) = D(\operatorname{arcctg} x) = R.$$

$$D(\operatorname{tg} x) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right), k \in Z.$$

Или: $D(\operatorname{tg} x): \; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

$$D(\operatorname{ctg} x) = (2\pi k; \pi + 2\pi k) \cup (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), \quad k \in Z.$$

Или: $D(\operatorname{ctg} x): \; x \neq \pi k, \quad k \in Z.$

Множество значений функции

Множеством (областью) значений E(y) **функции** *$y = f(x)$* **называется множество таких чисел** *y_0*, **для каждого из которых найдётся число** *x_0* **такое, что:** *$f(x_0) = y_0$*.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является *R* **. Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток [*m*; + *oo*],**
где ***m* – наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток [- *oo*;*n*], где *n* – наибольшее значение этого многочлена.**

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

$$E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0, +\infty).$$

$$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R.$$

$$E\left(a^x\right) = (0, +\infty).$$

$$E\left(\log_a x\right) = R.$$

$$E\left(\sin x\right) = E(\cos x) = [-1, 1].$$

$$E\left(\arcsin x\right) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$E\left(\arccos x\right) = [0, \pi].$$

$$E\left(\operatorname{tg} x\right) = E(\operatorname{ctg} x) = R.$$

$$E\left(\operatorname{arctg} x\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

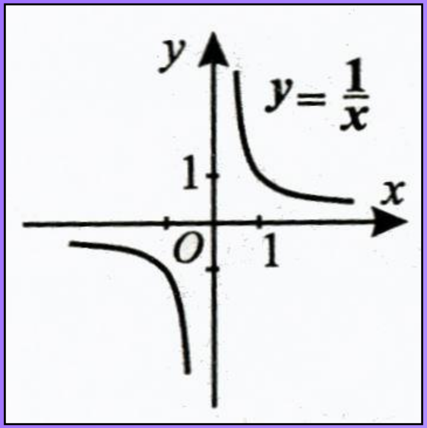
$$E\left(\operatorname{arcctg} x\right) = (0, \pi).$$

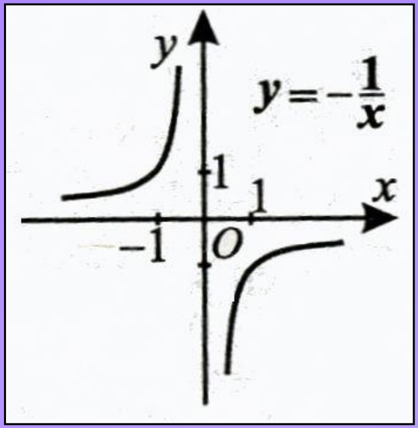
Чётность и нечётность функции.

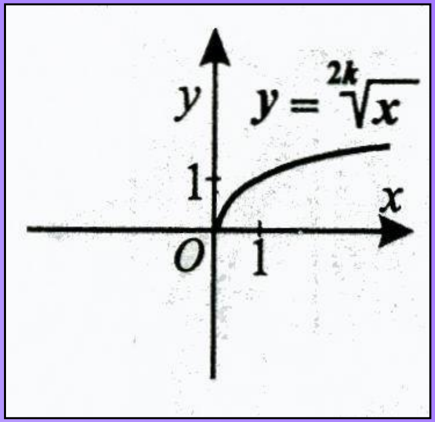
Функция *y = f(x)* называется *чётной*, если её область определения *D(f)* симметрична относительно начала координат, и для любого *x C D(f)* верно равенство *f(-x)=f(x)*. График чётной функции симметричен относительно оси OY.

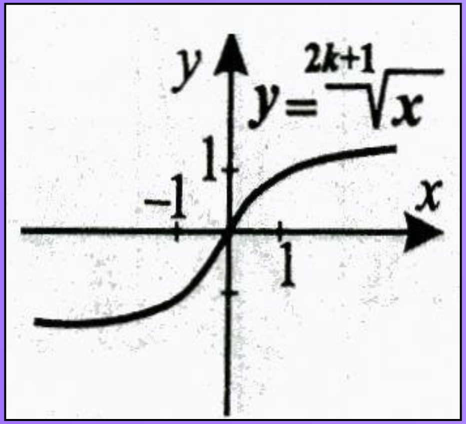
Функция *y = f(x)* называется *нечётной*, если её область определения *D(f)* симметрична относительно начала координат, и для любого *x C D(f) верно равенство f(-x)=-f(x)*.

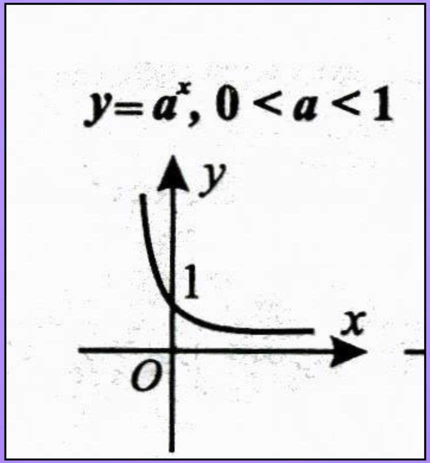
Графики элементарных функций.

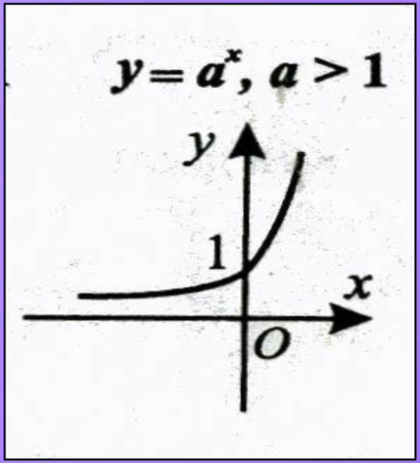




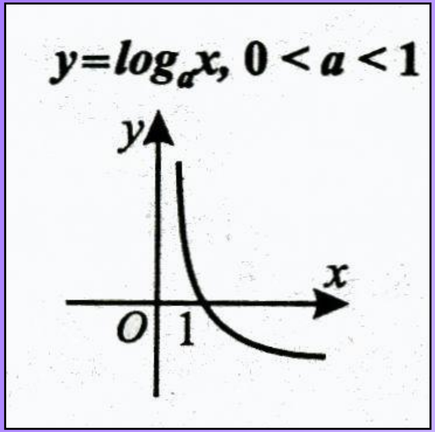


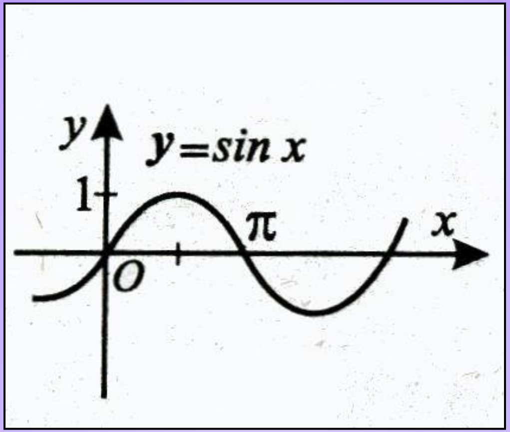


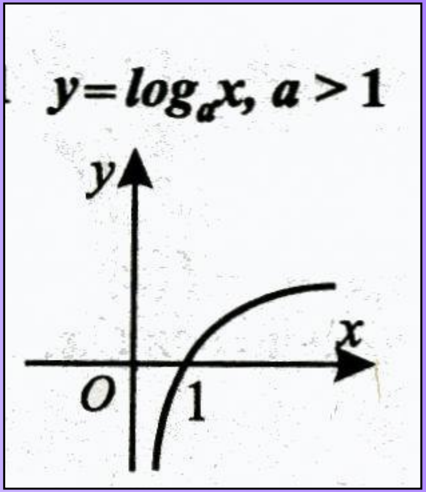


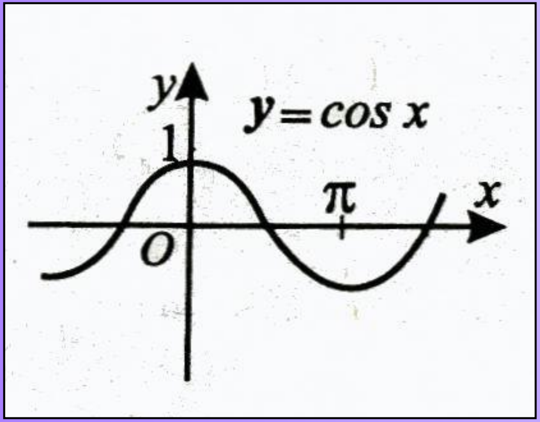


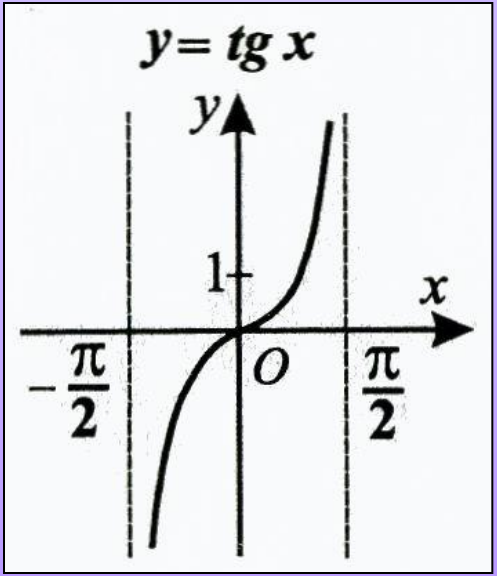
Графики элементарных функций.

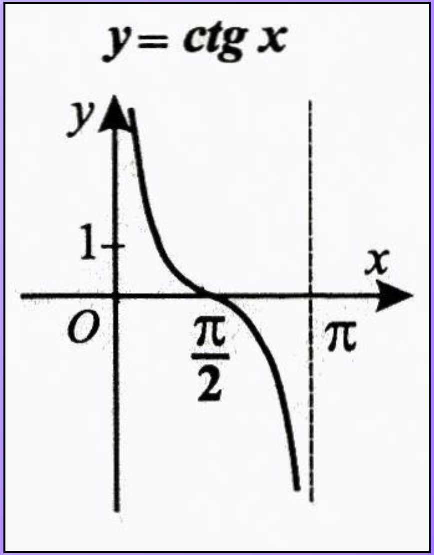












Графики элементарных функций.

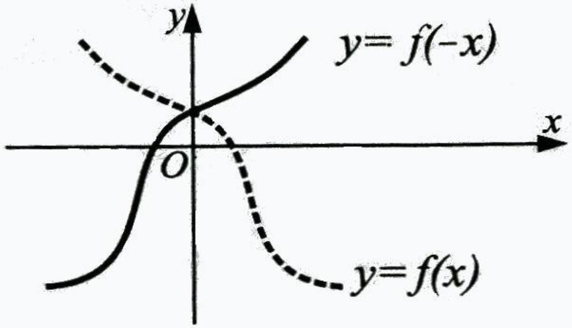


Рис. 9.

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy, см. рис. 9.

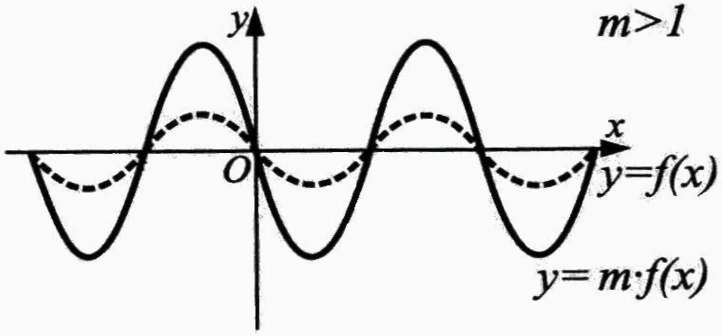


Рис. 10.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m «раз» вдоль оси Oy от оси Ox, см. рис. 10.

Графики элементарных функций.

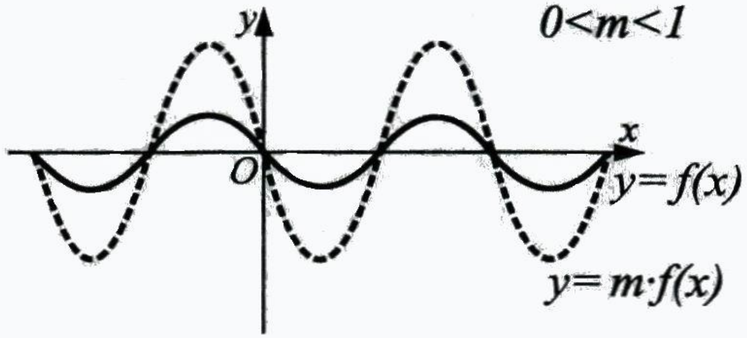


Рис. 11.

График функции $y = m\cdot f(x)$, $0 < m < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\dfrac{1}{m}$ «раз» вдоль оси Oy к оси Ox, см. рис. 11.

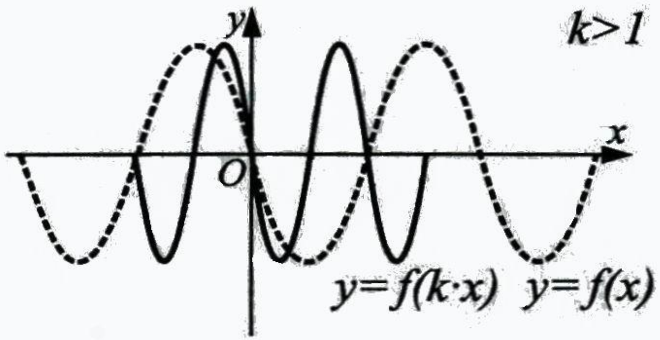


Рис. 12.

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k «раз» к оси Oy вдоль оси Ox, см. рис. 12.

Графики элементарных функций.

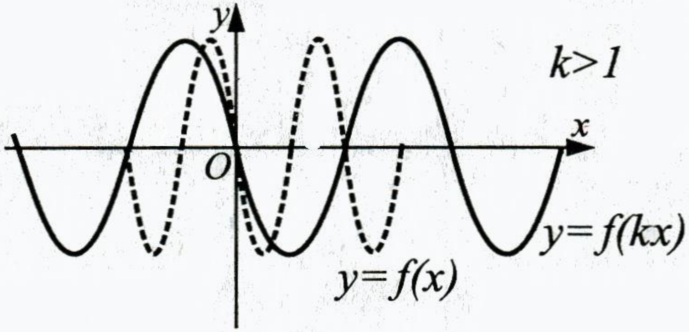


Рис. 13.

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\dfrac{1}{k}$ «раз» от оси Oy вдоль оси Ox, см. рис. 13.

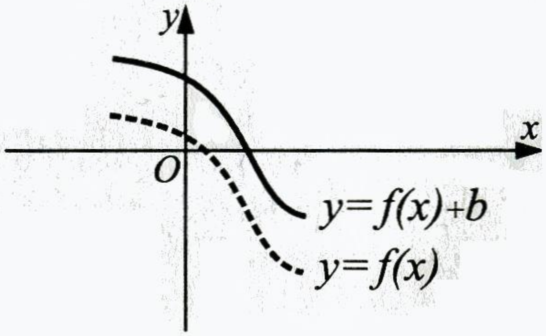


Рис. 14.

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$, см. рис. 14.

Таблица производных основных элементарных функций.

$$(c)' = 0 \quad (c - \text{const});$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\alpha - \text{const});$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Геометрический смысл производной.

$f'(x_o)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o. Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Оx. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o:

$$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Механический смысл производной.

Пусть $S = S(t)$ – уравнение зависимости пути от времени при движении какого – то тела. Тогда $S'(t)$ – скорость движения этого тела в момент времени t. $S''(t)$ – ускорение движущегося тела в момент времени.(а - ускорение).

Первообразная для основных элементарных функций.

$$F(x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1).$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x| + c:$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + c, \text{ при } x > 0;$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(-x) + c, \text{ при } x < 0.$$

$$F(\sin x) = -\cos x + c.$$

$$F(\cos x) = \sin x + c.$$

$$F\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{tg} x + c.$$

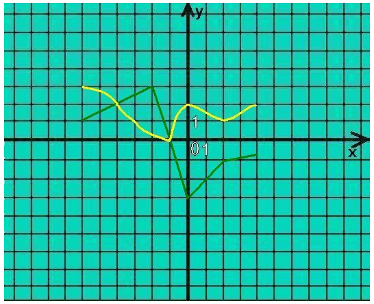
$$F\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\operatorname{ctg} x + c.$$

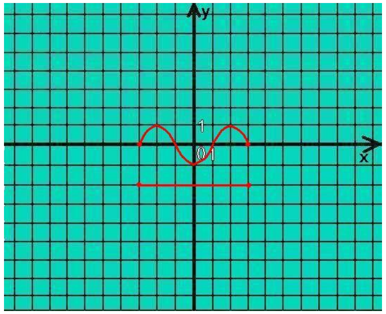
$$F(a^x) = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

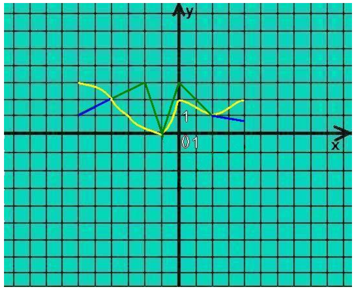
$$F(e^x) = e^x + c.$$

$$F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x + c.$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c.$$

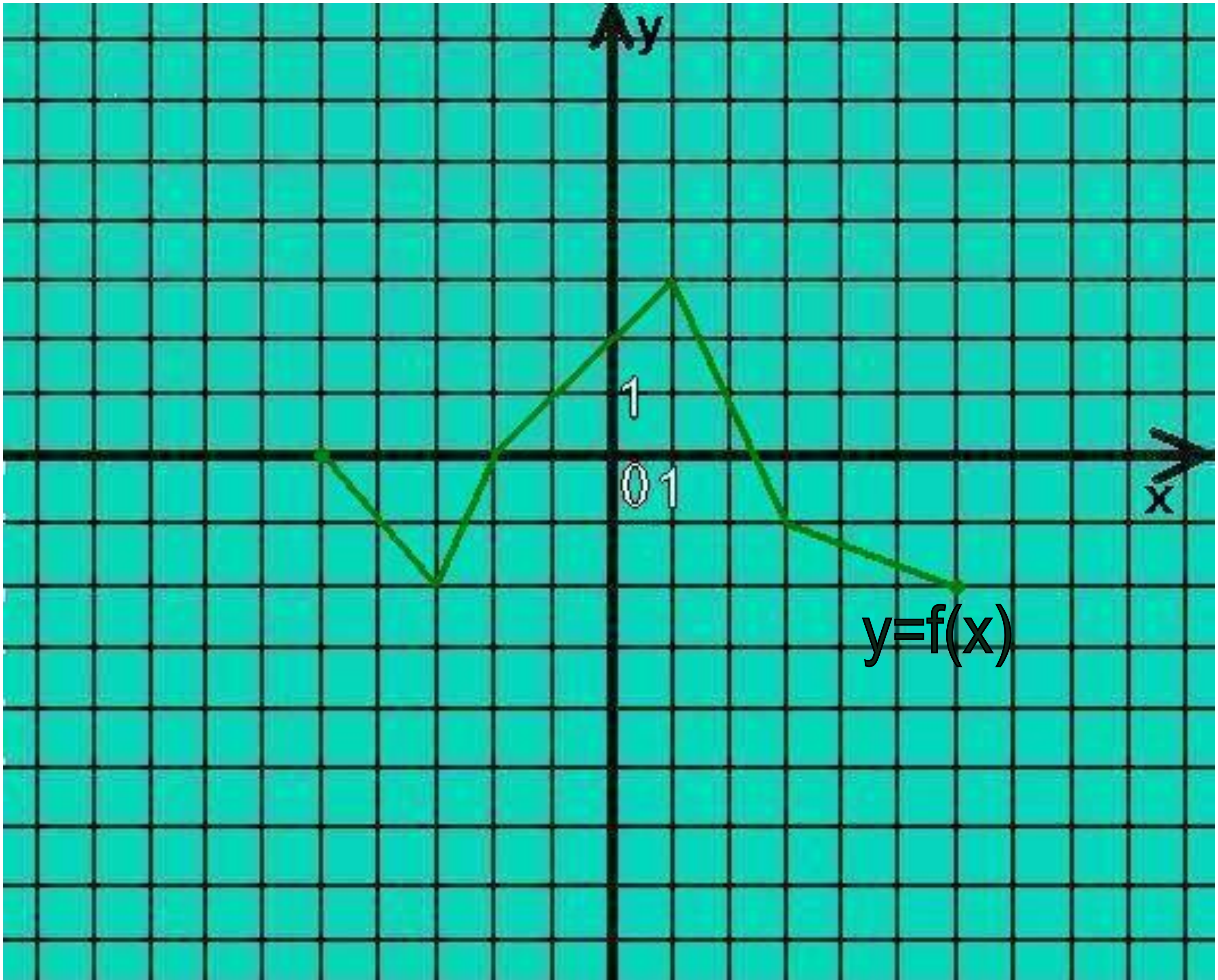




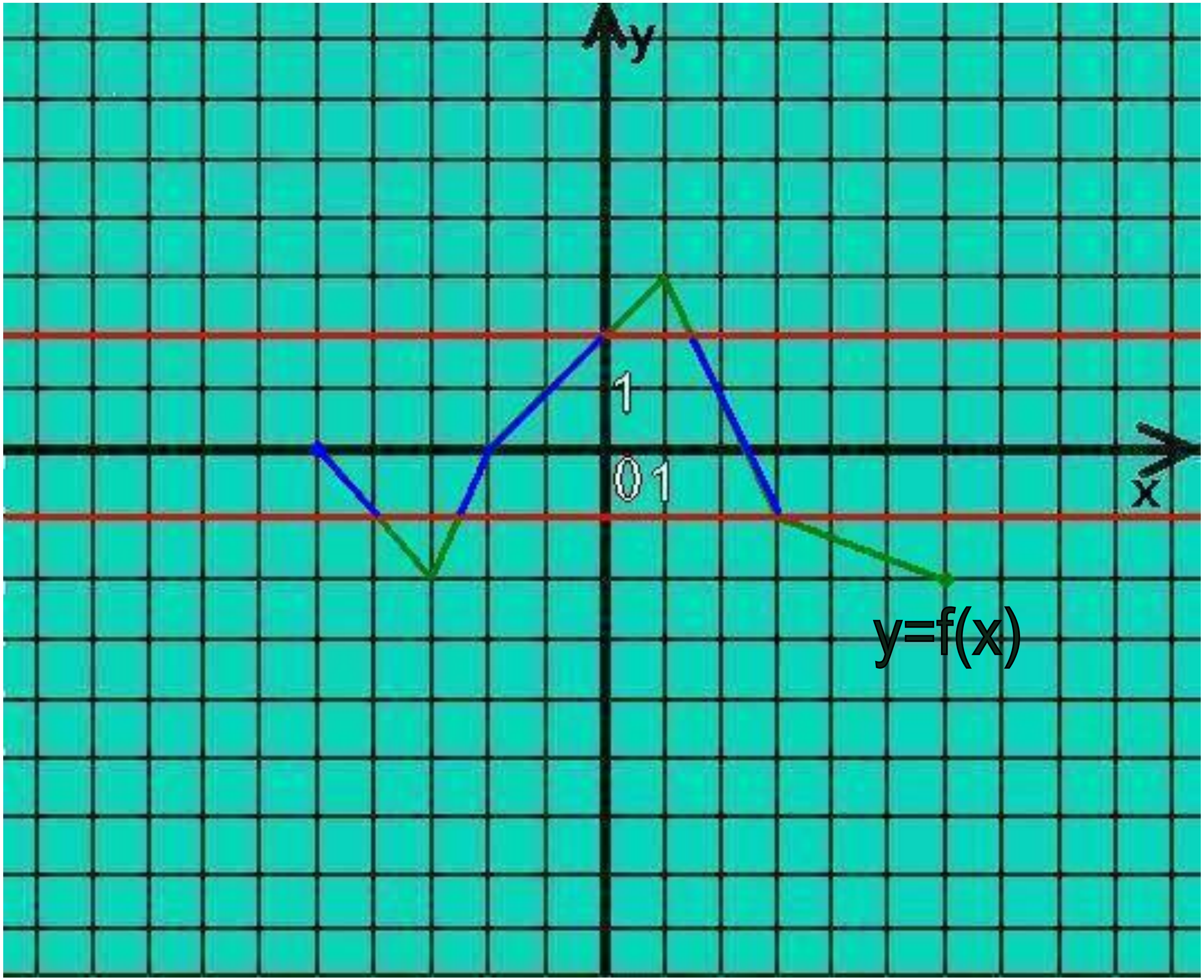


Графическое решение неравенств

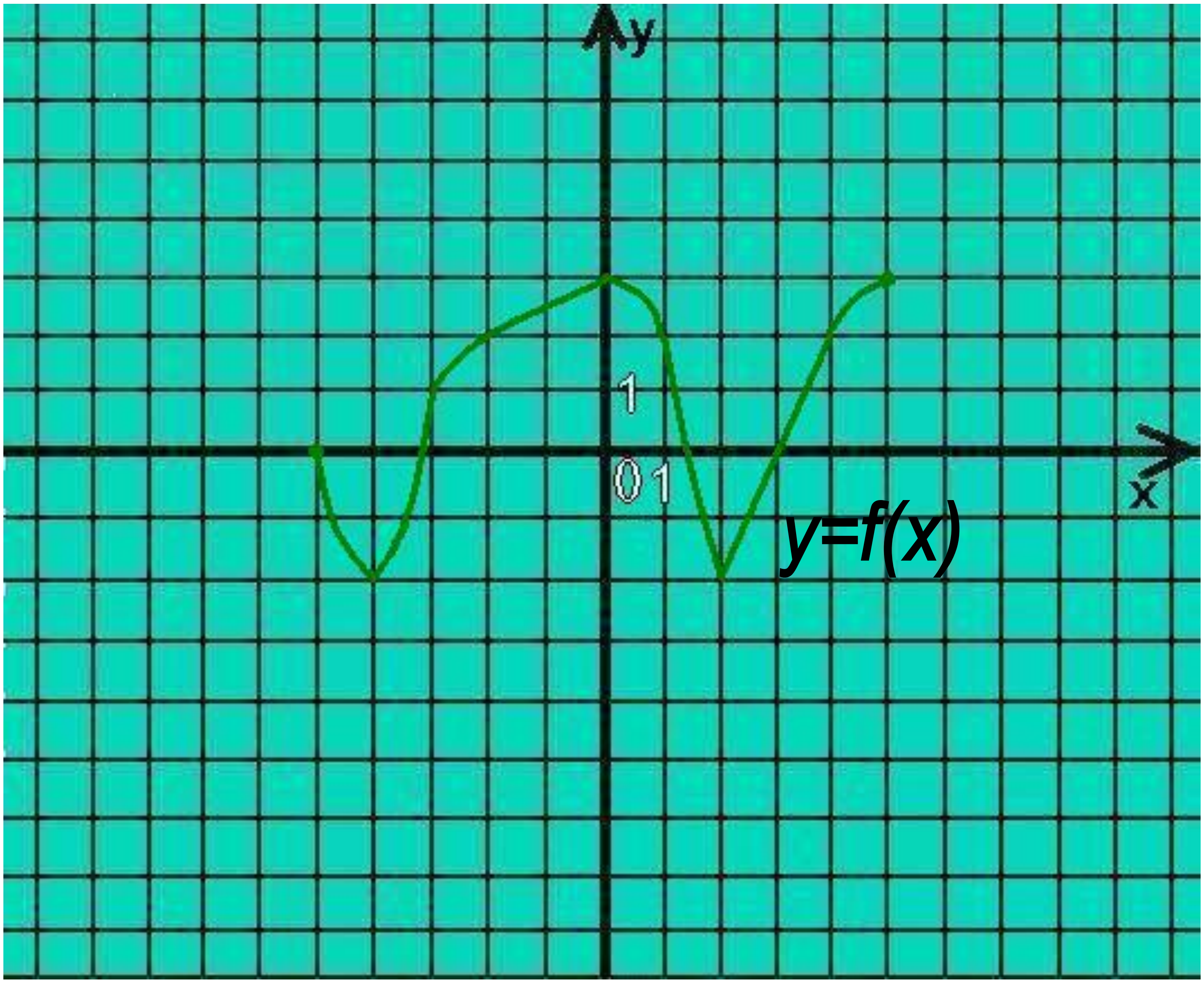
№1. **На рисунке изображён график функции y=f(x). Укажите общую протяжённость отрезков, на которых выполнено условие $-1 \le f(x) \le 2$.**



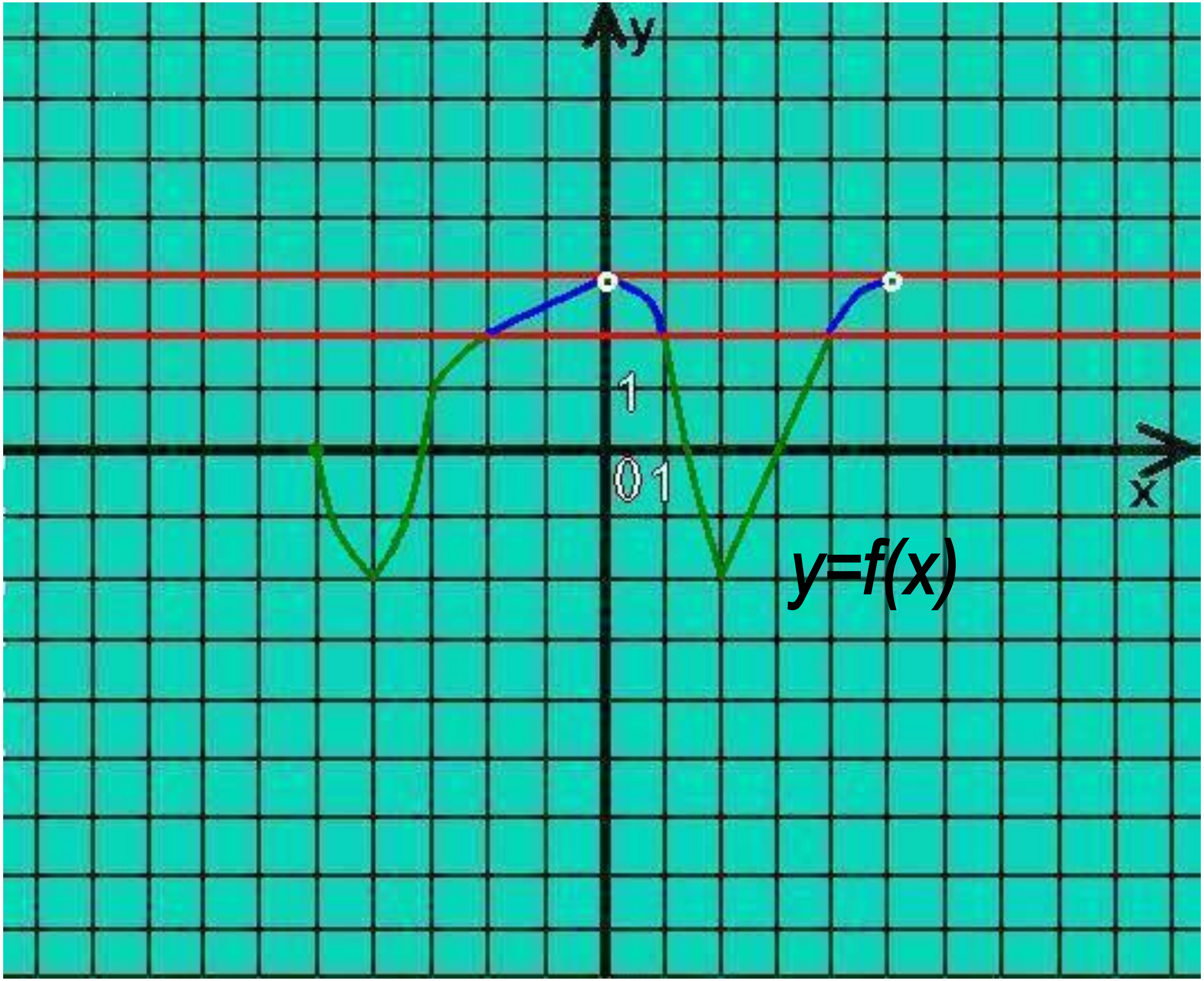
Решение:I-5-(-4)I + I-2,5-0I + I1,5-3I = 5. Ответ: 5.



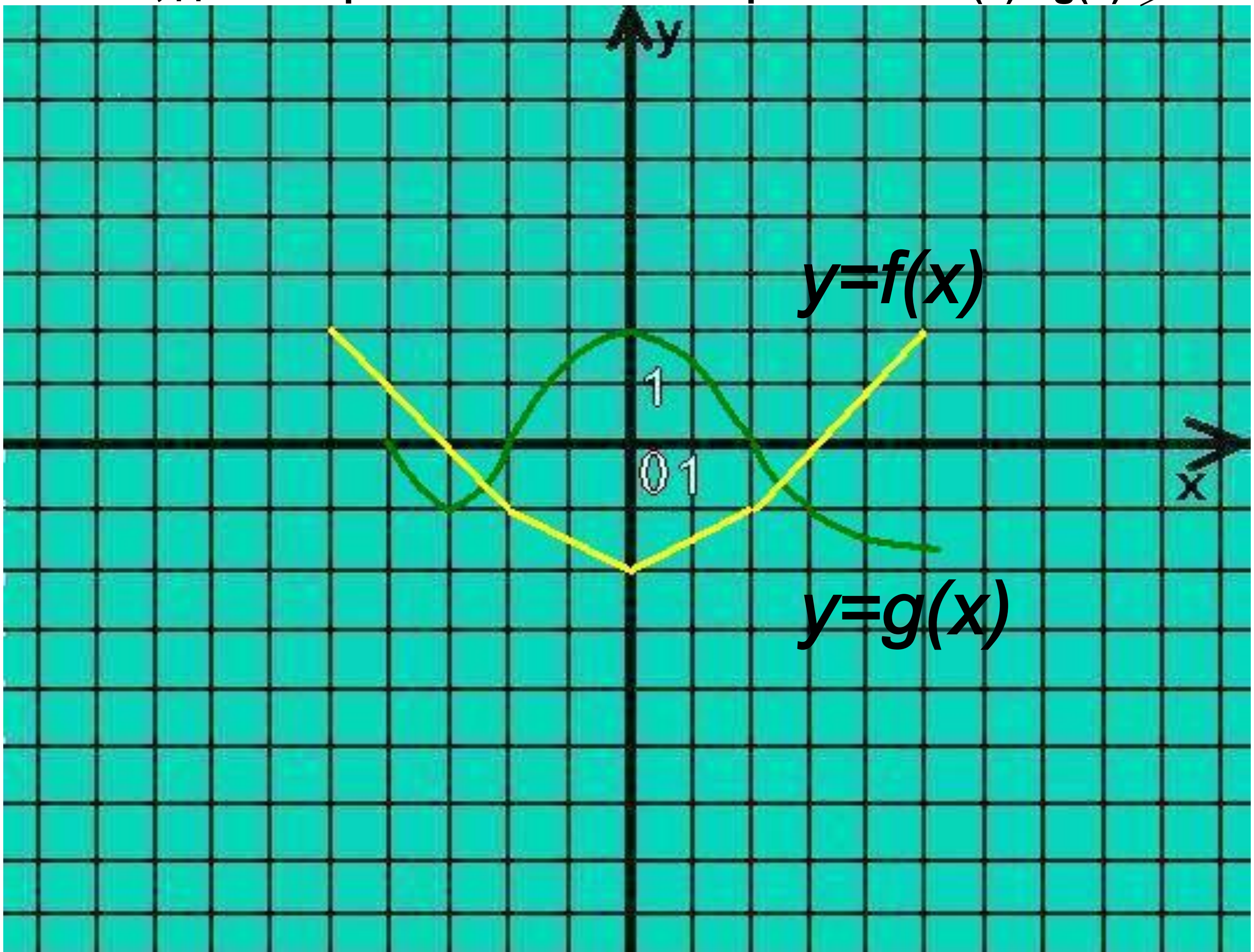
№2. **На рисунке изображён график функции y=f(x), заданной на промежутке [-5;5]. Укажите те значения X, для которых выполняется двойное неравенство 2 $\leq$f(x)< 3.**



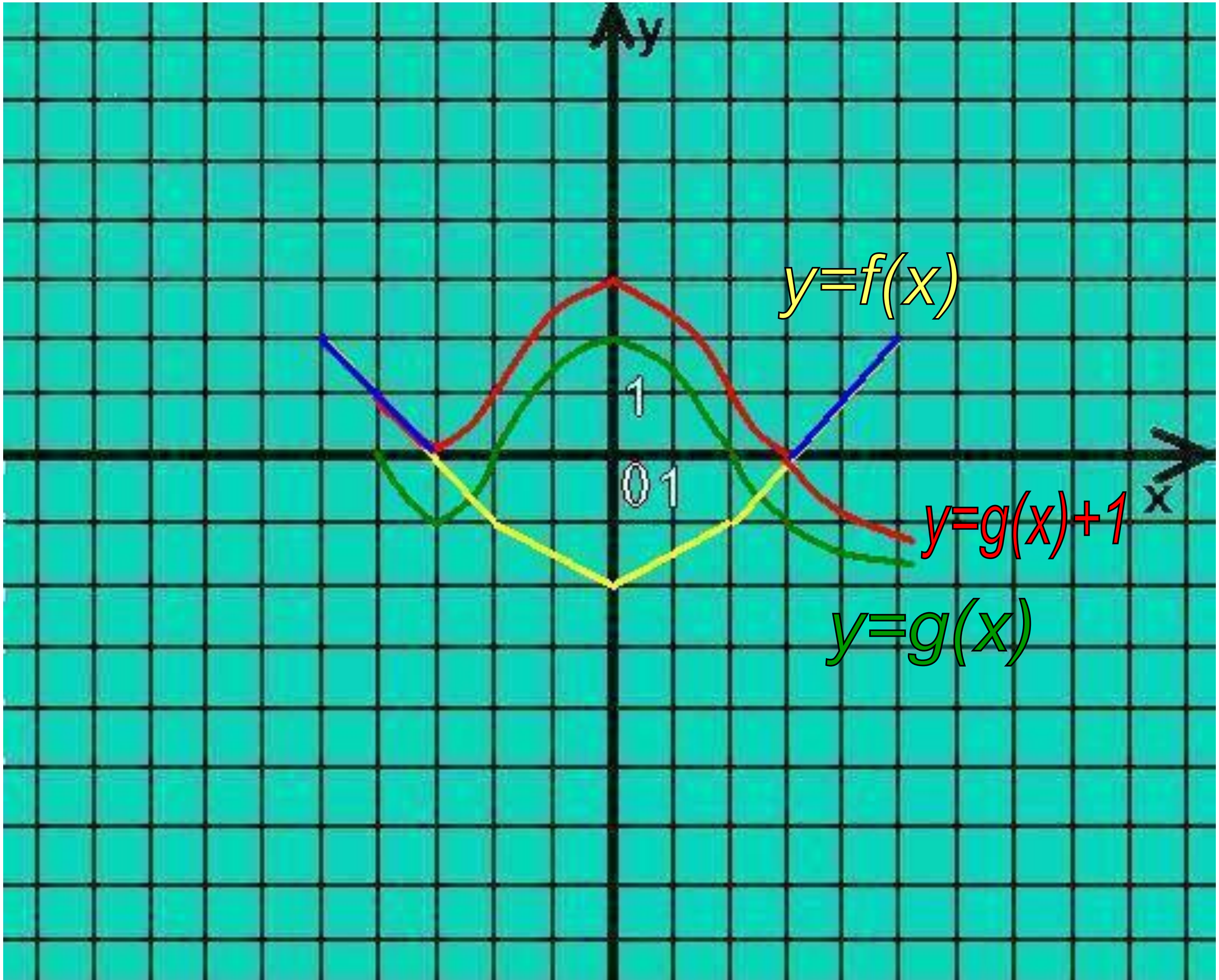
Решение: X є [-2;0) u (0;1] u [4;5].



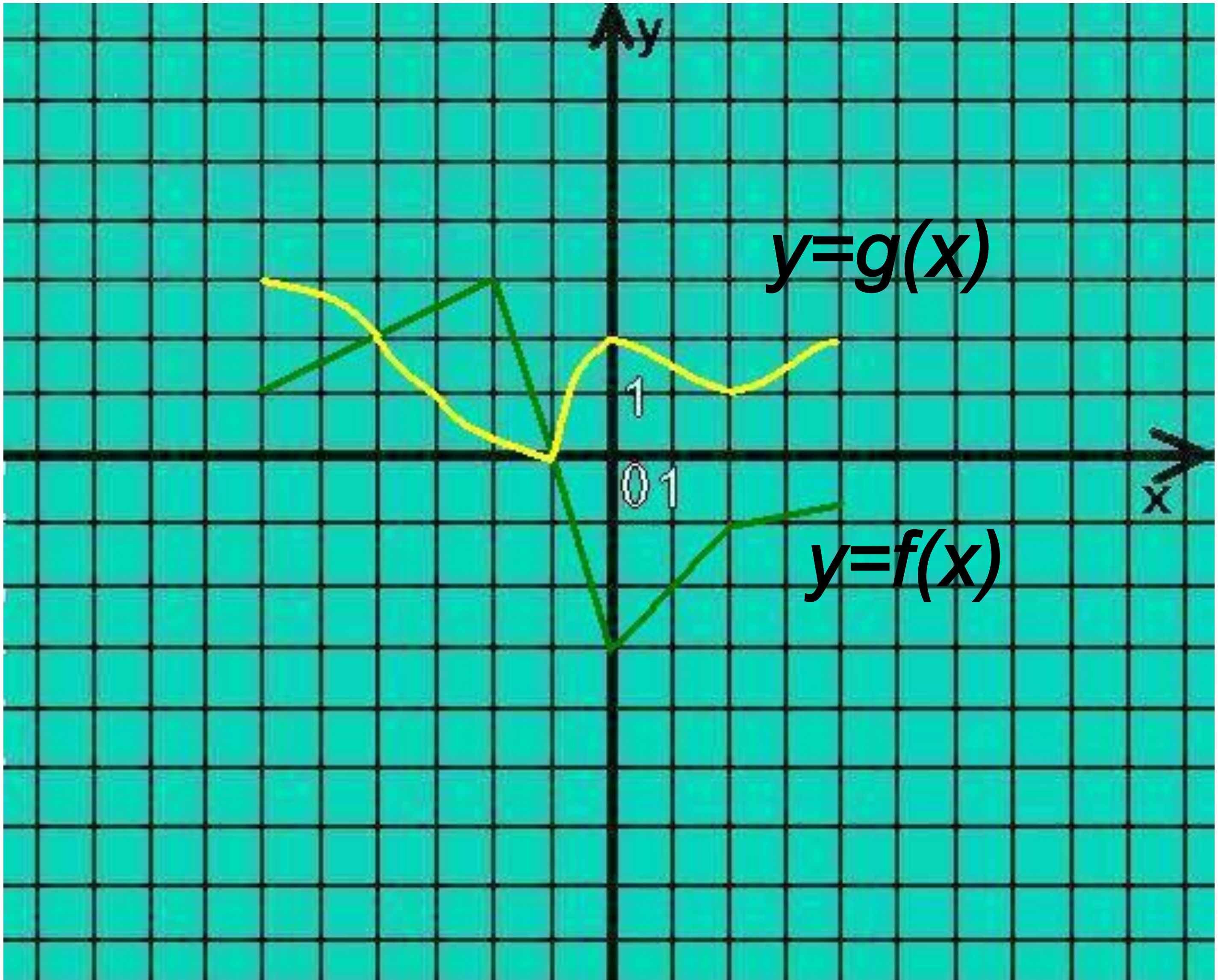
№3. **На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ (ломаная линия) и $y=g(x)$ (плавная линия), заданных на промежутке [-4;5]. Укажите все значения X, для которых выполняется неравенство $f(x) - g(x) \geq 1$.**



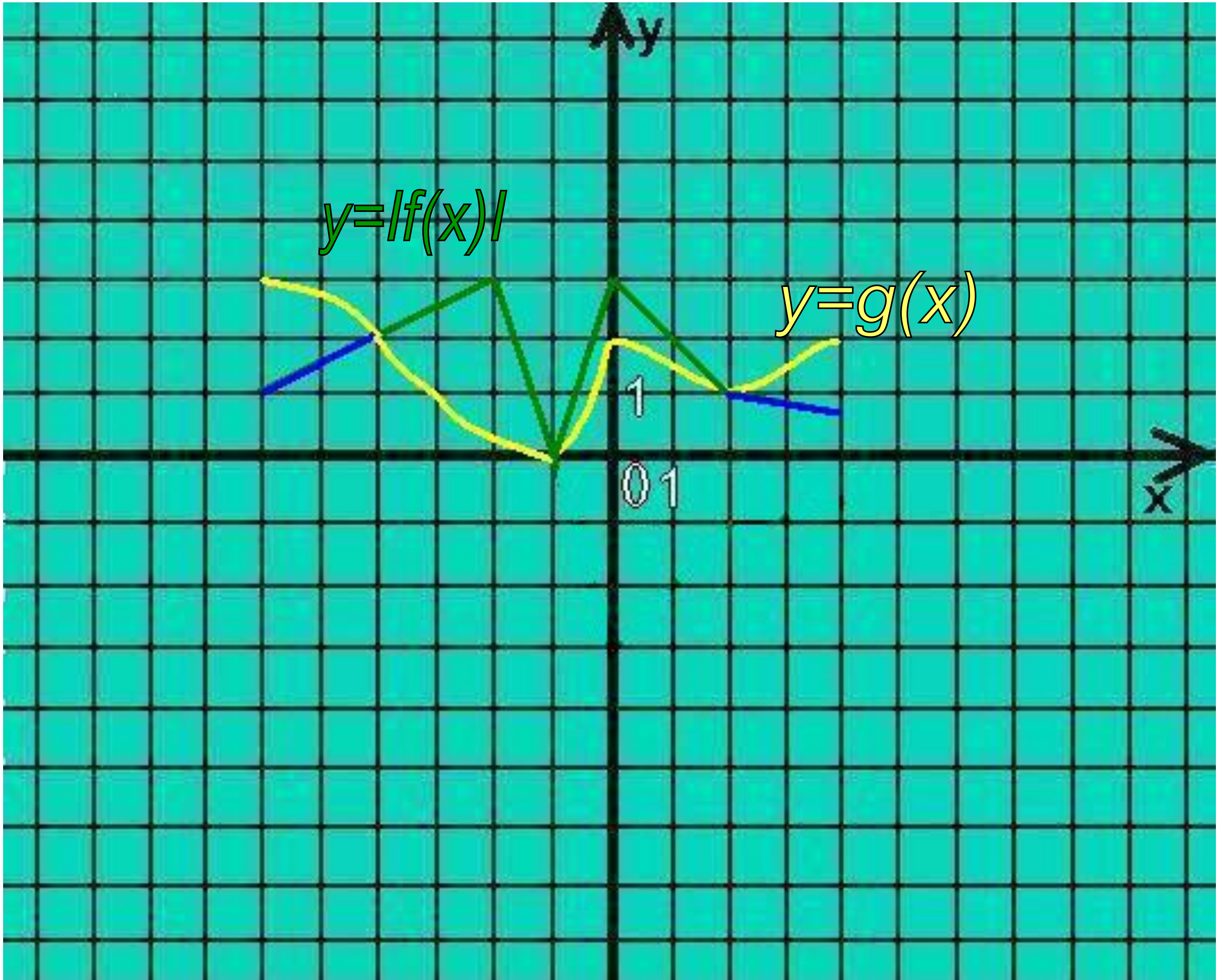
Решение: f(x)>1+g(x); x є [-5;-4] u [3;5].



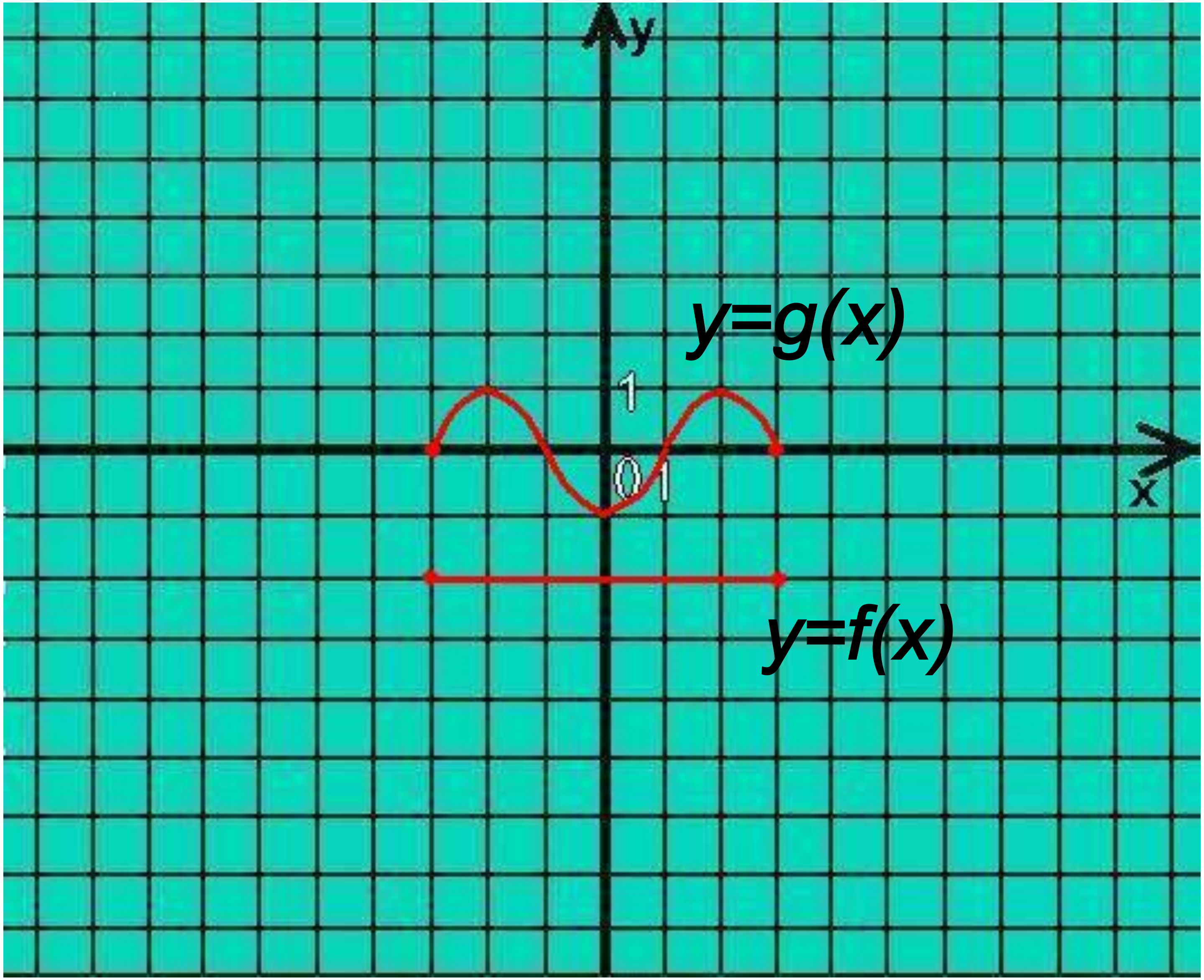
№4. На рисунке изображён график функции y=f(x) (ломаная линия) и y=g(x) (плавная линия), заданных на промежутке [-6;4]. Укажите все значения X, для которых выполняется неравенство I f(x) I ≤ g(x).



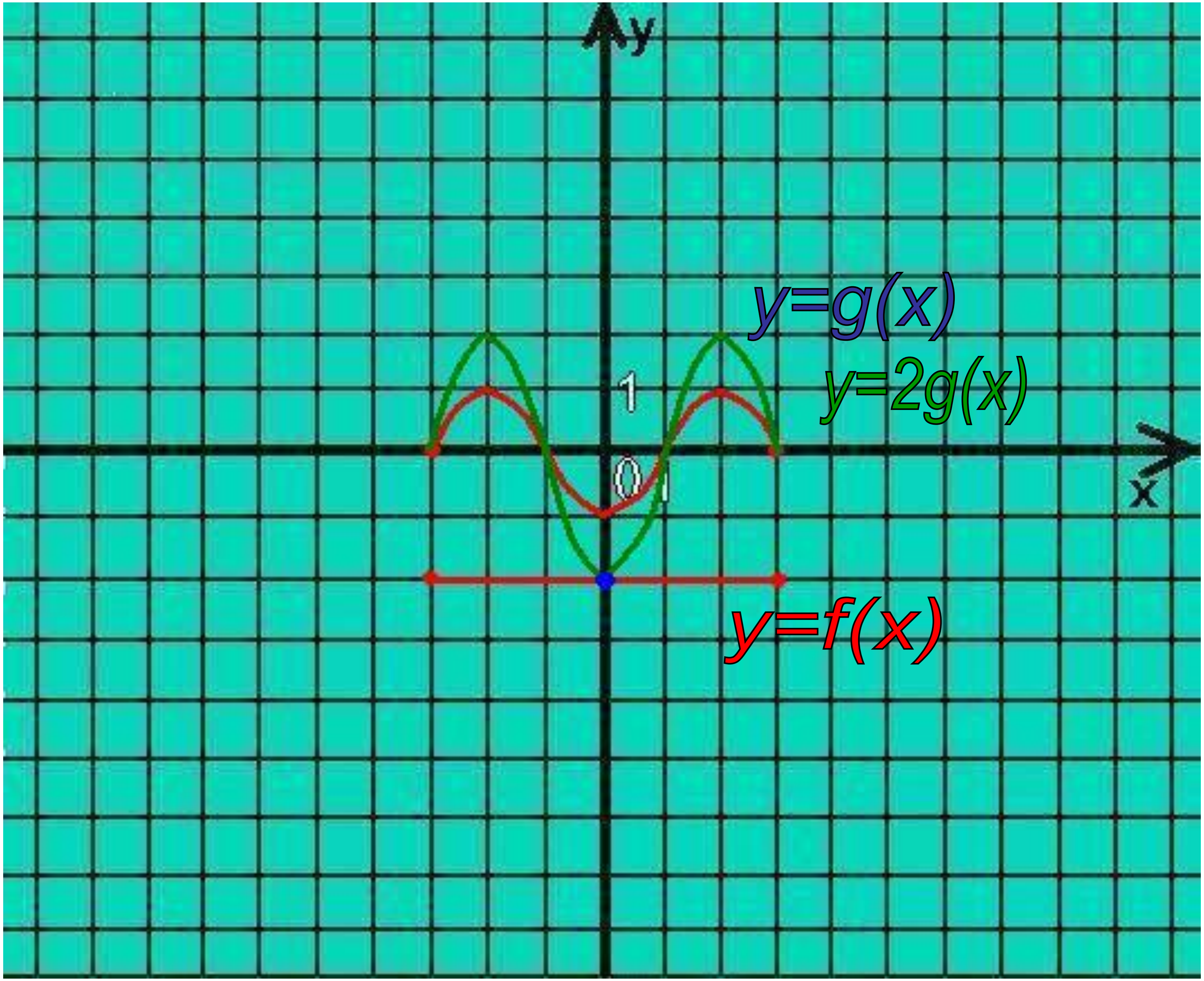
Решение: X є [-6;-4] u [2;3].



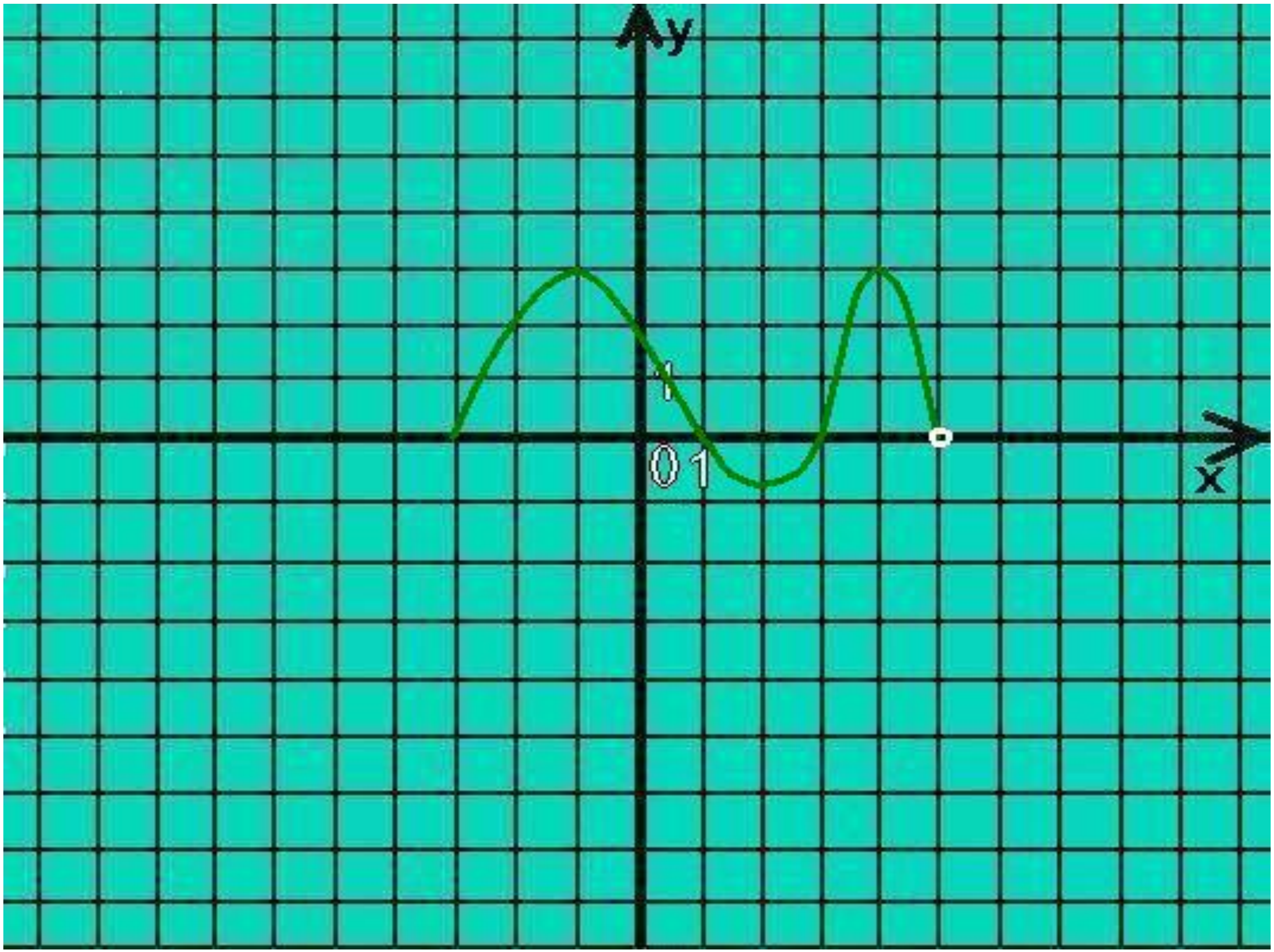
№5. На рисунке изображён график y=f(x) и y=g(x), заданные на промежутке [-3;3]. Укажите те значения x, для которых выполняется неравенство : $f(x) \geq 2g(x)$.



Решение: x =2.



№6. **На рисунке изображён график функции y=f(x). Укажите множество решений неравенства : $f(x) \leq 0$.**



Решение: x є [1;3].